Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЕЛ С ШАРОВЫМ ТЕНЗОРОМ ИНЕРЦИИ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Суликашвили Р. С.

Рассматривается задача о движении свободного твердого тела с шаровым тензором инерции в ньютоновском поле сил. Для однородных тел простейшей формы (куб, конус, цилиндр) найдены стационарные движения и исследована их устойчивость. Найденные движения и условия их устойчивости находятся в полном соответствии с аналогичными результатами для стационарных движений тел, закрепленных в центре масс [1] [1].

1. Введем неподвижную систему координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ с началом в центре притяжения O, а также подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$ с началом в центре масс G тела и осями, направленными по его главным центральным осям инерции. Введем также систему координат $O\xi\eta\zeta$, получаемую из $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ в результате поворота последней вокруг оси $O\eta_0 = O\eta$ на некоторый угол σ. Орты осей ξ, η, ζ обозначим $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$; α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ — их проекции на оси x_i.

Положение тела в неподвижной системе осей координат будет характеризоваться углом σ, координатами ξ, η, ζ его центра масс и направляющими косинусами α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$. Пусть m_1 — масса притягивающего центра, m — масса тела, f — гравитационная постоянная, $\mu = fm_1$, A, B, C — главные центральные моменты инерции тела, ω_i — проекции на оси x_i вектора мгновенной угловой скорости тела в его движении относительно системы $O\xi\eta\zeta$. Переменные σ, ξ, η, ζ — избыточные, поэтому будем считать, что $\xi = 0$, т. е. центр масс тела лежит в плоскости $O\eta\zeta$, которая вращается с угловой скоростью $\sigma^{\cdot} = d\sigma/dt$ вокруг оси $O\eta$.

Кинетическая энергия тела T определяется выражением

$$2T = m(\eta^{\cdot 2} + \zeta^{\cdot 2} + \zeta^2\sigma^{\cdot 2}) + \sigma^{\cdot 2}(A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2) + $$
$$+ 2\sigma^{\cdot}(A\omega_1\beta_1 + B\omega_2\beta_2 + C\omega_2\beta_3) + (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)$$
$$\omega_1 = \psi^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi + \theta^{\cdot}\cos\varphi, \quad \omega_2 = \psi^{\cdot}\sin\theta\cos\varphi - \theta^{\cdot}\sin\varphi$$
$$\omega_2 = \psi^{\cdot}\cos\theta + \varphi^{\cdot}$$

где φ, ψ, θ — углы Эйлера, определяющие ориентацию тела относительно осей $O\xi\eta\zeta$.

Уравнения движения тела можно записать в форме уравнений Лагранжа, принимая за обобщенные координаты q_i переменные η, ζ, σ, φ, ψ, θ. Эти уравнения допускают интеграл энергии $T + \Pi = \mathrm{const} = h$, где Π — потенциальная энергия ньютоновского притяжения, а также циклический интеграл, выражающий постоянство проекции на ось $O\eta$ момента количеств движения тела. Из этого интеграла находим выражение для циклической скорости

$$S\sigma^{\cdot} = K - 2(A\omega_1\beta_1 + B\omega_2\beta_2 + C\omega_3\beta_3), \quad K = \mathrm{const} \tag{1.1}$$
$$S = m\zeta^2 + (A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_2^2)$$

где S — момент инерции тела относительно оси $O\eta$.

[1] В третьем абзаце аннотации [1] вместо «вершина» должно быть «основание».

Игнорируя циклическую координату σ, построим функцию Рауса

$$R_0 = L - \sigma^\circ K = R_2 + R_1 - W_0, \quad W_0 = K^2/(2S) + \Pi$$

На основании теоремы Рауса нахождение стационарных движений тела и анализ их устойчивости сводится к исследованию стационарных значений измененной потенциальной энергии W_0.

Пусть $\tau = K/(2h)$ — характерное время, $R = [K^2/(2m_1h)]^{1/2}$ — характерный размер орбиты, $l = [(A + B + C)/(3m)]^{1/2}$ — характерный размер тел, $l/R = \varepsilon$ — малый параметр. Введем безразмерные переменные и параметры

$$M = mM', \quad t = \tau t', \quad \xi = R\xi', \quad \eta = R\eta', \quad \zeta = R\zeta'$$
$$x_i = lx_i' = \varepsilon R x_i' \quad (i = 1, 2, 3)$$

и в дальнейшем штрихи опустим.

