

УДК 532.5

ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В МОДЕЛИ ДРАЗИНА

Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.

Представлены результаты аналитических расчетов устойчивости стратифицированного сдвигового течения идеальной жидкости, описываемого моделью Дразина [1]. Показано, что ранее найденное [1] решение, дающее границы области неустойчивости на плоскости параметров αJ , где α — безразмерное волновое число и J — минимальное значение числа Ричардсона, вообще говоря, неполно. Наличие постоянной стратификации во всей области течения дает возможность существования свободных внутренних волн, излучение которых от сдвигового слоя порождает дополнительно излучательную неустойчивость, рассматривавшуюся ранее в [2] для течения с тангенциальным разрывом скорости. Выяснено влияние внешних границ на устойчивость сдвигового течения и дано сравнение полученных аналитических результатов с численными расчетами, проведенными [3, 4] для некоторых моделей с плавными профилями скорости и плотности.

Было установлено [3, 4], что все моды, содержащиеся в сдвиговом течении, можно разделить на два класса. Это (по терминологии [4]) моды A , экспоненциально спадающие по вертикальной координате z в обе стороны от слоя сдвига, и моды B , имеющие по z структуру бегущих волн (излучаемые от слоя сдвига). Оба типа мод могут порождать неустойчивости со сравнимыми по величине инкрементами, но в различных диапазонах волновых чисел, причем излучательные неустойчивости, связанные с модами B , обычно характеризуются большей длиной волны. В рассматриваемой ниже модели Дразина аналитически определяются все возможные области неустойчивости на плоскости αJ , обусловленные как модами A , так и модами B . Для этого использовался обычный подход, заключающийся в том, что линеаризованные уравнения гидродинамики сводятся к одному сингулярному уравнению Тейлора — Гольдштейна (см. ниже), которое вместе с граничными условиями образует краевую задачу на собственные значения фазовой скорости c гармонического возмущения. Из этой задачи находилась кривая нейтральной устойчивости, разделяющая на плоскости параметров αJ области с комплексными значениями c , свидетельствующими о неустойчивости течения (ввиду самосопряженности краевой задачи комплексные значения c могут появляться только сопряженными парами, причем одно значение соответствует нарастающему возмущению, а другое — затухающему), и области с возможными действительными значениями c , соответствующими нейтрально устойчивым течениям.

Найденные аналитически неустойчивые решения в виде мод B , обусловленные наличием стратификации, можно объяснить [5] при помощи концепции волн отрицательной энергии, что характерно для неравновесной системы, примером которой является сдвиговое течение. Уменьшение со временем отрицательной энергии таких волн за счет генерации и распространения (излучения) внутренних волн в стратифицированной жидкости (или за счет других отбирающих энергию факторов, например за счет вязкой диссипации) ведет к росту абсолютной величины энергии, а значит, и амплитуды волны, т. е. к неустойчивости.

1. Рассмотрим плоскопараллельное движение идеальной жидкости вдоль горизонтальной оси x с профилями скорости и плотности вида [1]

$$(1.1) \quad U(z) = U_0 \operatorname{th}(z/d); \quad \rho(z) = \rho_0 e^{-\beta z}$$

Вертикальная компонента возмущения скорости $w(x, z, t) = W(z)e^{ik(x-ct)}$ описывается уравнением Тейлора — Гольдштейна (ТГ) в приближении Буссинеска [6—8]

$$(1.2) \quad W''(z) - \left[k^2 + \frac{U''}{U-c} - \frac{N^2}{(U-c)^2} \right] W(z) = 0$$

где $N^2 = -g\rho'(z)\rho^{-1}(z)$ — квадрат частоты плавучести (g — ускорение силы тяжести).

Будем искать решения этого уравнения с действительными значениями k и s , которые лежат на кривой нейтральной устойчивости, отделяющей области устойчивости и неустойчивости на плоскости параметров $\alpha = kd$ (безразмерное волновое число) и $J = \min [N(z)/U'(z)]^2 = g\beta d^2/U_0^2$ (минимальное значение числа Ричардсона). Такие решения принято называть сингулярными нейтральными модами. Кроме того, будем предполагать граничные условия по z симметричными (их конкретный вид обсудим ниже), что наряду с симметрией по z уравнения (1.2) позволяет положить значение собственного числа s для искомой сингулярной нейтральной моды равным нулю (см. [1]). Это основное предположение $s = 0$ позволяет аналитически исследовать решения уравнения (1.2). Однако, как будет видно из дальнейшего, для излучательных мод фазовая скорость может быть отличной от нуля даже в симметричной задаче.

