Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 532.526

ОДНО АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОЙ ЛАМИНАРНОЙ СТРУЕ

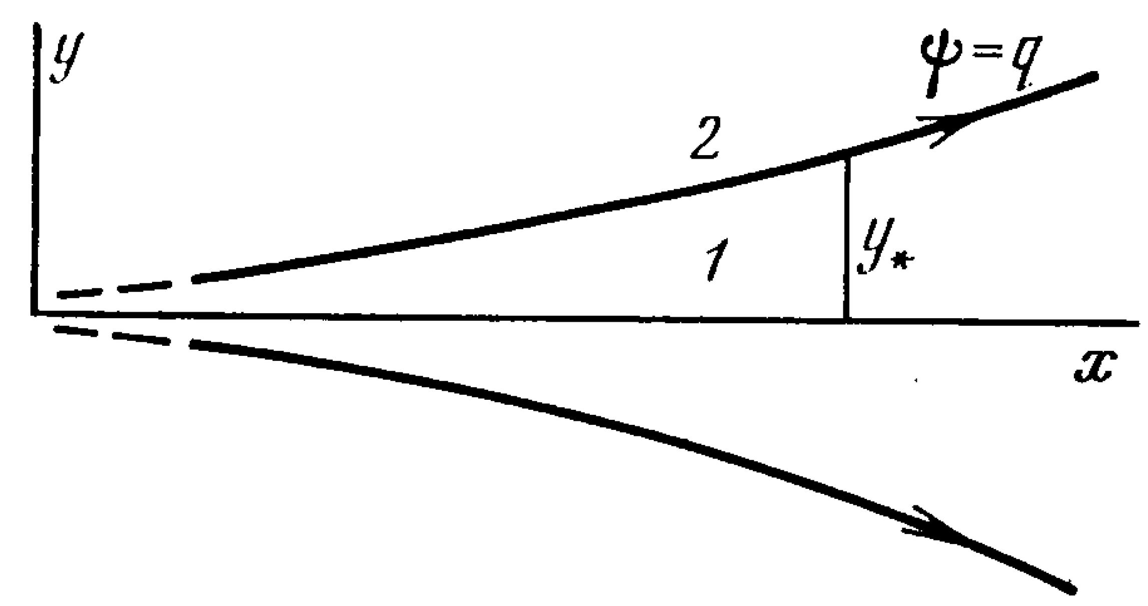
Бурдэ Г. И.

В приближении пограничного слоя рассматривается задача об истечении ламинарной струи, не смешивающейся с окружающей ее жидкостью. Предполагается, что обе жидкости несжимаемы, поверхность их раздела гладкая, струя не разрушается. Получено автомодельное (в переменных Мизеса) решение плоской задачи для специального случая, когда вязкости жидкостей обратно пропорциональны их плотностям.

Ранее эта задача рассматривалась для плоской [1, 2] и осесимметричной струй [3—7] с применением различных вариантов интегрального метода [1, 3, 5, 7], а также с использованием асимптотического метода [2, 4, 6], дающего решение на больших расстояниях от источника.

1. Область течения схематически изображена на фигуре. Величины, относящиеся к истекающей и внешней жидкости, обозначаются индексами 1 и 2. Уравнения движения в приближении пограничного слоя имеют вид

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = \nu_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$



Условия непрерывности скоростей и напряжений на границе раздела в том же приближении, а также условия на оси струи и на бесконечности и интегральные соотношения, выражающие законы сохранения массы и импульса, представляются в виде (ввиду симметрии задачи рассматривается только верхняя полуплоскость)

$$y = y_*(x),\ u_1 = u_2,\ \mu_1 \partial u_1/\partial y = \mu_2 \partial u_2/\partial y \tag{1.2}$$
$$y = 0,\ v_1 = 0,\ \partial u_1/\partial y = 0;\ y \to \infty,\ u_2 = 0$$

$$\int_0^{y_*(x)} \rho_1 u_1\, dy = \frac{Q}{2}, \quad \int_0^{y_*(x)} \rho_1 u_1^2\, dy + \int_{y_*(x)}^{\infty} \rho_2 u_2^2\, dy = \frac{J}{2} \tag{1.3}$$

где Q и J — заданные постоянные величины (расход и импульс струи).

