

УДК 531.38 : 539.3

АНИЗОТРОПНО-УПРУГИЙ ШАР В СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ

Новиков В. В.

Найдены поправки к компонентам тензора инерции вращающегося шара в случае малой анизотропии его упругих свойств общего вида. На конкретных примерах обсуждаются особенности поведения свободно вращающегося шара, обусловленные собственной упругостью. Без предположения о малости анизотропии вычислена деформация шара, имеющего плоскость изотропии.

В задаче о движении твердого деформируемого тела вокруг центра масс при упрощающих предположениях, что частоты собственных колебаний тела намного превосходят угловую скорость вращения, а силы внутреннего трения обеспечивают достаточно быстрое затухание собственных колебаний, было показано [1, 2], что учет собственной упругости тела равносильно действию на него момента, пропорционального четвертой степени компонент угловой скорости и вычисляемого по решению квазистатической задачи о деформировании вращающегося тела.

Момент, отвечающий влиянию собственной упругости, был вычислен [3] для тела, близкого по форме к шару. Рассматриваемый в данной работе однородный анизотропно-упругий шар в свободном движении служит еще одним примером, когда решение этой задачи можно получить аналитическим путем. Представление о поведении данной системы может оказаться полезным при рассмотрении вопросов движения Земли в связи с гипотезой, что Земля имеет черты сложного кристалла [4].

Представим тензор напряжений в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} + c_{ijnm} u_{nm}$$

где u_{ij} — тензор деформации, λ и μ — постоянные Ламе, u_i — компоненты вектора деформации. Тензор упругих постоянных c_{ijnm} удовлетворяет следующим условиям симметрии [5]:

$$c_{ijnm} = c_{jinm} = c_{ijmn} = c_{nmij}$$

и в самом общем случае анизотропного линейно-упругого тела имеет 21 независимую компоненту.

Будем рассматривать лишь близкие к эйлеровым движения деформируемого тела. Это возможно, если оно достаточно жестко, а возникающие упругие колебания тела быстро затухают [2]. Упругие постоянные таковы, что выполняются неравенства

$$(1) \quad \varepsilon \ll \delta \ll 1 \quad (\varepsilon = \rho R^2 / (\mu t_*^2))$$

где ρ — плотность, R — радиус шара, t_* — характерное время движения шара как целого, δ — отношение наибольшей из упругих постоянных c_{ijnm} к μ ($c_{ijnm} = \mu \delta a_{ijnm}$).

Представим вектор деформации $u(\mathbf{r}, t)$ в виде ряда по малым параметрам ε и δ и ограничимся в нем лишь первыми членами

$$u(\mathbf{r}, t) = \varepsilon [u_0(\mathbf{r}, t) + \delta u_1(\mathbf{r}, t)]$$

В предположениях (1) упругие деформации $u_0(\mathbf{r}, t)$ и $u_1(\mathbf{r}, t)$ можно вычислять в системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с недеформированным шаром [3].

Вектор деформации $u(\mathbf{r}, t)$ определяется в результате решения следующих задач.

1°. Задача о деформировании вращающегося однородного изотропного шара

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial \sigma_{ij} / \partial x_j &= f_i \quad \text{в } V; \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{на } S \\ \sigma_{ij} &= \kappa \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_l} \delta_{ij} + \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\mu} \\ \mathbf{f} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

($\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности). Здесь и в дальнейшем в качестве масштабных множителей приняты R , t_* , M — масса шара.

2°. Задача вычисления $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ по известному $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$

$$(3) \quad \begin{aligned} \kappa \frac{\partial u_{il}^1}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial u_{ij}^1}{\partial x_j} &= - a_{ijmn} \frac{\partial u_{mn}^0}{\partial x_j} \quad \text{в } V \\ (\kappa u_{il}^1 \delta_{ij} + 2u_{ij}^1) x_j &= - a_{ijmn} u_{mn}^0 x_j \quad \text{на } S \\ u_{ij}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \right), \quad u_{ij}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ при учете упругих свойств тела определяется в результате решения уравнения

$$\mathbf{K}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0$$

где компоненты вектора кинетического момента \mathbf{K} (с учетом лишь линейных по \mathbf{u} членов) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} K_l &= I_{lm} \omega_m \\ I_{lm} &= \int_V [(x_k^2 + 2x_k u_k) \delta_{lm} - (x_l x_m + 2x_l u_m)] dV = I_{lm}^0 + \varepsilon (I'_{lm} + \delta I''_{lm}) \end{aligned}$$

