Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.36 + 62—50

ОБ ОЦЕНИВАНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.

Решается задача об оптимальной в среднеквадратическом смысле оценке (фильтрации) частично наблюдаемого процесса, заданного линейным стохастическим уравнением Вольтерры. Приводятся численные примеры.

Задача фильтрации для систем с дискретным запаздыванием была предметом многих исследований. Вместе с тем в ряде задач управления, аэроавтоупругости, механики сплошной среды и т. д. при построении моделей различных технических устройств возникают уравнения, в которых для описания эффекта последействия [1—4] используются интегралы Стилтьеса. Такие уравнения содержат в качестве частных случаев и системы с дискретным запаздыванием. Используемый ниже подход к решению задачи фильтрации основан на известном в случае систем с дискретным запаздыванием исследовании двойственной задачи оптимального управления. Существенное отличие рассматриваемого здесь случая состоит в том, что двойственная задача описывается интегральными, а не дифференциальными уравнениями. Это приводит к необходимости развить и использовать иные условия оптимальности двойственной задачи.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача об оптимальной в среднеквадратическом смысле оценке $m(T)$ вектора $x(T)$, описываемого уравнением

$$x(t)=x_0+\int_0^t [d_sK(t,s)]\,x(s)+\int_0^t \sigma_0(s)\,d\xi_0(s) \tag{1.1}$$

$$x(t)\in R_n,\quad t\in[0,T]$$

Наблюдения $y(t)\in R_m$, $0\leqslant t\leqslant T$ удовлетворяют соотношениям

$$dy(t)=A(t)x(t-h)dt+\sigma_1(t)d\xi_1(t),\quad x(s)=0,\quad -h\leqslant s<0 \tag{1.2}$$

Случайный вектор x_0 имеет невырожденное гауссовское распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием, заданной матрицей ковариации $D_0=\mathrm{M}\,x_0x_0'$ (штрих — знак транспонирования) и не зависит от взаимно независимых стандартных винеровских процессов $\xi_0(t)$ и $\xi_1(t)$, размерности которых произвольны. Наличие запаздывания $h\geqslant 0$ в канале измерений (1.2) обусловлено конечностью времени, необходимого для проведения наблюдений и обработки их результатов. Матрицы σ_0, σ_1, A, K кусочно непрерывны, причем элементы матрицы $K(t,s)$ имеют равномерно по $t\in[0,T]$ ограниченную вариацию по $s\in[0,T]$. Первый интеграл в правой части (1.1) понимается в смысле Стилтьеса, а стохастический интеграл — в смысле Ито. Обозначим $N_i=\sigma_i\sigma_i'$. Шум в измерениях (1.2) невырожденный, т. е. матрица $N_1(t)$ равномерно положительно определена. Для дальнейших преобразований удобно считать, что все коэффициенты в (1.1), (1.2) вне интервала $[0,T]$ равны нулю.

Известно, что $m(T)$ равняется условному математическому ожиданию: $m(T)=\mathrm{M}(x(T)/G_T)$ где G_T — минимальная σ-алгебра, порожденная процессом $y(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$. При этом ввиду гауссовости совместного распределения вероятностей процесса $(x(t),y(t))$ справедливо представление [5, 6]

$$m(T) = \int_0^T u(t)\,dy(t) \tag{1.3}$$

(Детерминированная матрица $u(t)$ подлежит определению.)

2. Двойственная задача оптимального управления. Построим такую задачу оптимального управления, решение которой определит ядро $u(t)$ оценки (1.3). Поскольку оценка (1.3) оптимальна в среднеквадратичном, то матрица $u(t)$ должна минимизировать функционал

$$J(u) = \mathrm{M}\left|x(T) - \int_0^T u(t)\,dy(t)\right|^2 \tag{2.1}$$

представляющий собой ошибку оценивания. Преобразуем этот функционал. Представим решение уравнения (1.1) в виде

$$x(t) = \psi(t, 0)\,x_0 + \int_0^t \psi(t, s)\,\sigma_0(s)\,d\xi_0(s) \tag{2.2}$$

Детерминированная матрица $\psi(t, s)$ такова, что $\psi(t, t) = I$, где I — единичная матрица, $\psi(t, s) = 0$ при $s > t$ и

$$\psi(t, s) = I + \int_{s+0}^t [d_\tau K(t, \tau)]\,\psi(\tau, s), \quad s \leqslant t$$