Для функции Π имеем выражение (в безразмерной форме)

$$\Pi = -\mu \int\limits_{(M)} \frac{dm}{\Delta} = -\frac{\mu}{R} \int\limits_{(M)} F(\varepsilon)\, dm$$
$$\Delta = R\,[(\xi + \varepsilon b_\alpha)^2 + (\eta + \varepsilon b_\beta)^2 + (\zeta + \varepsilon b_\gamma)^2]^{1/2}$$
$$b_\delta = x_1\delta_1 + x_2\delta_2 + x_3\delta_3, \quad \delta = \alpha, \beta, \gamma; \quad F(\varepsilon) = R/\Delta$$

Разложив Π по степеням ε, получим

$$\Pi = -\frac{\mu}{R}\left(I_0 + \varepsilon I_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} I_2 + \frac{\varepsilon^3}{6} I_3 + \frac{\varepsilon^4}{24} I_4 + \ldots\right) \tag{1.2}$$
$$I_j = \int\limits_{(M)} F^j(0)\, dm \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Далее укажем значения коэффициентов в (1.2) для куба, конуса и цилиндра.

2. Для тела в форме куба (оси x_i направлены параллельно граням куба) с ребром a (для безразмерной формы $a = \sqrt{6}$) имеем

$$I_0 = \frac{M}{r}, \quad I_1 = I_2 = I_3 = 0, \quad I_4 = 7\,\frac{5r^2 - 2\varkappa}{16r^9} - \frac{133}{80r^5}$$

Тогда для функции W_0 получаем

$$W_0 = -E\left[\frac{1}{r} + \frac{k}{r^5}\varepsilon^4\right] + \Pi_\sigma$$
$$\Pi_\sigma = K^2/(2S), \quad r = (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}, \quad Q = \mu M/R$$
$$k = (21 - 35\varkappa)/960, \quad \varkappa = u_1^4 + u_2^4 + u_3^4$$
$$u_i = (\eta\beta_i + \zeta\gamma_i)/r \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\psi_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1 = 0$$

Задача о нахождении стационарных движений тела приводится к задаче о разыскании безусловного экстремума функции $W = W_0 + \lambda\psi_1$, где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Уравнения стационарных движений имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = E\eta\left(\frac{1}{r^3} + \frac{5k}{r^7}\varepsilon^4\right) = 0 \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} = E\zeta\left(\frac{1}{r^3} + \frac{5k}{r^7}\varepsilon^4\right) - \frac{MK^2\zeta}{S^2} = 0$$
$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = 2\lambda_0 u_i^3 + 2\lambda u_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \lambda_0 = \frac{7\varepsilon^4}{96r^5}$$

и допускают следующие семейства решений:

(2.2) $\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N(1 + D), \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \pm 1/\sqrt{2},$
$u_3 = \pm 1\sqrt{2}$ (123)

(2.3) $\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N(1 + 16D), \quad u = u_2 = 0, \quad u_3 = \pm 1$ (123)

(2.4) $\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N(1 + 6D), \quad u_1 = \pm 1/\sqrt{3}, \quad u_2 = \pm 1/\sqrt{3}, \quad u_3 = \pm 1/\sqrt{3}$

$$N = RK^2/(\mu M^2), \quad D = 72A^2\varepsilon^4/(7M^2)$$

При этом λ для (2.2) — (2.4) имеет соответственно следующие значения: $-{}^1/_2\lambda_0 E$; $-\lambda_0 E$; $-{}^1/_3\lambda_0 E$.

Других решений уравнения (2.1) не имеют.

Решениям (2.2)—(2.4) соответствуют относительные равновесия тела на круговой орбите радиуса ζ_0, центр масс которого движется с постоянной орбитальной угловой скоростью $\omega_0 = K_0/S_0$ (см. (1.1)), определяемой из условия

$$\omega_0\zeta_0^2 = \mu R^{-1}(1 - k\varepsilon^4/\zeta_0^4)$$

(нулевой индекс означает, что соответствующие величины вычисляются для решений (2.2)—(2.4)).