Воспользуемся решением задачи (2), приведенным в [3]. В декартовой системе координат имеем

$$\begin{aligned} u_{01} &= x_1 \left[\omega^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 \right) + \omega_1^2 \frac{1}{2} \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \right] - \\ &- (x_2 \omega_1 \omega_2 + x_3 \omega_1 \omega_3) \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi_1 + \frac{1}{2} \left(3\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ &\times \left. [(x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) - 2\xi_1 x_1^2] + x_1 x_2 x_3 \omega_2 \omega_3 \left(5\xi_1 - \frac{1}{2} \right) - \right. \\ &- \left. x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \omega^2 \left(\frac{\xi_1}{3} + \xi_2 \right) + \right. \\ &+ \left. \omega_1^2 x_1 \left[\xi_1 x_1^2 + \frac{1}{4} (1 - 6\xi_1) (x_2^2 + x_3^2) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} x_1 [x_2^2 \omega_2^2 + x_3^2 \omega_3^2] (10\xi_1 - 1) \right] \\ \xi_1 &= \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)} \end{aligned}$$

Циклическая перестановка x_1, x_2, x_3 и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ дает u_{02}, u_{03} .

Решение задачи (3) предваряет вычисление выражений, стоящих в правых частях уравнений и краевых условий. Эти выражения ввиду громоздкости не приводятся.

Воспользовавшись тем, что $\partial u_{mn}^0 / \partial x_j$ линейны по x_1, x_2, x_3 , а $u_{mn}^0 x_j$ содержит линейные и кубические члены по пространственным координатам, представим задачу (3) в следующей форме:

$$(4) \quad (\kappa + 1) \text{grad div } \mathbf{u}_1 + \Delta \mathbf{u}_1 = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 \quad \text{в } V$$

$$(5) \quad \left[\kappa \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_l} \delta_{ij} + \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right] x_j = b_{ij} x_j + b_{inkl} x_1^n x_2^k x_3^l; \\ n + k + l = 3 \quad \text{на } S$$

Входящие в эти соотношения величины a_{ij} , b_{ij} , b_{ijkl} включают в себя в общем случае 21 упругую постоянную a_{ijnm} .

Исходя из уравнений и краевых условий (4), (5) можно заключить, что $u_1(\mathbf{r}, t)$ следует отыскивать в виде многочленов

$$u_1 = A_n x_n + B_{kmpr} x_1^k x_2^m x_3^p$$

$$n, k, m, p = 1, 2, 3; \quad k + m + p = 3$$

Необходимо определить 39 величин A_{in} и B_{ikmp} .

После подстановки u_1 в уравнение (4), приравняв нулю члены, стоящие при x_1 , x_2 , x_3 , получим 9 уравнений. Краевые условия (5) дают 3 соотношения, выполняющиеся на поверхности шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Каждое из них можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^3 x_i [D_{i0} + x_1^2 D_{i1} + x_2^2 D_{i2} + x_3^2 D_{i3}] + x_1 x_2 x_3 D_4 = 0$$

где D_{ij} , D_4 содержат неизвестные коэффициенты разложений A_{in} , B_{ikmp} и параметры a_{ijklm} . Потребовав, чтобы в выражении в квадратных скобках выделялось уравнение поверхности шара, а выражение, стоящее при $x_1 x_2 x_3$, обращалось в нуль, получим еще 30 алгебраических уравнений.

Система 39 уравнений, из которой определяются величины A_{in} , B_{ipkm} , разбиваются на 4 группы уравнений. В каждую из групп входят коэффициенты, вычисляемые независимо от других и определяющие соответственно добавки к диагональным компонентам тензора инерции I_{ii}'' и к центробежным моментам инерции I_{12}'' , I_{13}'' , I_{23}'' .

Решение задачи (4), (5) приводит к следующим выражениям для поправок к компонентам тензора инерции:

$$I_{11}'' = 2/35 \{ \omega^2 [\varepsilon_1 a_{1111} + \varepsilon_4 (a_{1122} + a_{1133}) + \varepsilon_9 (a_{1212} + a_{1313}) + \varepsilon_{14} (a_{2222} + a_{3333}) + \varepsilon_{17} a_{2233} + \varepsilon_{19} a_{2323}] + \omega_1^2 [\varepsilon_2 a_{1111} + \varepsilon_5 (a_{1122} + a_{1133}) + \varepsilon_{10} (a_{1212} + a_{1313}) + \varepsilon_{15} (a_{2222} + 2a_{2233} + a_{3333})] + \omega_2^2 [\varepsilon_6 a_{1122} + \varepsilon_7 a_{1133} + \varepsilon_{10} a_{1212} + \varepsilon_{16} a_{2222} + \varepsilon_{18} a_{2233} + (\varepsilon_{15} + 1/2 \varepsilon_{29}) a_{3333} + (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{2323}] + \omega_3^2 [\varepsilon_7 a_{1122} + \varepsilon_6 a_{1133} + \varepsilon_{10} a_{1313} + (\varepsilon_{15} + 1/2 \varepsilon_{29}) a_{2222} + \varepsilon_{18} a_{2233} + \varepsilon_{16} a_{3333} + (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{2323}] + \omega_1 \omega_2 [\varepsilon_3 a_{1112} + \varepsilon_{11} a_{1222} + \varepsilon_{12} a_{1233} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{1323}] + \omega_1 \omega_3 [\varepsilon_3 a_{1113} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{1223} + \varepsilon_{12} a_{1322} + \varepsilon_{11} a_{1333}] + \omega_2 \omega_3 [\varepsilon_8 a_{1123} + 2\varepsilon_{10} a_{1213} + \varepsilon_{13} (a_{2223} + a_{2333})] \}$$

