Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.36

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НОСИТЕЛЯ ДИНАМИЧЕСКИ НЕСБАЛАНСИРОВАННЫХ И АСИММЕТРИЧНЫХ МАХОВИКОВ В ИНЕРЦИОННОЙ СРЕДЕ

Коноплев В. А.

С использованием методов работ [1—5] предлагается вывод уравнений движения тела-носителя в инерционной жидкости при условии динамической несбалансированности и асимметрии несомых маховиков, сочетающих в себе точность учета инерционных эффектов и компактность матричной записи с удобством оформления вычислительных процедур на базе современного матобеспечения ЭВМ, без обращения к скалярным равенствам. На основании полученных уравнений формулируется задача определения программного вращения маховиков, обеспечивающего требуемое движение носителя при условии его существования.

Полученные уравнения могут использоваться как для прямого исследования движения вибростенда при условии, что положение, инерционные характеристики и режимы движения известны, так и для определения перечисленных выше характеристик, обеспечивающих заданное движение стенда (задача управления).

Для простоты обозначим одним символом $E_k = (O_k, [e^k])$ твердые тела системы и связанные с ними декартовы системы координат с началом O_k и ортонормированным базисом $[e^k] = (e_1{}^k, e_2{}^k, e_3{}^k)$, $e_1{}^k = \| 1, 0, 0 \|^T$, $e_2{}^k = \| 0, 1, 0 \|^T$, $e_3{}^k = \| 0, 0, 1 \|^T$, так что E_0 — инерциальная система координат, E_1 — корпус носителя, E_p $(p = 2, 3, \ldots, n)$ — испытуемые приборы, установленные на E_1, E_s $(s = 2, 3, \ldots, m)$ — маховики, в том числе и те, что, возможно, установлены на испытуемых приборах.

Динамический винт такой системы в E_0 записывается в виде

$$Z_0{}^0 = \mathbf{L}_1{}^{00} Z_1{}^1, \quad \mathbf{L}_1{}^{00} : E_0 \to E_1 \tag{1}$$

$$Z_1{}^1 = \mathbf{K}_1{}^1 V_1{}^{01} + \sum_{s=1}^{m} \mathbf{L}_s{}^{11} \Theta_s{}^s f_s \varphi_s^{\cdot} \tag{2}$$

$$\mathbf{K}_1{}^1 = \Theta_1{}^1 + \sum_{p=2}^{n} \mathbf{L}_p{}^{11} \Theta_p{}^p \mathbf{L}_p^{11,\,T} + \sum_{s=1}^{m} \mathbf{L}_s{}^{11} \Theta_s{}^s \mathbf{L}_s^{11,\,T} + \Lambda_{11}^{11} + \Lambda_{p1}^{p1}$$

Здесь $Z_1{}^1$ — тот же винт в E_1; $\mathbf{L}_1{}^{00} = \mathbf{T}_1{}^{00} [C_1{}^0]$ — матрица (6×6) положения в E_0 [1], причем

$$\mathbf{T}_1{}^{00} = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ \langle O_1{}^0 \rangle^0 & E \end{Vmatrix}, \quad [C_1{}^0] = \begin{Vmatrix} C_1{}^0 & 0 \\ 0 & C_1{}^0 \end{Vmatrix} \tag{3}$$

где $\langle O_1{}^0 \rangle^0$ — кососимметрическая матрица (3×3), порожденная вектором $O_1{}^{00}$ положения O_1 в E_0 и базисе $[e^0]$; E — единичная матрица (3×3); $C_1{}^0 = C_3(\psi_1) C_2(\theta_1) C_1(\varphi_1)$ — матрица (3×3) ориентации $[e^1]$ в $[e^0]$, $([e^1] = [e^0] C_1{}^0)$ — простейшая матрица (3×3) вращения с ортом $e_i{}^1$ $(i = 1, 2, 3)$ на угол α; $q = \| O_1{}^{00}, \psi_1, \theta_1, \varphi_1 \|^T \in R_6$ — вектор обобщенных координат E_1. Выше принята «корабельная» последовательность вращения. При использовании «самолетных» или эйлеровых углов следует принять $C_1{}^0 = C_2(\psi_1) C_3(\theta_1) C_1(\varphi_1)$ или $C_1{}^0 = C_3(\psi_{11}) \cdot C_1(\varphi_1) C_3(\psi_{12})$ соответственно [1, 6].