Подставим (2.2), (1.2) в (2.1):

$$J(u) = \mathrm{M}\Big|\psi(t, 0)\,x_0 + \int_0^T \psi(T, s)\,\sigma_0(s)\,d\xi_0(s) -$$
$$-\int_0^T u(t)\left[A(t)\left(\psi(t-h, 0)\,x_0 + \int_0^{t-h} \psi(t-h, s)\,\sigma_0(s)\,d\xi_0(s)\right)dt +\right.$$
$$\left. + \sigma_1(t)\,d\xi_1(t)\right]\Big|^2$$

и введем в рассмотрение матрицу

$$\alpha(s) = \psi(T, s) - \int_{s+h}^T u(t)\,A(t)\,\psi(t-h, s)\,dt, \quad \alpha(T) = I \tag{2.3}$$

В силу (2.3) и свойств стохастических интегралов Ито получим (tr — след матрицы)

$$J(u) = \mathrm{M}\left|\alpha(0)\,x_0 + \int_0^T \alpha(s)\,\sigma_0(s)\,d\xi_0(s) - \int_0^T u(t)\,\sigma_1(t)\,d\xi_1(t)\right|^2 = \tag{2.4}$$
$$= \mathrm{tr}\left[\alpha(0)\,D_0\alpha'(0) + \int_0^T (\alpha(t)\,N_0(t)\,\alpha'(t) + u(t)\,N_1(t)\,u'(t))\,dt\right]$$

Таким образом, задача определения наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки величины $x(T)$ сведена к задаче (2.3), (2.4) оптимального управления детерминированным матричным процессом $\alpha(t)$ при квадратичном критерии качества (2.4). После того как оптимальное управление $u_0(t)$ задачи (2.3), (2.4) найдено, наилучшая оценка $m(T)$ величины $x(T)$ определяется формулой (1.3) при $u(t) = u_0(t)$, а ошибка оценивания равняется $J(u_0)$.

Замечания. 1°. Аналогичный метод применялся [7] при решении задачи оптимальной фильтрации для стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием. Другой подход к фильтрации линейных интегральных уравнений предложен в [8]. Отметим еще, что подобно [9] можно записать двойственную задачу управления вида (2.3), (2.4) и для случая нескольких запаздываний в канале измерений, а также при профильтрованных (окрашенных) или коррелированных возмущениях ξ_0 и ξ_1.

2°. Если в уравнениях (1.1), (1.2) положить

$$h = 0, \quad K(t, s) = \int_0^s B(\tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

то получается постановка задачи фильтрации Калмана — Бьюси [5]. Укажем, как уравнения фильтра Калмана — Бьюси получаются из приведенных выше соотношений. При выполнении условий (2.5) функции ψ в представлении (2.2) переходит в фундаментальную матрицу обыкновенного дифференциального уравнения $x^\cdot = Bx$. Уравнение (2.3) для процесса $\alpha(t)$ принимает вид

$$\alpha^\cdot(t) = -\alpha(t) B(t) + u(t) A(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \alpha(T) = I \tag{2.6}$$

Решение линейно-квадратичной задачи (2.6), (2.4) показывает, что выражение (1.3) есть формула Коши для решения $m(t)$ уравнения

$$dm(t) = (B - DA_1)\, m dt + DA' N_1^{-1} dy(t), \quad m(0) = 0$$

Величина $J(u_0) = \operatorname{tr} D(T)$, где $D(t) = \mathrm{M}\,(x(t) - m(t))\,(x(t) - m(t))'$, причем для $D(t)$ справедливо матричное уравнение Риккати.