Для решений (2.2) радиус-вектор $OG = \zeta_0$ притягивающего центра параллелен диагонали одной из граней куба, для решений (2.3) — он параллелен одному из ребер куба, а для решений (2.4) — направлен по одной из диагоналей куба.

Исследуем устойчивость движений (2.2)—(2.4). Введем обозначения

$$a_{11} = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial\eta^2}\right)_0, \quad a_{22} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta^2}\right)_0, \quad a_{12} = a_{21} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\eta\partial\zeta}\right)_0$$

$$a_{33} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_1^2}\right)_0, \quad a_{44} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_2^2}\right)_0, \quad a_{23} = a_{32} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta\partial u_1}\right)_0$$

$$a_{55} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_3^2}\right)_0, \quad a_{24} = a_{42} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta\partial u_2}\right)_0, \quad a_{25} = a_{52} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta\partial u_3}\right)_0$$

Остальные вторые частные производные равны нулю.

Обозначим $(\delta^2 W)$ значение квадратичной формы $\delta^2 W$ на линейном многообразии $\delta\psi_1 = 0$. Собственные значения квадратичной формы $(\delta^2 W)$ можно назвать коэффициентами устойчивости, а число отрицательных корней — степенью неустойчивости (обозначим ее χ).

Для всех решений (2.2) — (2.4) значения a_{22} одинаковы:

$$a_{22} = M\omega_0^2(4M\zeta_0 - S_0)/S_0 - 2E/\zeta_0^3 + O(\varepsilon^4)$$

Значения других a_{ij} различаются.

Для решений (2.2) имеем

$$a_{11} = E\,\frac{384\zeta_0^4 - 7\varepsilon^4}{384\zeta_0^7}, \quad a_{33} = -\frac{7E\varepsilon^4}{96\sqrt{2}\,\zeta_0^5}$$

$$a_{44} = a_{55} = -2\sqrt{2}a_{33}, \quad a_{24} = a_{25} = 5a_{33}/\zeta_0$$

(остальные вторые частные производные равны нулю). Условия положительной определенности $(\delta^2 W)$ выражаются неравенствами

$$a_{55} > 0, \quad a_{33}a_{44} > 0, \quad a_{11}a_{33}a_{44} > 0, \quad a_{11}a_{33}a_{24}(a_{44} - a_{24}) > 0$$

из которых второе и третье не выполняются. Следовательно, для движений (2.2) $\chi = 2$.

Для решений (2.3)

$$a_{11} = E(96\zeta_0^4 - 7\varepsilon^4)/(96\zeta_0^7), \quad a_{44} = -7E\varepsilon^4/(48\zeta_0^5)$$

и достаточные условия выражаются неравенствами

$$a_{44} > 0, \quad a_{44}^2 > 0, \quad a_{11}a_{44}^2 > 0, \quad a_{11}a_{22}a_{44}^2 > 0$$

первое из которых не выполняется. Следовательно, для этих движений $\chi = 2$.

Таким образом, для движений (2.2) и (2.3) теорема Рауса не позволяет сделать определенного вывода об устойчивости.

Для решений (2.4) имеем

$$a_{11} = E\,(144\zeta_0^4 + 7\varepsilon^4)/(144\zeta_0^7), \quad a_{33} = 35E\varepsilon^4/(288\zeta_0^5)$$

и условия устойчивости приводятся к неравенствам

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} > 0 \tag{2.5}$$

которые всегда выполняются, для них $\chi = 0$. Движения (2.4) устойчивы по отношению к переменным η, ζ, u_i, $\eta^\cdot$, $\zeta^\cdot$, $\sigma^\cdot$, ω_i ($i = 1, 2, 3$).