$$I_{12}'' = -1/35 \{ -\omega^2 [(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}) (a_{1112} + a_{1222}) - \varepsilon_{26} a_{1233} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{1323}] + \omega_1^2 [(\varepsilon_{21} + 1/2 \varepsilon_{25}) a_{1112} + \varepsilon_{21} a_{1222} + (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{28}) a_{1233}] + \omega_2^2 [\varepsilon_{21} a_{1112} + (\varepsilon_{21} + 1/2 \varepsilon_{25}) a_{1222} + (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{28}) a_{1233}] + \omega_3^2 [\varepsilon_{22} (a_{1112} + a_{1222}) + \varepsilon_{27} a_{1233} + 2\varepsilon_{28} a_{1323}] + \omega_1 \omega_2 [\varepsilon_{20} (a_{1111} + 2a_{1122} + a_{2222}) + \varepsilon_{24} (a_{1133} + a_{2233}) + \varepsilon_{25} a_{1212} + \varepsilon_{28} (a_{1313} + a_{2323}) + \varepsilon_{29} a_{3333}] + \omega_1 \omega_3 [\varepsilon_{23} a_{1123} + (\varepsilon_{25} - \varepsilon_{28}) a_{1213} + (\varepsilon_{23} - \varepsilon_{28}) (a_{2223} + a_{2333})] + \omega_2 \omega_3 [\varepsilon_{23} a_{1322} + (\varepsilon_{23} - \varepsilon_{28}) (a_{1113} + a_{1333}) + (\varepsilon_{25} - \varepsilon_{28}) a_{1223}] \}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{11}{72} - \frac{3}{2} \xi_1 + \frac{7}{3} \xi_3 + \frac{61}{6} \xi_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 - 12\xi_2^2 - 140\xi_3^2$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{11}{24} + \frac{9}{2} \xi_1 + 7\xi_3 - \frac{61}{2} \xi_1^2 + 12\xi_1 \xi_2$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{2}{3} + 2\xi_1 + 42\xi_3 - 12\xi_1^2 + 24\xi_1 \xi_2$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_4 &= \frac{91}{36} - \frac{91}{4} \xi_1 + 49\xi_3 + \frac{4}{9} \xi_1^2 + \frac{2''}{3} \xi_1 \xi_2 - 56\xi_2^2 - 280\xi_3^2 \\
\varepsilon_5 &= -\frac{43}{24} + \frac{107}{4} \xi_1 + 14\xi_3 - \frac{86}{3} \xi_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_6 &= -\frac{49}{24} + \frac{83}{4} \xi_1 + 14\xi_3 + \frac{52}{3} \xi_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_7 &= -\frac{41}{24} + \frac{83}{4} \xi_1 + 7\xi_3 + 10\xi_1^2 \\
\varepsilon_8 &= -\frac{2}{3} + 14\xi_3 + \frac{44}{3} \xi_1^2 + 8\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_9 &= 8 \left(\frac{1}{9} \xi_1^2 - \frac{1}{3} \xi_1 \xi_2 - 2\xi_2^2 \right) \\
\varepsilon_{10} &= 4\xi_1 (2\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_1) \\
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{3} + 14\xi_1 - 6\xi_1^2 + 24\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{3} + 28\xi_1 - 14\xi_3 - \frac{22}{3}\xi_1^2 + 8\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{3} - 2\xi_1 + 14\xi_3 + 18\xi_1^2 + 24\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_{14} &= \frac{35}{6} - \frac{455}{18} \xi_1 - \frac{49}{6} \xi_3 - \frac{4}{3} \xi_1^2 - 8\xi_1 \xi_2 - 12\xi_2^2 \\
\varepsilon_{15} &= -\frac{11}{12} + \frac{25}{2} \xi_1 + \frac{7}{2} \xi_3 - 10\xi_1^2 \\
\varepsilon_{16} &= -\frac{5}{8} + 9\xi_1 + \frac{21}{2} \xi_3 + \frac{23}{2} \xi_1^2 + 12\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_{17} &= \frac{77}{36} - \frac{511}{18} \xi_1 - \frac{49}{3} \xi_3 - \frac{8}{9} \xi_1^2 - 8\xi_2^2 - 560\xi_3^2 - \\
&\quad - \frac{16}{3} \xi_1 \xi_2 - 140\xi_2 \xi_3 \\
\varepsilon_{18} &= -\frac{17}{12} + 19\xi_1 + 14\xi_3 + \frac{34}{3} \xi_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 \\
\varepsilon_{19} &= -\frac{16}{9} (\xi_1 + 3\xi_2)^2, \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{4} (1 - 14\xi_1)^2 \\
\varepsilon_{21} &= \frac{1}{4} - \frac{7}{2} \xi_1 + 14\xi_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{4} - \frac{7}{6} \xi_1 - 18\xi_1^2 \\
\varepsilon_{23} &= 2\xi_1 (14\xi_1 - 1), \quad \varepsilon_{24} = \frac{1}{2} - 12\xi_1 + 70\xi_1^2 \\
\varepsilon_{25} &= 2(1 - 2\xi_1 + 6\xi_1^2), \quad \varepsilon_{26} = -\frac{7}{12} + \frac{7}{2} \xi_1 - 14\xi_3 - \\
&\quad - \frac{8}{3} \xi_1^2 - 8\xi_1 \xi_2, \quad \varepsilon_{27} = -\frac{9}{4} - \frac{7}{2} \xi_1 + 142\xi_1^2 \\
\varepsilon_{28} &= 4\xi_1^2, \quad \varepsilon_{29} = \frac{1}{4} - 5\xi_1 + 25\xi_1^2
\end{aligned}$$