3. Решение двойственной задачи. Для построения матрицы $u_0(t)$ исследуем задачу оптимального управления (2.3), (2.4). Пусть вначале $h \geqslant T$. Тогда, как следует из (2.4), процесс $\alpha(s) = \psi(T, s)$ и не зависит от управления $u(t)$. Значит, оптимальное управление $u_0(t) = 0$. Поэтому в силу (1.3), (2.4) оптимальная оценка $m(T)$ и ошибка оценивания $J(u_0)$ удовлетворяют соотношениям

$$m(T) = 0, \quad T \leqslant h \tag{3.1}$$

$$J(u_0) = \operatorname{tr}\left[\psi(T, 0) D_0 \psi'(T, 0) + \int_0^T \psi(T, t) N_0(t) \psi'(T, t)\, dt\right]$$

Пусть теперь $h < T$. Из (2.3) видно, что в этом случае при $s \in [T - h, T]$ процесс $\alpha(s)$ не зависит от управления и определяется соотношением $\alpha(s) = \psi(T, s)$, а при $s \in [0, T - h]$ зависит от управления $u(t)$ только при $t \in [h, T]$. Следовательно, $u_0(t) = 0$ при $t \in [0, h)$ и функционал (2.4) можно представить в виде

$$J(u) = \operatorname{tr}\left[\int_{T-h}^{T} \psi(T, s) N_0(s) \psi'(T, s)\, ds + \alpha(0) D_0 \alpha'(0) + \right. \tag{3.2}$$

$$\left. + \int_0^{T-h} \alpha(s) N_0(s) \alpha'(s)\, ds + \int_h^T u(s) N_1(s) u'(s)\, ds\right]$$

Решение задачи минимизации функционала (3.2) на траекториях системы (2.3) (см. ниже) показывает, что $u_0(t)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма

$$u_0(\tau + h) = \left[R(T, \tau) - \int_0^{T-h} u_0(t + h) A(t + h) R(t, \tau)\, dt\right] \times \tag{3.3}$$

$$\times A'(\tau + h) N_1^{-1}(\tau + h), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T - h$$

$$R(t, \tau) = \mathrm{M} x(t) x'(\tau) = \psi(t, 0) D_0 \psi'(\tau, 0) + \tag{3.4}$$

$$+ \int_0^{\min(t, \tau)} \psi(t, s) N_0(s) \psi'(\tau, s)\, ds$$

($R(t, \tau)$ — корреляционная матрица процесса $x(t)$, определяемая в силу (2.2)). Решение уравнения (3.3), определяющего оптимальную оценку, существует и единственно.

Для вывода уравнения (3.3) используем необходимое условие оптимальности [10], состоящее в следующем. Пусть $u_0(t)$ — оптимальное управление задачи (2.3), (3.2). Введем управление

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v, \ t \in (\tau, \tau+\varepsilon], & h < \tau < \tau+\varepsilon < T \\ u_0(t), & t \in [h, T] \setminus (\tau, \tau+\varepsilon] \end{cases}$$

Здесь v — произвольная постоянная матрица такого же размера, что и u_0. Тогда необходимое условие оптимальности заключается в неотрицательности функционала

$$J_1(u_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\,[J(u_\varepsilon) - J(u_0)]$$

Вычислим $J_1(u_0)$. Пусть $\alpha_0(s)$ и $\alpha_\varepsilon(s)$ — процессы, определяемые соотношением (2.3) при управлении $u_0(t)$ и $u_\varepsilon(t)$ соответственно. На основании (2.3)

$$\frac{1}{\varepsilon}[J(u_\varepsilon) - J(u_0)] = \operatorname{tr}\Big[(\alpha_\varepsilon(0) + \alpha_0(0))\,D_0 q_\varepsilon'(0) + \\ + \int_0^{\tau+\varepsilon} (\alpha_\varepsilon(s) + \alpha_0(s))\,N_0(s)\,q_\varepsilon'(s)\,ds + \int_\tau^{\tau+\varepsilon} (vN_1(s)\,v' - u_0(s)\,N_1(s)\,u_0'(s))\,ds\Big]$$

$$q_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha_\varepsilon(s) - \alpha_0(s)) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (v - u_0(t))\,A(t)\,\psi(t-h, s)\,dt$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q_\varepsilon(s) = -(v - u_0(\tau))\,A(\tau)\,\psi(\tau-h, s)$$

Следовательно

$$J_1(u_0) = \operatorname{tr}[(v - u_0(\tau))\,N_1(\tau)\,(v - u_0(\tau))' + 2\,(u_0(\tau)\,N_1(\tau) - \\ - S(\tau)\,A'(\tau))\,(v - u_0(\tau))'] \geqslant 0$$

$$S(\tau) = \alpha_0(0)\,D_0\psi'(\tau-h, 0) + \int_0^{\tau-h} \alpha_0(s)\,N_0(s)\,\psi'(\tau-h, s)\,ds$$

Для справедливости этого неравенства при любом $\tau \in [h, T]$ и произвольной постоянной матрице v необходимо и достаточно, чтобы оптимальное управление имело вид

(3.5) $$u_0(\tau) = S(\tau)\,A'(\tau)\,N_1^{-1}(\tau)$$

Подставляя (2.3) при $\alpha(s) = \alpha_0(s)$, $u(s) = u_0(s)$ в (3.5), с учетом (3.4) получим (3.3).