Запишем уравнение (1.2) в безразмерном виде, полагая $s = 0$, вводя характерные масштабы скорости U_0 и длины d и используя в качестве независимой переменной функцию $u(z_*) = \text{th}(z_*)$ [1]

$$(1.3) \quad \frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{df}{du} \right] + \left[2 - \frac{\alpha^2 - J}{1-u^2} + \frac{J}{u^2} \right] f(u) = 0$$

где $f(u) = f(\text{th } z_*) = W(z)$, $z_* = z/d$ — безразмерная вертикальная координата (далее звездочку опустим).

Полученное уравнение имеет четыре регулярные особые точки (при $u = 0, \pm 1, \infty$) и принадлежит к уравнению типа Фукса [9]. Рассмотрим поведение его решений в окрестности особых точек.

При $u \rightarrow 0$, оставляя в (1.3) главные члены, получаем решение в виде

$$(1.4) \quad f = c_1 u^{\mu_1} + c_2 u^{\mu_2}, \quad \mu_{1,2} = 1/2 \pm 1/2 \sqrt{1-4J}$$

где $c_{1,2}$ — произвольные постоянные. Это решение стремится к нулю при $u \rightarrow 0$, т. е. и при $z \rightarrow 0$.

Вблизи особых точек $u = \pm 1$ (т. е. при $z \rightarrow \pm \infty$) уравнение (1.3) имеет два различных типа решений в зависимости от знака разности $J - \alpha^2$. Если $J < \alpha^2$, то физически разумным при $u \rightarrow \pm 1$ решением является

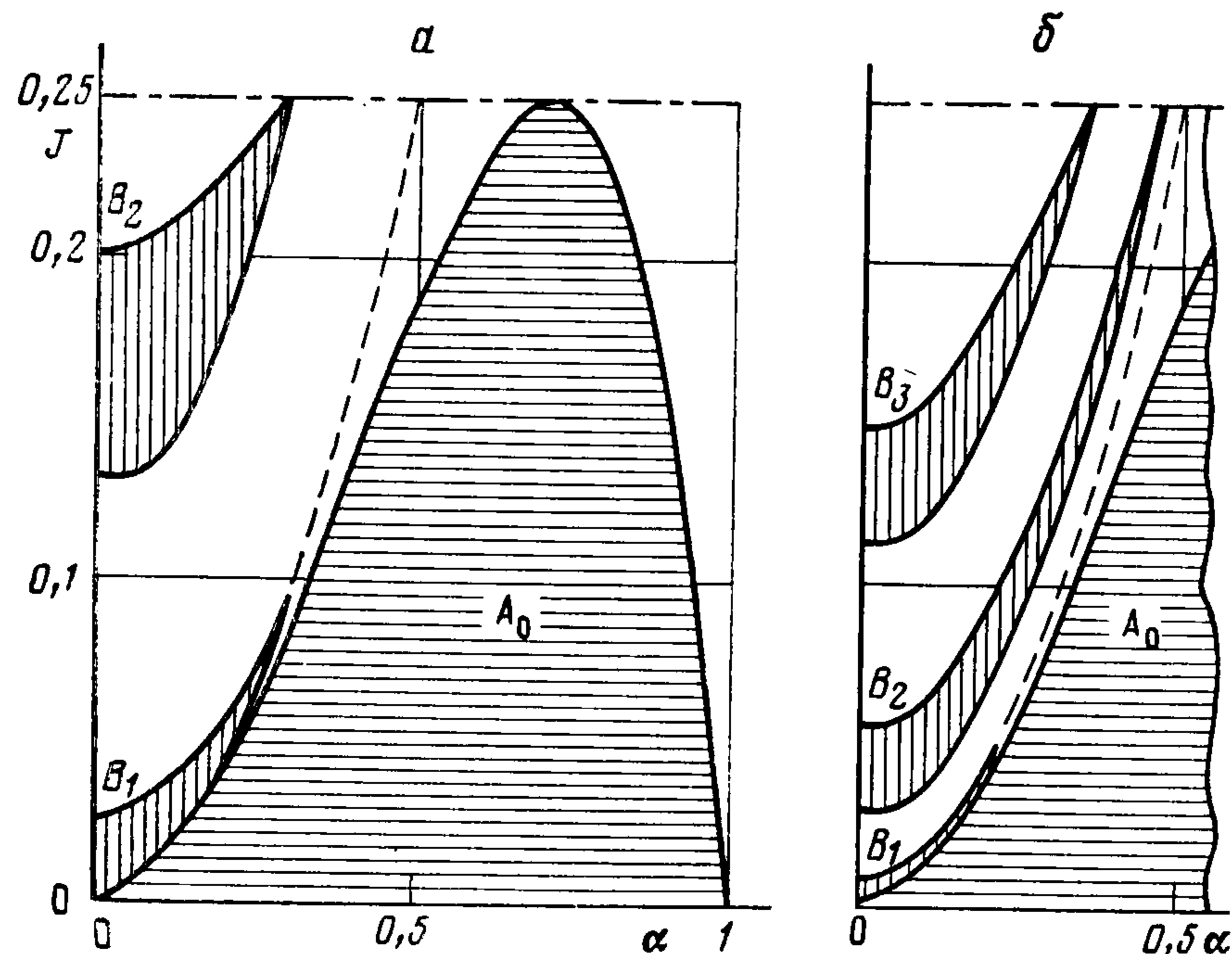
$$(1.5) \quad f \sim (1 \pm u)^\Lambda, \quad \Lambda = 1/2 \sqrt{\alpha^2 - J}$$