Выражения для остальных поправок к компонентам тензора инерции получаются в результате циклической перестановки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и индексов 1, 1, 2, 3 в a_{ijkl} (при этом используются свойства симметрии).

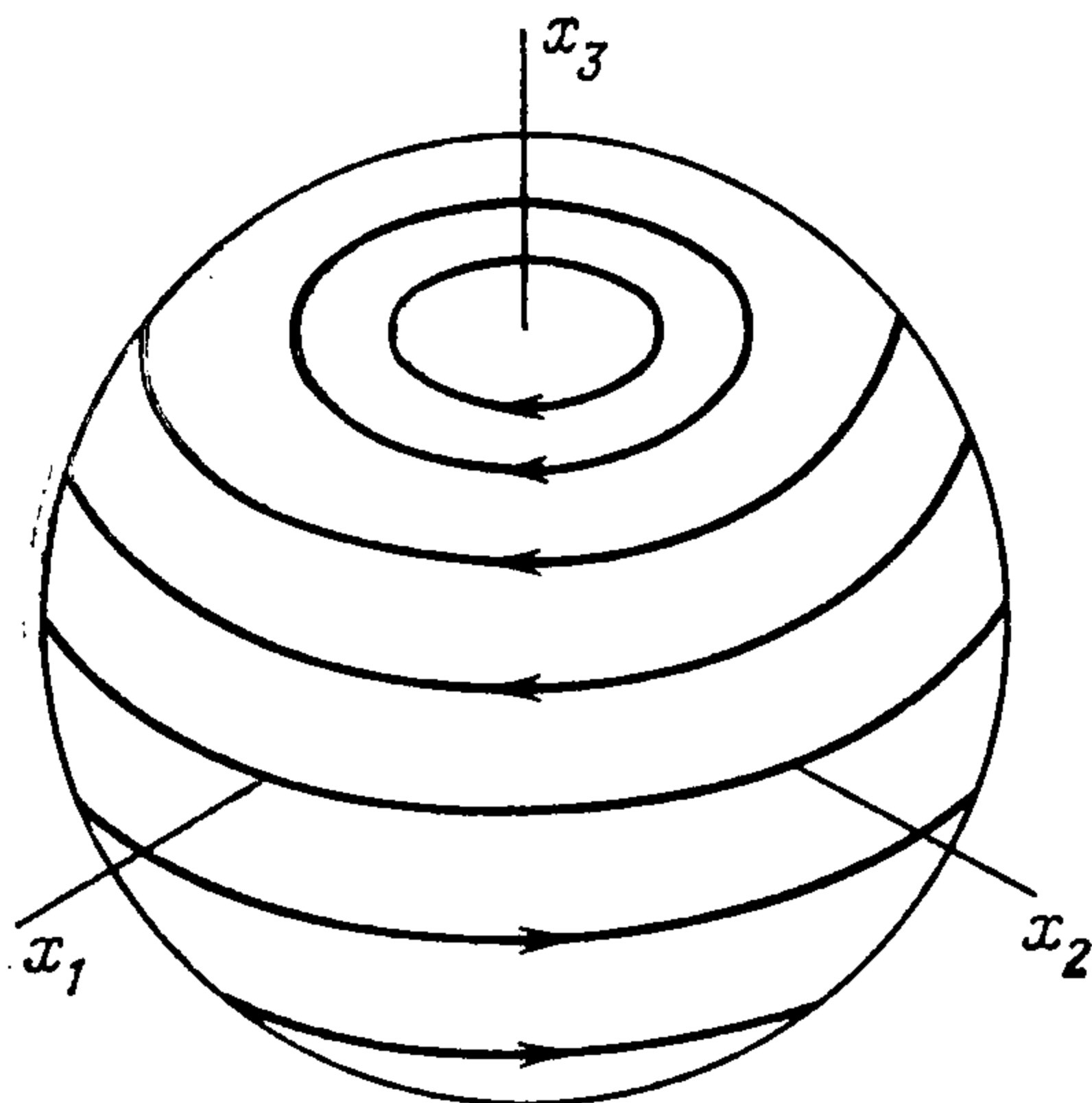
Тензор инерции анизотропного упругого шара имеет вид