Таким образом, справедливость уравнения (3.3) для функции $u_0(t)$ установлена. Существование решения уравнения (3.3) вытекает из существования функции $u_0(t)$ как ядра в оценке (1.3).

Получим для $u_0(t)$ некоторое представление. Рассмотрим матрицу

$$B(T, \tau) = \mathrm{M}\,(x(T) - m(T))\,(x(\tau) - m(\tau))' = R(T, \tau) - B_1(T, \tau) - \\ - B_2(T, \tau)$$

$$B_1(T, \tau) = \mathrm{M}m(T)\,x'(\tau), \quad B_2(T, \tau) = \mathrm{M}\,(x(T) - m(T))\,m'(\tau)$$

Так как

$$B_1(T, \tau) = \int_0^{T-h} u_0(t+h)\,A(t+h)\,R(t, \tau)\,dt$$

$$B_2(T, \tau) = \mathrm{M}\,[\mathrm{M}\,(x(T) - m(T)/G_T]\,m'(\tau) = 0$$

то из (3.3) вытекает справедливость представления

$$u_0(\tau) = B(T, \tau-h)\,A(\tau)\,N_1^{-1}(\tau), \quad h \leqslant \tau \leqslant T$$

решения уравнения (3.3) при условии, что решение этого уравнения единственно.

Докажем единственность решения уравнения (3.3). Пусть $\Delta u(t)$ — разность двух различных решений уравнения (3.3). Тогда

$$\Delta u(\tau+h) + \int_0^{T-h} \Delta u(t+h)\,A(t+h)\,R(t, \tau)\,dt A'(\tau+h)\,N_1^{-1}(\tau+h) = 0$$

Умножая это соотношение справа на $N_1(\tau+h)\,\Delta u'(\tau+h)$, а затем интегрируя по $\tau \in [0, T-h]$, получим равенство нулю суммы двух интегралов. Так как они оба неотрицательны, то каждый из них должен равняться нулю. В частности, при почти всех $\tau \in [h, T]$ имеем $\Delta u(\tau) N_1(\tau) \Delta u'(\tau) = 0$. Отсюда $\Delta u(\tau) = 0$ почти всюду на $[h, T]$. Следовательно, решение уравнения (3.3) единственно.

Таким образом, оптимальное управление задачи (2.3), (3.2) равно нулю при $s \in [0, h]$, а при $s \in [h, T]$ является единственным решением уравнения (3.3).

В некоторых случаях решение уравнения (3.3) можно получить в явном виде. Пусть, например, $N_0 = 0$, т. е. уравнение (1.1) не содержит случайных возмущений. Будем искать решение уравнения (3.3) в виде

$$u_0(t) = \psi(T, 0) F \psi'(t - h, 0) A'(t) N_1^{-1}(t) \tag{3.6}$$

Для определения матрицы F подставим (3.6) в (3.3). Получим с учетом (3.4) при $N_0 = 0$ уравнение, решение которого

$$F = (D_0^{-1} + Q)^{-1} \tag{3.7}$$

$$Q = \int_0^{T-h} \psi'(t, 0) A_1(t + h) \psi(t, 0)\, dt, \quad A_1 = A' N_1^{-1} A$$

Оптимальная оценка при $N_0 = 0$ определяется выражением (1.3) с ядром (3.6), (3.7). Соответствующая ошибка оценивания равняется

$$J(u_0) = \operatorname{tr}[\psi(T, 0) F \psi'(T, 0)] \tag{3.8}$$

Представляет интерес вопрос о зависимости ошибки оценивания от величины запаздывания h в наблюдениях. Поскольку измерения (1.2) на отрезке $[0, h]$ не несут никакой информации о процессе (1.1), то ошибка оценивания как функция h не убывает с ростом h, $0 \leqslant h \leqslant T$ и постоянна по h при $h \geqslant T$. Формула (3.8) подтверждает это. Действительно, из этой формулы при постоянной матрице A_1 следует, что

$$\partial J(u_0)/dh = \operatorname{tr}[\psi(T, 0) F \psi'(T - h, 0) A_1 \psi(T - h, 0) F \psi'(T, 0)] \geqslant 0$$