Второе линейно независимое решение $f \sim (1 \pm u)^{-\Lambda}$ неограниченно растет при $u \rightarrow \pm 1$.

Асимптотическое решение (1.5) монотонно стремится к нулю при $u \rightarrow \pm 1$ ($z \rightarrow \pm \infty$). Именно этот случай был рассмотрен в [1], где найдено выражение для нейтральной кривой локализованной по z моды A : $J = \alpha^2(1 - \alpha^2)$. Однако при $J > \alpha^2$ асимптотическое решение (1.3) при $u \rightarrow \pm 1$ имеет другой вид:

$$(1.6) \quad f = c_3 \cos(v \ln \eta) + c_4 \sin(v \ln \eta), \\ v = 1/2 \sqrt{J - \alpha^2}, \quad \eta = 1 - |u|$$

Это решение не исчезает при $u \rightarrow \pm 1$ ($z \rightarrow \pm \infty$), а имеет осциллирующий характер, что соответствует «излучательным» граничным условиям, т. е. оно описывает суперпозицию двух мод, бегущих к слою сдвига и от него к $z = \pm \infty$. Границей на плоскости αJ , разделяющей локализованные по z моды A и излучательные моды B , служит парабола $J = \alpha^2$.



Кривая нейтральной устойчивости, найденная в [1], целиком лежит под этой параболой (фигура).

Рассмотрим область над параболой, т. е. $J > \alpha^2$. Преобразуем уравнение (1.3), выделив в явном виде найденное (см. (1.4), (1.6)) поведение искомой функции в окрестности особых точек

$$(1.7) \quad f(u) = \xi^{1/4 + 1/2\gamma} (1 - \xi)^{i\nu} \Phi(\xi), \quad \xi = u^2, \quad \gamma = 1/2 \sqrt{1 - 4J}$$

Новая функция $\Phi(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.8) \quad \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1 + \gamma - (2 + \gamma + 2i\nu)\xi}{\xi(1 - \xi)} \frac{d\Phi}{d\xi} - \left(i\nu + \frac{\gamma}{2} + \frac{5}{4} \right) \left(i\nu + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{\Phi}{\xi(1 - \xi)} = 0$$

которое несколько отличается от обычно рассматриваемого гипергеометрического уравнения [10] тем, что содержит мнимый параметр $i\nu$. Число особых точек в уравнении (1.8) уменьшилось до трех ($\xi = 0, 1, \infty$), но появилась точка ветвления $\xi = 0$.

Проведем вдоль отрезка $[0, 1]$ разрез, правый берег которого соответствует изменению u от 0 до 1, а левый — изменению u от 0 до -1 . При переходе с правого берега на левый решение уравнения (1.8) будет иметь некоторый скачок фазы.