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= I_{ij}^\circ + \varepsilon (I_{ij}' + \delta I_{ij}''); \quad I_{ij}^\circ = \frac{2}{5} \delta_{ij} \\
I_{ij}' &= \frac{2}{35} \left[\omega^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{\xi_1}{3} + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \delta_{ij} + (1 - \xi_1) \omega_i \omega_j \right]
\end{aligned}$$

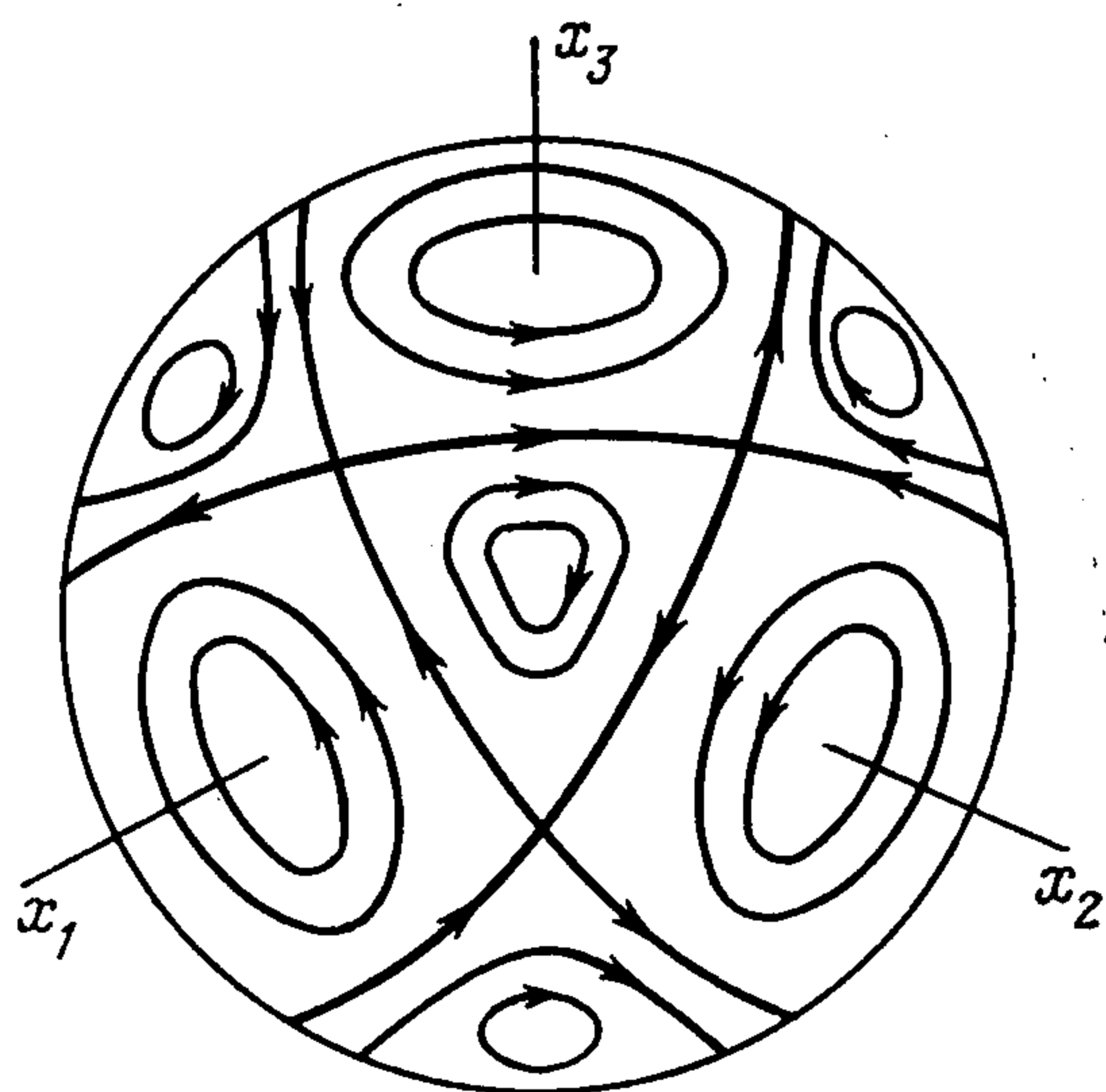
где I_{ij}° — тензор инерции недеформируемого шара, I_{ij}' — поправка к тензору инерции, связанная с деформацией u_0 .