В (2) использованы следующие обозначения: $\Theta_1{}^1$, $\Theta_p{}^p$, $\Theta_s{}^s$ — матрицы (6×6) инерции Мизеса E_1, E_p и E_s [1]; $\Lambda_{11}{}^{11}$, $\Lambda_{p1}{}^{p1}$ — матрицы (6×6)

присоединительных масс E_1 и E_p, вычисленные в E_1 [2]; $\mathbf{L}_k^{11}$: $E_1 \to E_k$ ($k = p, s$) аналогично (3), причем в матрицах $C_s^1 = C_3(\psi_s)\, C_2(\theta_s)\, C_1(\varphi_s)$, величины ψ_s, θ_s — постоянные углы ориентации маховиков E_s в $[e^1]$, φ_s — углы вращения маховиков, O_s^{11} — векторы положения маховиков E_s в E_1 и базисе $[e^1]$; $V_1^{01} = \| v_1^{01}, \ \omega_1^{01} \|^T$ — вектор квазискоростей E_1; $f_s = \| 0, e_1^s \|^T \in R_6$, e_1^s — орт оси вращения маховиков E_s на угол φ_s.

Левый нижний $\langle r_c^s \rangle^s m_s$ и правый верхний $\langle r_c^s \rangle^{s,T} m_s$ (3×3) — блоки матриц $\boldsymbol{\Theta}_s^s$ определяют часть инерционных эффектов, обусловленных динамической несбалансированностью маховиков ($r_c^{ss} \in E_s$ — радиус-вектор центра масс маховика в E_s и базисе $[e^s]$), вторая часть указанных эффектов обусловлена динамической асимметрией маховиков ($\theta_{22}^s \neq \theta_{33}^s$ — моменты инерции в матрице θ_s^s тензора инерции, являющейся правым нижним (3×3) блоком матрицы $\boldsymbol{\Theta}_s^s$). Используя теорему об изменении кинетического винта системы с учетом (1), получаем [1]

$$Z_1^{1*} + \boldsymbol{\Phi}_1^{01} Z_1^1 = F_1^1 \tag{4}$$

$$Z_1^{1*} = \mathbf{K}_1^1 V_1^{01*} + \mathbf{K}_1^{1*} V_1^{01} + \sum_{s=2}^{m} \mathbf{L}_s^{11} \boldsymbol{\Theta}_s^s f_s \varphi_s^{\cdot\cdot} + \sum_{s=2}^{m} \mathbf{L}_s^{11} [\langle e_1^s \rangle]\, \boldsymbol{\Theta}_s^s f_s \varphi_s. \tag{5}$$

$$\mathbf{K}_1^{1*} = \sum_{s=2}^{m} \mathbf{L}_s^{11} ([\langle e_1^s \rangle]\, \boldsymbol{\Theta}_s^s - \boldsymbol{\Theta}_s^s [\langle e_1^s \rangle])\, \mathbf{L}_s^{11,T} \varphi_s^{\cdot} \tag{6}$$

$$F_1^1 = P_1^1 + \sum_{p=2}^{n} \mathbf{L}_p^{11} P_p^p + \sum_{s=2}^{m} \mathbf{L}_s^{11} P_s^s \tag{7}$$

Здесь $[\langle e_1^s \rangle]$ — блочно-диагональная матрица (6×6) с блоками $\langle e_1^s \rangle$ на главной диагонали; P_k^k ($k = 1, p, s$) — сумма динамических винтов внешних сил, действующих на E_k в E_k (вес, Архимед, аэродинамика, гидродинамика и т. п.) [2]; $\boldsymbol{\Phi}_1^{01}$ — матрица (6×6) со строками (3×6) вида $\| \langle \omega_1^0 \rangle^1 \mid 0 \|$, $\| \langle v_1^0 \rangle^1 \mid \langle \omega_1^0 \rangle^1 \|$; $*$ — символ производной в связанной с телом системе координат E_1.