Если $\gamma \neq 0$, то искомое решение имеет вид [9, 10]

$$(1.9) \quad \Phi = c_1 \Phi_1^\circ(u) + c_2 \Phi_2^\circ(u)$$

$$\Phi_1^\circ(u) = F\left(i\nu + \frac{\gamma}{2} + \frac{5}{4}, i\nu + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}, \gamma + 1, u^2\right)$$

$$\Phi_2^\circ(u) = u^{-2\gamma} F\left(i\nu - \frac{\gamma}{2} + \frac{5}{4}, i\nu - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}, -\gamma + 1, u^2\right)$$

Здесь $F(a, b, c, u^2)$ — гипергеометрическая функция, содержащая комплексные параметры. Выбранный вид решения (1.9) удобен для рассмотрения асимптотики вблизи $u = 0$ (на что указывает верхний индекс $\Phi_{1,2}^\circ$), так как при $u \rightarrow 0$ имеем $F(a, b, c, u^2) \rightarrow 1$. Для исследования решения уравнения (1.8) при $\xi (=u^2) \rightarrow 1$ удобно записать эти решения через другие функции

$$(1.10) \quad \Phi_1^1(u) = F\left(i\nu + \frac{\gamma}{2} + \frac{5}{4}, i\nu + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}, 2i\nu + 1, 1 - u^2\right)$$

$$\Phi_2^1(u) = (1 - u^2)^{-2i\nu} F\left(-i\nu + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}, -i\nu + \frac{\gamma}{2} + \frac{5}{4}, -2i\nu + 1, 1 - u^2\right)$$

связанные с функциями $\Phi_{1,2}^\circ$ линейной зависимостью [10]

$$(1.11) \quad \Phi_1^\circ = A_1^- \Phi_1^1 + A_1^+ \Phi_2^1, \quad \Phi_2^\circ = A_2^- \Phi_1^1 + A_2^+ \Phi_2^1$$

$$A_1^\pm = A_1^\pm(\gamma) = \Gamma(1 + \gamma) \Gamma(\pm 2i\nu) \left[\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} \pm i\nu - \frac{1}{4}\right) \times \right. \\ \left. \times \Gamma\left(\frac{\gamma}{2} \pm i\nu + \frac{5}{4}\right) \right]^{-1}$$

$$A_2^\pm = A_1^\pm(-\gamma)$$

Отметим, что, как следует из явного вида функции $\Phi_2^\circ(u)$, при переходе через нуль от положительных значений u к отрицательным у нее появляется дополнительный множитель $e^{2i\pi\nu}$, т. е. скачком меняется фаза на $2\pi\nu$. Чтобы это учесть во втором соотношении (1.11), надо коэффициенты A_2^\pm умножить на $e^{2i\pi\nu}$ в области отрицательных значений u ($-1 < u < 0$). Таким образом, имея решение гипергеометрического уравнения (1.8) для Φ и подставляя его в (1.7), получаем

$$(1.12) \quad f(u) = u^{1/2+\gamma} (1-u^2)^{i\nu} [c_1 \Phi_1^\circ(u) + c_2 \Phi_2^\circ(u)] = u^{1/2+\gamma} (1-u^2)^{i\nu} \times \\ \times \begin{cases} [(c_1 A_1^- + c_2 A_2^-) \Phi_1^1(u) + (c_1 A_1^+ + c_2 A_2^+) \Phi_2^1(u)], & 0 < u < 1 \\ [(c_1 A_1^- + c_2 A_2^- e^{2i\pi\nu}) \Phi_1^1(u) + (c_1 A_1^+ + c_2 A_2^+ e^{2i\pi\nu}) \Phi_2^1(u)], & -1 < u < 0 \end{cases}$$

Решение (1.12) после перехода к исходным переменным может рассматриваться как точное решение уравнения ТГ (1.2). Напомним, что это решение справедливо при $J > \alpha^2$ и в отличие от ранее найденного решения [1] не убывает, а осциллирует при $z \rightarrow \pm\infty$. Действительно, из (1.12) следует

$$(1.13) \quad W(z) = f(\operatorname{th} z) \sim (c_1 A_1^- + c_2 A_2^-) e^{2i\nu(\ln 2 - z)} + \\ + (c_1 A_1^+ + c_2 A_2^+) e^{-2i\nu(\ln 2 - z)}, \quad z \rightarrow \infty$$

$$W(z) \sim i e^{-i\pi\nu} [(c_1 A_1^- + c_2 A_2^- e^{-2i\pi\nu}) e^{2i\nu(\ln 2 + z)} + \\ + (c_1 A_1^+ + c_2 A_2^+ e^{2i\pi\nu}) e^{-2i\nu(\ln 2 + z)}], \quad z \rightarrow -\infty$$