Отметим, что в ситуациях, отличных от (1.1), (1.2), увеличение запаздывания h в канале наблюдения может приводить к уменьшению $J(u_0)$, т. е. к увеличению точности оценивания [7].

4. Численное решение задачи фильтрации. Различные эффективные процедуры нахождения численных решений уравнений Фредгольма вида (3.3) изложены во многих руководствах (например, [11]).

Рассмотрим численное решение задачи построения оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки для частично наблюдаемого процесса $(x(t), y(t))$, заданного уравнениями

$$x^{\cdot}(t) = a \int_0^t x(s)\, ds + \sigma_0 \xi_0^{\cdot}(t); \quad x(0) = x_0; \quad t \in [0, T] \tag{4.1}$$

$$y^{\cdot}(t) = x(t - h) + \xi_1^{\cdot}(t); \quad x(s) = 0, \quad s < 0; \quad h \in [0, T] \tag{4.2}$$

Здесь a и σ_0 — произвольные постоянные, x_0 — гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией, $\xi_0(t)$ и $\xi_1(t)$ — независимые между собой и от x_0 стандартные винеровские процессы.

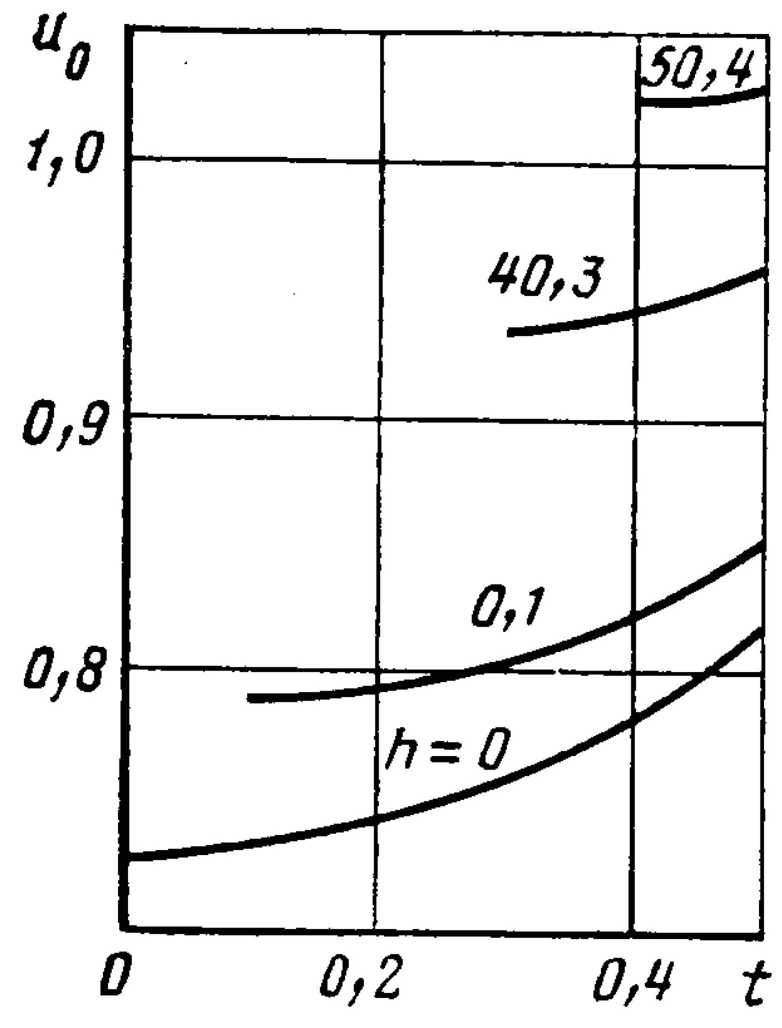
Интегрируя (4.1), получим

$$x(t) = x_0 + a \int_0^t (t - s)\, x(s)\, ds + \sigma_0 \xi_0(t) \tag{4.3}$$

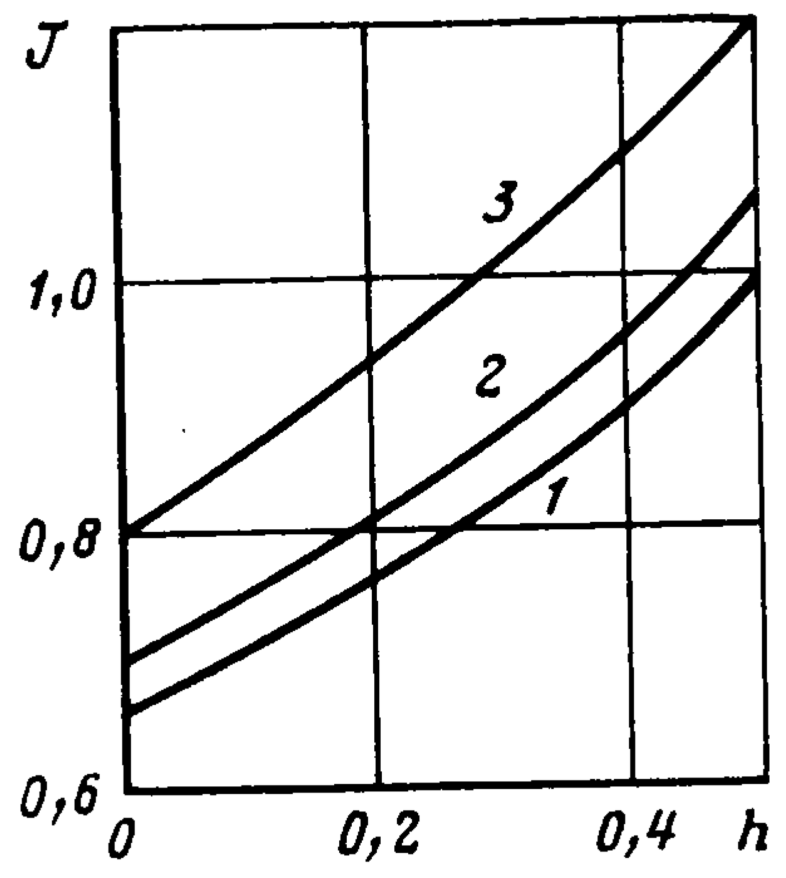
Уравнение (3.3) для системы (4.3), (4.2) имеет вид

$$u_0(\tau + h) = R(T, \tau) - \int_0^{T-h} u_0(t + h) R(t, \tau)\, dt \tag{4.4}$$

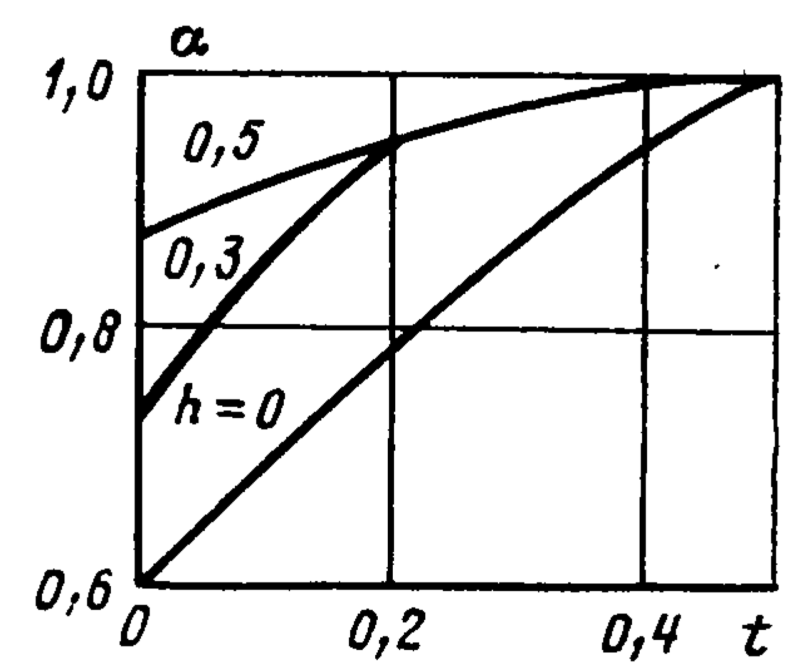
Корреляционная функция $R(t, \tau)$ определяется соотношением (3.4), в котором $D_0 = 1$, $N_0 = \sigma_0^2$, а функция $\psi(t, s)$ из представления (2.2), в зависимости от знака