При выводе соотношений (4)—(6) использовано уравнение кинематики

$$\mathbf{L}_s^{11*} = \mathbf{L}_s^{11} \boldsymbol{\Phi}_s^{1s} = \mathbf{L}_s^{11} [\langle e_1^s \rangle]\, \varphi_s^{\cdot}$$

Подставляя соотношения (5) и (6) в (4), после преобразований получаем уравнение движения в инерционной жидкости тела, несущего динамически несбалансированные и асимметричные маховики в квазискоростях

$$\mathbf{K}_1^1 V_1^{01*} + \mathbf{M}_1^1 V_1^{01} + \sum_{s=2}^{m} (\mathbf{I}_s \varphi_s^{\cdot\cdot} + \mathbf{J}_s \varphi_s^{\cdot}) = F_1^1 \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbf{M}_1^1 = \boldsymbol{\Phi}_1^{01} \mathbf{K}_1^1 + \mathbf{K}_1^{1*}, \quad \mathbf{I}_s = \mathbf{L}_s^{11} \boldsymbol{\Theta}_s^s f_s \tag{9}$$

$$\mathbf{J}_s = (\boldsymbol{\Phi}_1^{01} \mathbf{L}_s^{11} + \mathbf{L}_s^{11} [\langle e_1^s \rangle]\, \varphi_s^{\cdot})\, \boldsymbol{\Theta}_s^s f_s$$

Используя уравнения кинематики [2, 3, 5]

$$V_1^{01} = \mathbf{A}_1^{01} q_1^{0\cdot}, \quad V_1^{01} = \mathbf{A}_1^{01} q_1^{0\cdot\cdot} + \mathbf{D}_1^{01} q_1^{0\cdot} \tag{10}$$

преобразуем уравнение (8) к виду

$$\mathbf{I}_1^0 q_1^{0\cdot\cdot} + \mathbf{J}_1^0 q_1^{0\cdot} + \mathbf{I} q^{\cdot\cdot} + \mathbf{J} q^{\cdot} = F_1^1 \tag{11}$$

$$\mathbf{I}_1^0 = \mathbf{K}_1^1 \mathbf{A}_1^{01}, \quad \mathbf{J}_1^0 = \mathbf{K}_1^1 \mathbf{D}_1^{01} + \mathbf{M}_1^1 \mathbf{A}_1^{01}$$

$$\mathbf{I} = \| \mathbf{I}_2 \mid \mathbf{I}_3 \mid \ldots \mid \mathbf{I}_m \|$$

$$\mathbf{J} = \| \mathbf{J}_2 \mid \mathbf{J}_3 \mid \ldots \mid \mathbf{J}_m \|$$

$$q^{\cdot} = \| \varphi_2^{\cdot}, \varphi_3^{\cdot}, \ldots, \varphi_m^{\cdot} \|^T, \quad q^{\cdot\cdot} = \| \varphi_2^{\cdot\cdot}, \varphi_3^{\cdot\cdot}, \ldots, \varphi_m^{\cdot\cdot} \|^T$$

Таким образом, наличие на носителе динамически несбалансированных и асимметричных маховиков приводит к следующим изменениям в уравнениях движения свободного твердого тела [1]: увеличению матрицы Мизеса носителя Θ_1^1 на сумму матриц Θ_s^s, пересчитанных операторами $\mathbf{L}_s^{11}$ в E_{11} (второе соотношение (2)); аналогичному эффекту в слагаемом $\mathbf{\Phi}_1^{01}\mathbf{K}_1^1$ матрицы M_1^1 (9); появлению в матрице $\mathbf{M}_1^1$ матрицы $\mathbf{K}_1^{1*}$, учитывающей инерционные эффекты, связанные с динамическими несбалансированностью и асимметричностью маховиков (6); появлению слагаемых типа $\mathbf{I}q^{\cdot\cdot}$, $\mathbf{J}q^{\cdot}$. Наличие инерционной среды приводит к увеличению матрицы инерции системы $\mathbf{K}_1^1$ (2) на матрицы присоединительных масс корпуса и приборов.

Анализ перечисленных изменений в уравнениях (8), (11) показывает, что движение носителя в инерционной среде при условии динамической несбалансированности маховиков принципиально отличается от движения обычного гиростата (без учета указанных факторов [7, 8]). Выбрав в последнем случае ($r_c^{ss} \equiv 0$, $\mathbf{\Lambda}_{11}^{11} = 0$) в качестве E_1 центральные оси инерции всей системы, получим два матричных (3×3) уравнения, моделирующих независимые поступательное и вращательное движения гиростата. Практический интерес обычно представляет последнее [7, 8].