2. На основании полученных в п. 1 аналитических решений уравнения ТГ определим влияние твердых границ в рассматриваемой модели [1] на образование и трансформацию новых областей неустойчивости на плоскости αJ , соответствующих излучательным модам B . Предположим, что рассматриваемое течение заключено между твердыми непроницаемыми плоскими границами $z = \pm h$. Это соответствует нулевым граничным условиям $f|_{z=\pm h} = 0$. Будем считать безразмерное расстояние между границами достаточно большим ($h \gg 1$), так, чтобы вблизи $z = \pm h$ с достаточной точностью было справедливо асимптотическое решение (1.13), для которого и будем применять нулевые граничные условия. Это приводит к системе двух однородных уравнений относительно c_1, c_2 , из условия нетривиальной разрешимости которой

$$(2.1) \quad A_1^- A_2^- e^{4i\nu(\ln 2 - h)} \pm A_1^+ A_2^+ e^{-4i\nu(\ln 2 - h)} + A_1^- A_2^+ + A_1^+ A_2^- = 0$$

при фиксированном значении J можно определить допустимые значения α , для которых по предположению $c = 0$.

Выражения (1.11) для коэффициентов A_1^- и A_1^+ (аналогично для A_2^- и A_2^+) различаются только знаком мнимой части аргументов Γ -функций. Отсюда следует [11], что A_1^- и A_1^+ (аналогично A_2^- и A_2^+) имеют одинаковые модули и противоположные фазы. Это значит, что все входящие в (2.1) произведения $A_1^\pm A_2^\pm$ имеют одинаковые модули. Тогда (2.1) можно свести к простому тригонометрическому уравнению

$$\cos[\varphi_1 + \varphi_2 + 4\nu(\ln 2 - h)] + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

относительно фаз $\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(\alpha, J)$ комплексных коэффициентов $A_{1,2}^\pm$.

Данное равенство выполняется при

$$(2.2) \quad \varphi_j + 2\nu (\ln 2 - h) = \pi/2 + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где либо $j = 1$, либо $j = 2$. Соотношения (2.2) определяют верхнюю ($j = 1$) и нижнюю ($j = 2$) ветви кривой нейтральной устойчивости на плоскости αJ . Оказывается, что при заданном значении безразмерного расстояния $2h$ между границами соотношения (2.2) разрешимы лишь при конечном числе значений n , что в свою очередь дает конечное число зон неустойчивости, каждой из которых соответствует определенная мода B .

Проведенные вычисления показали, что число m зон неустойчивости увеличивается с ростом h по закону $m \approx 0,16h$. Границы зон неустойчивости показаны на фигуре для $h = 10$ (а) и $h = 20$ (б) и полностью совпадают с полученными [3] путем прямого численного решения уравнения ТГ (1.2) с соответствующими краевыми условиями. Штрихами показана кривая $J = \alpha^2$, разделяющая области, в которых существуют экспоненциальные моды A (горизонтальная штриховка) и излучательные моды B (вертикальная штриховка). Штрихпунктиром отмечен уровень $J = 1/4$, выше которого согласно теореме Майлса—Ховарда [7, 8] неустойчивость невозможна.

Сделаем два замечания о характерных особенностях полученных зон неустойчивости типа B .

Во-первых, как показывают вычисления по соотношению (2.2) и как видно из фигуры, имеются зоны (B_2, B_3), удаленные от общей границы $J = \alpha^2$ для всей излучательной области, и зоны, прижатые к этой границе (для приведенного на фигуре случая с $h = 10, 20$ имеется одна такая зона B_1). Для удаленных зон B_2, B_3 характерно, что их верхняя и нижняя границы уходят вверх и смыкаются точно на уровне $J = 1/4$. Это хорошо видно из двух определяющих границы зон уравнений (2.2), которые при $J = 1/4$ ($\nu = 0$) совпадают (т. е. дают общую точку на плоскости αJ , поскольку при этом условии совпадают комплексные коэффициенты A_1^- и A_2^- , а значит, и фазы φ_1 и φ_2). Для прижатой зоны B_1 ее верхняя граница, не успевая подняться до уровня $J = 1/4$, пересекается с параболой $J = \alpha^2$ ($\nu = 0$), которая удовлетворяет уравнению (2.2), т. е. является нижней границей для зон неустойчивости, которые прижаты к ней.