Задачу (1.1)—(1.3) будем решать в переменных Мизеса [8]: $\xi = x$, $\eta = \psi(x, y)$, где ψ — функция тока. Соотношения (1.1)—(1.3) тогда заменятся эквивалентной системой равенств в переменных ξ, η

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \nu_i \frac{\partial}{\partial \eta}\left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial \eta}\right) \tag{1.4}$$

$$\eta = q,\ u_1 = u_2,\ \mu_1 \partial u_1/\partial \eta = \mu_2 \partial u_2/\partial \eta \tag{1.5}$$
$$\eta = 0,\ \partial u_1/\partial \eta = 0$$

$$\rho_1 q = \frac{Q}{2}, \quad \rho_1 \int_0^q u_1\, d\eta + \rho_2 \int_q^{\eta_\infty(\xi)} u_2\, d\eta = \frac{J}{2} \tag{1.6}$$

Здесь q — постоянное значение функции тока на границе раздела жидкостей, $\eta_\infty(\xi)$ — значение функции тока, соответствующее $y \to \infty$ и определяющееся из последнего условия (1.2).

Для преобразования решения к исходным переменным используются соотношения

$$y = \int_0^\eta \frac{dz}{u_1(x, z)}, \quad \eta \leqslant q \tag{1.7}$$

$$y = \int_0^q \frac{dz}{u_1(x, z)} + \int_q^\eta \frac{dz}{u_2(x, z)}, \quad \eta > q$$

обращением которых можно найти $\eta(x, y)$.

2. Будем искать автомодельное решение задачи (1.4)—(1.6) в виде

$$u_i = \xi^{-1/3} f_i(w_i); \quad w_i = \xi^{-1/3}(\eta + b_i) \tag{2.1}$$

где b_i — постоянные. Подставляя (2.1) в уравнения (1.4), получим уравнения для f_i, решения которых

$$f_i = C_i - (6\nu_i)^{-1} w_i^2$$

где C_i — постоянные. Отсюда и из (2.1) получим

$$u_i = C_i \xi^{-1/3} - (6\nu_i \xi)^{-1}(\eta + b_i)^2 \tag{2.2}$$

Для определения постоянных C_1, C_2, b_1, b_2 используем условия (1.5), (1.6). Из последнего условия (1.5) следует $b_1 = 0$. Из остальных условий (1.5) следует

$$C_1 = C_2, \quad q^2/\nu_1 = (q + b_2)^2/\nu_2 \tag{2.3}$$

$$\mu_1 q/\nu_1 = \mu_2 (q + b_2)/\nu_2 \tag{2.4}$$

Условия (2.3) и (2.4) совместны, если выполняется соотношение

$$\nu_2/\nu_1 = \mu_2^2/\mu_1^2, \quad \text{или} \quad \rho_1/\rho_2 = \mu_2/\mu_1 \tag{2.5}$$

Считая условие (2.5) выполненным, определяем из (2.3) постоянную b_2 и находим решение в виде (индекс у постоянной C далее опускаем)

$$u_1 = C\xi^{-1/3} - (6\nu_1 \xi)^{-1}\eta^2 \tag{2.6}$$

$$u_2 = C\xi^{-1/3} - (6\nu_2 \xi)^{-1}(\eta - q + q/\varkappa)^2, \quad \varkappa = \sqrt{\nu_1/\nu_2}$$