Величины I_{ij}', I_{ij}'' — квадратичные функции компонент угловой скорости. Компоненты вектора кинетического момента и энергию тела представим в виде [3]

$$\begin{aligned}
(6) \quad K_p &= I_{pq} \omega_q = I_{pq}^\circ \omega_q + \varepsilon (K'_{pqlm} + \delta K''_{pqlm}) \omega_q \omega_l \omega_m \\
E &= \frac{1}{2} I_{pq}^\circ \omega_p \omega_q + \frac{3}{4} \varepsilon (K'_{pqlm} + \delta K''_{pqlm}) \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m
\end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

По результатам, приведенным в работе, можно вычислить компоненты тензоров K'_{pqlm} и K''_{pqlm} . Компоненты тензора K''_{pqlm} ввиду громоздкости здесь не приводятся, а для K'_{pqlm} имеет место следующее соотношение:

$$K'_{pqlm}\omega_p\omega_q\omega_l\omega_m = \frac{4}{35} \left[\frac{1}{3} - \frac{\xi_1}{3} + 2\xi_2 + 14\xi_3 \right] \omega^4$$

Интегралы уравнений Эйлера $E = \text{const}$ и $K^2 = \text{const}$ позволяют аналогично случаю твердого тела или упругого квазишара [3] сделать заключение о характере движения тела по годографу вектора ω относительно тела, который определяется по пересечению центрально-симметричной поверхности четвертого порядка $E = \text{const}$ со сферическими поверхностями $\frac{4}{3}E - \frac{1}{2}K^2/I_0 = \text{const}$, отвечающими различным K^2 .

Проиллюстрируем результаты на следующих двух примерах.

1°. Шар, в упругих свойствах которого имеется плоскость изотропии. Все направления в плоскостях, нормальных к оси Ox_3 , эквивалентны в отношении упругих свойств и тело изотропно в этих плоскостях. В общем случае анизотропные свойства тела характеризуются следующими параметрами [6]:

$$a_{1133} = a_{2233} = a, \quad a_{1313} = a_{2323} = b, \quad a_{3333} = c$$

Интерес представляет «нешаровая» часть выражения $K''_{pqlm}\omega_p\omega_q\omega_l\omega_m$, которая имеет вид

$$\begin{aligned} & \omega_3^4 [aQ_1 + bQ_2 + cQ_3] + \omega_3^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) [a(Q_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{25}) + b(Q_2 - \\ & - \varepsilon_{25}) + c(Q_3 + \frac{1}{4}\varepsilon_{25})] \\ & Q_1 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - 2\varepsilon_{15} - \varepsilon_{17}, \quad Q_2 = \varepsilon_9 + \varepsilon_{10} - \varepsilon_{19} \\ & Q_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{14} - \varepsilon_{15} \end{aligned}$$

Можно убедиться, что при любых значениях параметра $\kappa \in [0, \infty)$ (коэффициент Пуассона $0 \leq \sigma < 0,5$) $\varepsilon_{25} > 0$, $Q_1 > 0$, а величины Q_2 и Q_3 отрицательны, при этом $Q_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{25} > 0$, $Q_3 + \frac{1}{4}\varepsilon_{25} < 0$.

Пусть $a = b = 0$, $c > 0$. Поверхность коэффициентов напряжения [6] является эллипсоидом вращения, тело наиболее податливо в плоскости Ox_1x_2 . Из соотношений (6) находим, что при постоянном K^2 вращению вокруг Ox_3 отвечает наибольшая энергия. Принимая во внимание диссипацию энергии, заключаем, что асимптотически устойчивым будет вращение вокруг осей, лежащих в плоскости Ox_1x_2 .

Годограф вектора ω относительно тела представлен на фиг. 1.

Аналогично можно провести рассмотрение при произвольных значениях параметров a , b , c .

2°. Шар, упругие свойства которого обладают симметрией куба. Анизотропия характеризуется следующими параметрами:

$$\begin{aligned} & a_{1122} = a_{1133} = a_{2233} = a, \quad a_{1212} = a_{1313} = a_{2323} = b \\ & a_{1111} = a_{2222} = a_{3333} = c \end{aligned}$$

«Нешаровая» часть выражения $K''_{pqlm}\omega_p\omega_q\omega_l\omega_m$ имеет вид

$$(1 - 2\xi_1 + 6\xi_1^2)(c - a - 2b)(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_3^2)$$

При $c = a + 2b$ она обращается в нуль, что отвечает изотропному упругому телу. Пусть $a \geq 0$ и (или) $b \geq 0$, $c = 0$. Поверхность коэффициентов напряжения, имеющая симметрию куба, ориентирована так, что оси системы координат $Ox_1x_2x_3$ проходят через центры граней «куба», т. е. в направлении этих осей тело наиболее податливо.