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

коэффициента a равна

$$\psi(t, s) = \begin{cases} \operatorname{ch} \sqrt{a}\,(t-s), & a \geqslant 0 \\ \cos \sqrt{|a|}\,(t-s), & a < 0 \end{cases}$$

Уравнение (4.4) решалось методом последовательных приближений. В качестве начального приближения использовалось аналитическое решение уравнения (4.4) при $\sigma_0 = 0$

$$u_0(t) = \psi(T, 0)\,\psi(t-h, 0)\left[1 + \int\limits_0^{T-h} \psi^2(s, 0)\,ds\right]^{-1}, \quad t \in [h, T]$$

Вычисления проводились при постоянном $T = 1/2$ и значениях коэффициента $a = -1, 0, 1$. На фиг. 1 представлены графики функции $u_0(t)$ при $t \in [h, T]$, $\sigma_0 = 0{,}1$ для различных значений h. На фиг. 2 дана зависимость ошибки оценивания J от величины запаздывания h при $a = 0$ и трех значениях σ_0: $\sigma_0 = 0$; $\sigma_0 = 0{,}1$; $\sigma_0 = 0{,}4$ (кривые *1*, *2*, *3* соответственно). На фиг. 3 при $\sigma_0 = 0$ и разных значениях h показаны графики вспомогательного управляемого процесса $\alpha(t)$, $t \in [0, T]$, зависящего от управления только при $t \in [0, T-h]$. Для двух других значений σ_0^2 вид графиков аналогичен.

Замечание об экстраполяции. Задача экстраполяции состоит в наилучшей в среднеквадратическом смысле оценке вектора $x(T_1)$ в момент $T_1 > T$ по измерениям $y(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Эта задача сводится к задаче фильтрации. Для этого положим $A_0(t) = A(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и $A_0(t) = 0$ при $t > T$. Рассмотрим теперь вспомогательную задачу фильтрации вектора $x(T_1)$ (удовлетворяющего уравнению (1.1) при $0 \leqslant t \leqslant T_1$) по результатам измерений (1.2) на отрезке $[0, T_1]$, причем в уравнении (1.2) вместо $A(t)$ стоит $A_0(t)$. Тогда ввиду независимости x_0, ξ_0, ξ_1 решение вспомогательной задачи фильтрации будет одновременно и решением исходной задачи экстраполяции. Поэтому соотношения, определяющие решение задачи экстраполяции, получаются из соответствующих формул пп. 2, 3, всюду в которых T заменено на T_1, а $A(t)$ на $A_0(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Астапов И. С., Белоцерковский С. М., Качанов Б. О., Кочетков Ю. А.* О системах интегродифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде // Дифференц. уравнения. 1982, Т. 18, № 9. С. 1628—1637.
2. *Гоглновский С. А., Иванов В. А.* Устройства запаздывания и их применение в автоматических системах. М.: Машиностроение. 1966. 280 с.
3. *Van Trees H. L.* Delection, estimation, and modulation theory. N. Y.: Wiley, 1971. 281 p.
4. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Системы с последействием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1984. № 1. С. 5—35.

5. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука. 1974. 696 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка. 1968. 354 с.
7. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука. 1978. 351 с.
8. *Kleptsina M. L., Veretennikov A. Yu.* On filtering and properties of conditional laws of Ito — Volterra processes // Statistics and control of stochastic processes. Steklow seminar. Moscow. 1984. N. Y.: Optimization Software Inc. Publ. Divis. 1985. P. 179—196.
9. *Колмановский В. Б., Мейзенберг Т. Л.* Оптимальные оценки состояния системы и некоторые задачи управления уравнениями с последействием // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 446—456.
10. *Shaikhet L. E.* On optimal control of Volterra's equations // Probl. of Control and Inform. Theory. 1984. V. 13, No. 3. P. 141—152.
11. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка. 1986. 543 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.IX.1986