При наличии инерционной среды и динамической несбалансированности маховиков поступательное и вращательное движения носителя оказываются инерционно неотделимыми при любом выборе связанных систем координат. Наличие двух последних матриц в матрице $\mathbf{K}_1^1$ (2) и матрицы $\mathbf{K}_1^{1*}$ (6) в матрице $\mathbf{M}_1^1$ (9) приводит к тому, что движение по любой из обобщенных координат q_1^0 через как угодно малое время возбуждает движение по остальным координатам этого вектора. Эффект остается в силе и в частных случаях (только инерционная среда или только динамическая несбалансированность маховиков). Заметим, что все указанные слагаемые в уравнениях (8), (11) имеют колебательный характер (через матрицы $\mathbf{L}_3$) с переменной частотой, зависящей от частот вращения маховиков.

Используя уравнение (11), можно получить математическую формулировку задачи управления колебательным движением носителя за счет инерционного воздействия вращающихся динамически несбалансированных маховиков [8, 9].

Перепишем уравнение (11) в виде

$$\mathbf{I}q^{\cdot\cdot} + \mathbf{J}q^{\cdot} = P(t), \quad P(t) = F_1^1 - \mathbf{I}_1^0 q_1^{0\cdot\cdot}(t) - \mathbf{J}_1^0 q_1^{0\cdot}(t) \tag{12}$$

где $q_1^0(t)$ — заданное движение носителя.

Если $\dim q < 6$ (количество маховиков < 6), то задача не имеет решения (исключая какие-либо частные случаи движения $q_1^0(t)$). Если $\dim q = 6$, то задача имеет единственное решение там, где $\det I \neq 0$.

Пусть $\dim q = l > 6$. В этом случае задача определения нужного закона изменения вектора $q(t)$ сводится к классической задаче теории оптимального управления, методы решения которой хорошо разработаны. Разобьем вектор q на две части, составленные из шести зависимых координат $q_+ \in R_6$ и $l - 6$ независимых координат $q_- \in R_{l-6}$, $q = \| q_-, q_+\|^T$. Выберем в качестве вектора управления вектор ускорений независимых координат (которыми можно распоряжаться по своему усмотрению) $u = q_-^{\cdot\cdot}$. Формулировка указанной задачи в этом случае там, где $\det \mathbf{I}_- \neq 0$, имеет вид

$$x^{\cdot} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{13}$$

$$x = \|q, q^{\cdot}\|^T, \quad J(x, u) \to \min$$
$$u = q_-^{\cdot\cdot}, \quad x(t) \in E_x, \quad u(t) \in E_u$$
$$f(x, u, t) = \| q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot} \|^T = \| q^{\cdot}, q_-^{\cdot\cdot}, \ q_+^{\cdot\cdot} \|^T =$$
$$= \| q^{\cdot}, u, \mathbf{I}_+^{-1} (P(t) - \mathbf{I}_- u - \mathbf{J} q^{\cdot}) \|^T$$

Здесь $\mathbf{I}_+$, $\mathbf{I}_-$ — части матрицы $\mathbf{I}$, соответствующие частям $q_+^{\cdot\cdot}$, $q_-^{\cdot\cdot}$ вектора $q^{\cdot\cdot}$; E_x, E_u — области допустимых значений векторов x, u; $\mathbf{J}(x, u)$ — некоторый функционал.

Напомним, что (8), (11) — уравнения движения не системы, а лишь корпуса носителя. Поэтому решение задачи (13) дает лишь программное движение маховиков, используя которое можно спроектировать управляющие силовые модули (УСМ) системы.

Исследование действительного движения системы под действием реальных УСМ по указанной программе можно выполнить при помощи соответствующим образом доработанных уравнений из [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коноплев В. А.* Матричные формы уравнений движения свободного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 42—46.
2. *Коноплев В. А.* Динамика управляемого движения упругого манипулятора в инерционной взволнованной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 30—35.
3. *Коноплев В. А.* Матричные уравнения движения упругой кинематической цепи с вращающимися массами на звеньях // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 7. С. 89—96.
4. *Коноплев В. А.* Исследование кинематики сложного движения тела с помощью матричных методов // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 9. С. 130—131.
5. *Коноплев В. А.* Матричные методы в кинематике сложного движения твердого тела и системы твердых тел // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. шк. 1986. Вып. 17. С. 46—54.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
7. *Виттенбург И.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир. 1980. 292 с.
8. *Литвин-Седой М. З.* Механика систем связанных твердых тел // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1982. Т. 5. С. 3—61.
9. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНИТИ. 1978. 222 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
1.XII.1986