Фиксируя величину вектора кинетического момента, вычисляя отвечающие ей угловые скорости при различных стационарных вращениях шара, устанавливаем, что энергия E минимальна при ориентации ω на середины граней кубической поверхности коэффициентов напряжения (фиг. 2). Как и в предыдущем примере, заключаем, что асимптотически устойчивым будет лишь вращение вокруг осей наибольшей податливости.

Таким образом, наблюдается полная аналогия в поведении свободно вращающегося анизотропного упругого шара, рассмотренного в данной работе, и однородного изотропного упругого квазишара, изучавшегося в работе [3].

Рассмотрение проведено в предположении малой анизотропии упругих свойств тела, что привело к существенному упрощению задачи и позволило вычислить поправки к компонентам тензора инерции. Если отказаться от этого предположения ($\delta \sim 1$), то при анизотропии упругих свойств общего вида задача не разрешается из-за трудностей вычислительного характера, хотя в ряде простейших случаев эти трудности преодолимы.

В заключение, не предполагая анизотропию малой, вновь рассмотрим свободно вращающийся шар, в упругих свойствах которого имеется плоскость изотропии. Решается квазистатическая задача вида (2)

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = f_i \quad \text{в } V; \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{на } S$$

Здесь $\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} u_{kl}$. Отличны от нуля следующие компоненты тензора λ_{ijkl} :

$$\begin{aligned} \lambda_{1111} = \lambda_{2222} = \kappa + 2, \quad \lambda_{1122} = \kappa, \quad \lambda_{1212} = 1 \\ \lambda_{1133} = \lambda_{2233} = a, \quad \lambda_{1313} + \lambda_{2323} = b, \quad \lambda_{3333} = c \end{aligned}$$

Вектор деформации отыскивается в виде многочлена

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = q_n x_n + r_{kmr} x_1^k x_2^m x_3^p \\ n, k, m, p = 1, 2, 3; \quad k + m + p = 3 \end{aligned}$$

Вычисление величин, входящих в это выражение, дает

$$\begin{aligned} q_{13} = q_{23}, \quad q_{11} = q_{22}, \quad q_{31} = q_{32} \\ r_{1300} = r_{2030}, \quad r_{1120} = r_{2210}, \quad r_{1102} = r_{2012} \\ r_{1030} = r_{2300}, \quad r_{1012} = r_{2102}, \quad r_{1210} = r_{2120} \\ r_{3201} = r_{3021}, \quad r_{3102} = r_{3012}, \quad r_{1201} = r_{2021} \\ r_{1021} = r_{2201}, \quad r_{1003} = r_{2003}, \quad r_{3300} = r_{3030} \\ r_{3120} = r_{3210}, \quad r_{1111} = r_{2111}, \quad r_{1300} = r_{1120} \\ r_{1210} = -\frac{a}{4b(\kappa+1)} \left[\frac{1}{2} (1+b) \Omega^2 + (2+3b) w_1 \right] \\ r_{1012} = -\frac{b}{4} \Omega^2 - \frac{3}{2} w_1 \\ r_{1030} = \frac{1}{12(\kappa+1)} \left[\frac{a(1+b)}{2b} \Omega^2 + \left(\frac{a(2+3b)}{b} - 4(\kappa+1) \right) w_1 \right] \\ r_{3111} = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2} (1+b) \Omega^2 + (2+3b) w_1 \right] \\ w_1 = q_{12} + q_{21} = -\frac{\Omega^2}{2} \frac{(\kappa+1) [(a+4b)(1+b) - 2b^3] - a^2(1+b)}{(\kappa+1)(2a+8b+3ab+6b^2) - a^2(2+3b)} \\ r_{1021} = \frac{1}{2(3+b)} [(b-3)r_{1111} - 2w_2] \end{aligned}$$

$$r_{1201} = \frac{a^2 - \kappa c}{2[(\kappa + 2)c - a^2]} r_{1111}$$

$$r_{3120} = -\frac{1}{2b(3+b)} [2w_2 + b(b+1)r_{1111}]$$

$$r_{3102} = \frac{a}{a^2 - (\kappa + 2)c} r_{1111}$$

$$r_{1003} = -\frac{w_2}{3b} + \frac{a}{3[(\kappa + 2)c - a^2]} r_{1111}$$

$$r_{3300} = -\frac{w_2}{3b} + \frac{a^2 - \kappa c}{6[a^2 - (\kappa + 2)c]} r_{1111}$$