При увеличении h число зон неустойчивости увеличивается, но они сужаются, сдвигаются вправо и прижимаются к параболе $J = \alpha^2$ (эта тенденция видна из фигуры). Их максимум сдвигается по параболе $J = \alpha^2$ вниз. Расчеты показывают, что при $h \approx 100$ все зоны прижаты к параболе и имеют максимумы, значительно меньшие $1/4$. Примыкая вплотную к дразиновской зоне A_0 в области малых α и J , они слегка трансформируют зону A_0 в этой области параметров. В пределе при $h \rightarrow \infty$ все зоны неустойчивости B_j стягиваются в точку $\alpha = J = 0$ (см. по этому поводу п. 4), и на плоскости остается невозмущенная граница зоны A_0 , которую впервые рассчитал Дразин [1]. Все отмеченные особенности подтверждаются имеющимися численными решениями уравнения ТГ [3, 4].

Во-вторых, отметим, что наличие дискретного спектра мод (B_j, A_j) связано с твердыми границами, которые образуют волновод для внутренних волн на сдвиговом течении. Экспоненциально спадающим модам A соответствуют области неустойчивости под кривой $J = \alpha^2$, а колебательным модам B — области неустойчивости над этой кривой. Однако разделение мод на экспоненциальные и колебательные B имеет смысл только при больших расстояниях между границами ($h \gg 1$). Если же $h^* \lesssim 1$, то образуется одна общая область неустойчивости, которая была найдена численно [3] (см. также [7]).

3. Рассмотрим теперь полуограниченную модель, содержащую твердую границу при $z = -h$ и неограниченную по высоте (модель земной атмосферы с неоднородным ветром). Вновь рассмотрим случай $h \gg 1$ и воспользуемся асимптотиками (1.13). Граничное условие при $z = -h$ остается прежним, а при $z \rightarrow \infty$ примем условие излучения, т. е. считаем,

что решение имеет вид бегущей от сдвигового слоя волны (волна считается бегущей к $z = \infty$, если ее групповая скорость направлена в сторону увеличения z). Это условие означает, что один из коэффициентов в (1.13), который соответствует волне, приходящей из бесконечности, следует положить равным нулю. Таким образом получаем однородную систему уравнений относительно c_1 и c_2 , равенство нулю определителя которой приводит к соотношению

$$(3.1) \quad 2i \sin(\pi\gamma) A_1^- A_2^- e^{i\pi\gamma} = (A_1^+ A_2^- - A_1^- A_2^+ e^{2i\pi\gamma}) e^{-4iv(\ln 2 - h)}$$

Учитывая равенство модулей и противоположные знаки фаз у коэффициентов A_1^- и A_1^+ , а также у A_2^- и A_2^+ , заключаем, что соотношение (3.1) справедливо, когда одновременно удовлетворяется равенство

$$(3.2) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + 4v(\ln 2 - h) - 2k\pi = 0$$

обеспечивающее равенство аргументов (с точностью до $2\pi k$) двух слагаемых в уравнении (3.1), и одно из равенств

$$(3.3) \quad \varphi_1 - \varphi_3 + \pi(2m + 1) = 0$$

$$\varphi_1 - \varphi_3 + 2\pi(n + \gamma) = 0$$

дающих равенство модулей слагаемых в том же исходном уравнении (3.1). В соотношениях (3.2), (3.3) k, m, n — целые числа.

Общее решение уравнений (3.2) и (3.3) при фиксированных k, m, n и h определяет на плоскости αJ всего две точки. Меняя k, m, n при фиксированном h , можно получить несколько пар точек, которым соответствуют различные собственные моды.

Таким образом, для полуограниченной модели вместо кривой нейтральной устойчивости с $\operatorname{Re} s = 0$ на плоскости αJ получаются лишь отдельные точки. Это объясняется тем, что в данном случае из-за несимметричности модели величина $\operatorname{Re} s$ вдоль нейтральной кривой не остается постоянной и равной нулю, а непрерывно изменяется. Если над плоскостью αJ ввести ось $\operatorname{Re} s$, то кривая нейтральной устойчивости будет лежать в образовавшемся трехмерном пространстве, а ее пересечение с плоскостью αJ определять две точки, соответствующие решениям (3.2), (3.3), справедливым только при $\operatorname{Re} s = 0$. Эти результаты находятся в хорошем согласии с прямыми численными расчетами [4].