Постоянная C определяется из последнего условия (1.6), для применения которого надо найти функцию $\eta_\infty(\xi)$. Из соотношения $u_2(\xi, \eta_\infty) = 0$ получаем

$$\eta_\infty = \sqrt{6C\nu_2}\,\xi^{1/3} + q(1 - \varkappa^{-1}) \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) в (1.6) и используя (2.7), (2.5), придем после ряда преобразований к соотношению

$$^2/_3 \rho_2 \sqrt{6\nu_2}\, C^{3/2} = {}^1/_2 J \tag{2.8}$$

Равенства (2.6), (2.8) и первое равенство (1.6) решают поставленную задачу в переменных ξ, η. Получим решение в исходных переменных, используя формулы (1.7). Выпишем, прежде всего, выражение для полуширины струи

$$y_*(x) = \sqrt{\frac{3\nu_1}{2C}}\, x^{2/3} \ln \frac{\sqrt{6C\nu_1}\, x^{1/3}}{\sqrt{6C\nu_1}\, x^{1/3} - q} \tag{2.9}$$

При $y < y_*$ (жидкость в струе) найдем $y(x, \eta)$ из первой формулы (1.7) и, обращая полученное выражение, придем к формуле

$$\eta_1 = \sqrt{6C\nu_1}\, x^{1/3} \frac{e^\zeta - 1}{e^\zeta + 1}; \quad \zeta = \sqrt{\frac{2C}{3\nu_1}}\, \frac{x}{x^{2/3}} \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в первую формулу (2.6) либо дифференцируя (2.10) по y, найдем

$$u_1 = 4Cx^{-1/3}e^\zeta\,(e^\zeta + 1)^{-2} \tag{2.11}$$

Аналогичным образом, используя вторую формулу (1.7), получим при $y > y_*$

$$\eta_2 = \sqrt{6C\nu_2}\; x^{1/3} \frac{\varphi(x)\, e^{\varkappa\zeta} - 1}{\varphi(x)\, e^{\varkappa\zeta} + 1} + q\,(1 - \varkappa^{-1}) \tag{2.12}$$

$$\varphi(x) = [(\sqrt{6C\nu_1}\; x^{1/3} + q)/(\sqrt{6C\nu_1}\; x^{1/3} - q)]^{1-\varkappa}$$

Отсюда находим

$$u_2 = 4Cx^{-1/3}\varphi(x)e^{\varkappa\zeta}\,[\varphi(x)e^{\varkappa\zeta} + 1]^{-2} \tag{2.13}$$

Выражения для второй компоненты скорости v можно получить из (2.10), (2.12), используя соотношение $v = -\partial\eta/\partial x$.

Таким образом, при выполнении условия (2.5) формулы (2.8)—(2.13) и первая формула (1.6) дают решение поставленной задачи, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой этого решения в уравнения (1.1)—(1.3). Рассматривая асимптотическую форму этого решения при $x \gg 1$, можно получить выражения, совпадающие при условии (2.5) с приведенными в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генкин А. Л., Кукес В. И., Ярин Л. П.* О распространении струи несмешивающихся жидкостей // Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. Алма-Ата: Наука. 1973. Вып. 9. С. 100—104.
2. *Елисеев В. И.* Истечение ламинарных струй несмешивающихся несжимаемых жидкостей // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та. 1976. Вып. 21. С. 31—39.
3. *Yu H., Scheele G. F.* Laminar jet contraction and velocity distribution in immiscible liquid-liquid systems // Intern. J. Multiphase Flow. 1975. V. 2. No. 2. P. 153—169.
4. *Елисеев В. И.* Асимптотическое решение задачи об истечении тяжелых ламинарных струй несмешивающихся жидкостей // ПМТФ. 1977. № 2. С. 78—84.
5. *Penchev I. P., Radev S. P., Rakadjiev R. K.* Velocity profile relaxation of jet in a liquid-liquid system // Теор. и прикл. механика: 3-й Нац. конгр. София: Болг. Акад. науките. 1977. Докл. кн. 1. С. 161—166.
6. *Елисеев В. И., Сухих Л. И., Флеер Л. А.* Асимптотический метод решения задачи об истечении радиальных ламинарных струй несмешивающихся жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 19—26.
7. *Anwar M. M., Bright A., Das T. K., Wilkinson W. L.* Laminar liquid jets in immiscible liquid systems // Trans. Inst. Chem. Eng. 1982. V. 60. No. 5. P. 306—313.
8. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз. 1962. 479 с.

Пермь

Поступила в редакцию
18.VII.1986