$$r_{1111} = \frac{\sqrt{2}(3+b)}{4b} \omega_3 \Omega + \frac{4+b}{b} w_2$$

$$w_2 = b(q_{31} + q_{13}) = \frac{\sqrt{2}(3+b)}{4b} \omega_3 \Omega \left[\frac{(\kappa + 2)c - a^2}{(2b+3)(\kappa c - a^2) + 3c(b+1)} - \frac{4+b}{b} \right]^{-1}$$

$$r_{1102} = -\frac{1}{2a(a+2b)} \left[\frac{a}{2} \Omega^2 - b\omega_3^2 - 8(\kappa + 2)br_{1300} + 3(a+b)cr_{3003} \right]$$

$$r_{3201} = -\frac{1}{2a(a+2b)} \times$$

$$\times \left[\frac{a}{2} \Omega^2 + (a+b)\omega_3^2 + 8(\kappa + 2)(a+b)r_{1300} - 3bcr_{3003} \right]$$

$$q_{11} = \frac{1}{4(a+2b)[(\kappa + 1)c - a^2]} \left\{ \frac{a}{2}(c - 2a)\Omega^2 + [c(a+b) + 2ab]\omega_3^2 + 4[2b(\kappa + 2)(2a - c) + c(a+2b)] \times \right.$$

$$\times r_{1300} + 3bc(2a - c)r_{3003} \left. \right\}$$

$$q_{33} = \frac{1}{2(a+2b)[(\kappa + 1)c - a^2]} \left\{ \frac{a}{2}[2(\kappa + 1) - a]\Omega^2 - [2b(\kappa + 1) + a(a+b)]\omega_3^2 + 4[2ab(\kappa + 2) - a(a+2b) - 4b(\kappa + 1)(\kappa + 2)]r_{1300} + 3bc[a - 2(\kappa + 1)]r_{3003} \right\}$$

$$r_{1300} = \frac{3}{2w_3} \left\{ \frac{\Omega^2}{2} [2a^2(a - 2b) - c(a(a+b) + 2(a-b)(\kappa + 1) + c^2(\kappa + 1 + b))] + \omega_3^2 [-4a^2b + c(a(b-a) + 4b(\kappa + 1)) + c^2(\kappa + 1 + b)] \right\}$$

$$r_{3003} = \frac{1}{w_3} \left\{ \frac{\Omega^2}{2} [8(\kappa + 1)(\kappa + 2)b + 4a(\kappa + 2)(b - a) + 2a(2b + a - 4ab + a^2) + c(a + 4(\kappa + 1)(\kappa + 2) + 2(\kappa + 2)(3b - a))] + \omega_3^2 [2a^2(a - b) - 4ab(\kappa + 2) - c(a+b)(2\kappa + 3)] \right\}$$

$$w_3 = 3 \left\{ -4a^2[a(a+2b) - 4b(\kappa + 2)] + 2c[2a(a+b) + 3] - 8b(\kappa + 1)(\kappa + 2) + ab(3a - 2) + c^2[b - 6b + 2] - 4(\kappa + 1)(\kappa + 2) \right\}$$

Здесь принято, что $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \Omega$. Величины $q_{12}, q_{21}, q_{13}, q_{31}$ но вычислить рассмотрев совместно соотношения $w_1 = q_{12} + q_2 = q_{13} + q_{31}$ и условие отсутствия в системе $Ox_1x_2x_3$ движений т целого $\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV = 0$ [3].

Приведенные выражения для q_{ij}, r_{ijkl} позволяют найти поперечную инерцию, обусловленную анизотропией упругих свойств

по формулам

$$I_{11}' = I_{22}' = \frac{2}{35} \{7(q_{11} + q_{33}) + 4r_{1300} + 3r_{3003} + r_{1102} + 2r_{3201}\}$$

$$I_{33}' = \frac{2}{35} \{7q_{11} + 4r_{1300} + r_{1102}\}$$

$$I_{12}' = -\frac{1}{35} \{7w_1 + 6r_{1030} + 2r_{1210} + 2r_{1012}\}$$

$$I_{13}' = I_{23}' = -\frac{1}{35} \{7w_2 + 3r_{3300} + 3r_{1003} + r_{3120} + r_{1021} + r_{3102} + r_{1201}\}$$

Представление о качественных особенностях динамики шара дает исследование случая малой анизотропии.

Автор благодарит Г. Г. Денисова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Влияние собственной упругости и диссипации на движение твердого тела относительно центра масс // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО АН СССР. 1979. Вып. 41. С. 118—122.
2. Егармин Н. Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 43—48.
3. Денисов Г. Г., Новиков В. В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 43—50.
4. Зигель Ф. Ю. Вам, земляне. М.: Недра. 1983. 160 с.
5. Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высш. шк. 1979. 432 с.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Гостеориздат. 1950. 300 с.

Горький

Поступила в редакцию
31.III.1986