4. Для безграничной в обе стороны модели общее решение (1.12) уравнения ТГ должно удовлетворять условиям излучения при $z \rightarrow \pm \infty$. Это означает, что его асимптотическое представление (1.13) должно содержать лишь те экспоненты, которые соответствуют волнам, убегаящим по z от слоя сдвига. Приравняв нулю коэффициенты при «лишних» экспонентах, получим однородную систему уравнений относительно c_1, c_2 , равенство нулю определителя которой дает

$$(4.1) \quad A_1^+ A_2^+ \sin \pi\gamma = 0$$

Из вида коэффициентов $A_{1,2}^+$ следует, что равенство (4.1) может выполняться при $\gamma \neq 0$ (т. е. $J \neq 1/4$) только в случае, если $\alpha = J = 0$, что согласуется с предельным переходом, обсуждавшимся в п. 2. Этот результат, однако, не означает, что в безграничной модели нарастающей является лишь мода A_0 : нарастающими могут быть и другие моды (см., например, [12]), но для них $\operatorname{Re} s \neq 0$, и поэтому развитый в данной работе аналитический подход к ним неприменим.

5. Анализ модели Дразина для трех различных случаев (с двумя внешними границами, полуограниченной и безграничной) показывает,

что в сдвиговом течении наряду с экспоненциально спадающими модами, локализованными вблизи сдвигового слоя, могут существовать также излучательные моды, если вдали от слоя сдвига жидкость стратифицирована. Этот вывод подтверждается результатами работ [13, 14], в которых исследовалась модель Холмбо с таким же профилем скорости, как и в рассматриваемом случае модели Дразина, но с другим профилем плотности, представляющим собой плавный переход между двумя постоянными значениями плотности при $z = \pm \infty$. Как показано в этих работах, в модели Холмбо нет других мод, помимо экспоненциально спадающих, ибо жидкость на бесконечности однородна.

В случаях, когда вдали от сдвигового слоя имеется стратификация, учет излучательных мод необходим, ибо он приводит к появлению дополнительных зон неустойчивости, число и взаимное расположение которых зависят от наличия одной или обеих внешних границ, а также от расстояния между этими границами (или между одной из них и сдвиговым слоем).

Авторы благодарят П. И. Колыхалова за обсуждение отдельных аспектов данной работы.!

ЛИТЕРАТУРА

1. *Drazin P. G.* The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4. Pt. 2. P. 214—224.
2. *Островский Л. А., Цимринг Л. Ш.* Излучательная неустойчивость сдвиговых течений в стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1981. Т. 17. № 7. С. 766—768.
3. *Einaudi F., Lalas D. P.* The effect of boundaries on the stability of inviscid stratified shear flows // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1976. V. 43. No 2. P. 243—248.
4. *Fritts D. C.* Simple stability limits for vertically propagating unstable modes in a $\tanh(z)$ velocity profile with a rigid lower boundary // *J. Atmos. Sci.* 1980. V. 37. No. 7. P. 1642—1648.
5. *Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш.* Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане // *Нелинейные волны. Самоорганизация* / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича. М.: Наука. 1983. С. 204—239.
6. *Drazin P. G., Howard L. N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // *Advances in Applied Mechanics.* N.Y.: Acad. Press. 1966. V. 9. P. 1—89.
7. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир. 1977. 341 с.
8. *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере. М.: Мир. 1978. 532 с.
9. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 466 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука. 1973. 294 с.
11. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука. 1968. 344 с.
12. *Drazin P. G., Zaturka M. B., Banks H. H.* On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid. Pt 2. Unbounded flow with propagation at infinity // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 95. Pt 4. P. 681—705.
13. *Miles J. W.* On the stability of heterogeneous shear flows. Pt 2 // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 16. Pt 2. P. 209—227.
14. *Романова Н. Н., Цейтлин В. Ю.* Эволюция нелинейного волнового пакета на фоне теряющего устойчивость стратифицированного сдвигового течения // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1983. Т. 19. № 8. С. 796—806.