3. Вычисляя члены разложения (1.1) для тел в форме конуса и цилиндра с радиусами a и высотами $2a$ и $\sqrt{3}a$ соответственно (высота тел определяется из условий $A = B = C$, в безразмерной форме $a = 1$), получим следующие выражения для измененной потенциальной энергии этих тел:

$$W = -E\left[\frac{1}{r} + \frac{u_3(3 - 5u_3^2)}{16r^4}\varepsilon^3\right] + \Pi_\sigma \text{ для конуса}$$

$$W = -E\left[\frac{1}{r} + 11\,\frac{5u_3^2(6 - 7u_3^2) - 3}{640r^5}\varepsilon^4\right] + \Pi_\sigma \text{ для цилиндра}$$

Уравнения стационарных движений конуса и цилиндра $\delta W = 0$ дают семейства решений:

для конуса

$$\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N, \quad u_3 = \mp 1 \tag{3.1}$$

$$\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N, \quad u_3 = \mp 1/\sqrt{5} \tag{3.2}$$

для цилиндра

$$\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N\left(1 - \frac{128}{465}D_1\right), \quad u_3 = \mp 1 \tag{3.3}$$

$$\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N\left(1 - \frac{64}{335}D_1\right), \quad u_3 = 0 \tag{3.4}$$

$$\eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = N\left(1 - \frac{384}{8885}D_1\right), \quad u_3 = \mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \tag{3.5}$$

$$D_1 = A^2\varepsilon^4/M^2$$

Решениям (3.1)—(3.5) соответствуют стационарные движения тел, в которых центр масс движется по круговой орбите, а сами тела находятся в равновесии относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$. Для решений (3.1), (3.3) вектор OG направлен вдоль оси симметрии тел, а для (3.4) — перпендикулярен оси симметрии. Отметим, что для решения (3.1) при $u_3 = -1$ конус обращен к центру притяжения вершиной, а при $u_3 = 1$ — основанием. Решения (3.2), (3.5) таковы, что вектор OG проходит через граничную окружность основания.

Исследуем устойчивость движений (3.1) — (3.5). Для вторых частных производных функции W для конуса при значениях (3.1)—(3.2) имеем выражения:

для решений (3.1)

$$a_{11} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\right)_0 = E\,\frac{2\zeta_0^3 \pm \varepsilon^3}{2\zeta_0^6}, \quad a_{33} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_3^2}\right)_0 = \pm\frac{3E\varepsilon^3}{4}$$

для решений (3.2)

$$a_{11} = E\,\frac{2\sqrt{5}\,\zeta_0^3 \mp \varepsilon^3}{2\sqrt{5}\,\zeta_0^6}, \quad a_{33} = \mp\frac{3E\varepsilon^3}{2\sqrt{5}}$$

причем для всех решений $a_{22} = (\partial^2 W/\partial\zeta^2)_0 = E/\zeta_0^3$; остальные вторые частные производные равны нулю.

Условия устойчивости для решений (3.1), (3.2) приводятся к неравенствам (2.5), из которых первые два выполняются, а последнее не выполняется для решения (3.1) при $u_3 = 1$ и решения (3.2) при $u_3 = -1/\sqrt{5}$, в силу чего заключаем, что эти движения неустойчивы ($\chi = 1$), а остальные движения (3.1), (3.2) устойчивы ($\chi = 0$) по отношению к переменным

(3.6) $\qquad \eta,\ \zeta,\ u_3,\ \eta^{\cdot},\ \zeta^{\cdot},\ \sigma^{\cdot},\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$

Отметим, что устойчивость и неустойчивость тела в форме конуса меняется в результате его поворота на 180° вокруг нормали к плоскости орбиты. Этот результат не имеет аналога для обычного спутникового приближения.

Вторые частные производные от функции W для цилиндра при значениях (3.3)—(3.5) таковы:

для решений (3.3)

$$a_{11} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\right)_0 = E\,\frac{80\zeta_0^4 - 11\varepsilon^4}{80\zeta_0^7}, \quad a_{33} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_3^2}\right)_0 = -\frac{11E\varepsilon^4}{2\zeta_0^5}$$

для решения (3.4)

$$a_{11} = E\,\frac{640\zeta_0^4 - 33\varepsilon^4}{640\zeta_0^7}, \quad a_{33} = -\frac{33E\varepsilon^4}{8\zeta_0^5}$$

для решений (3.5)

$$a_{ss} = E\,\frac{560\zeta_0^4 + 33\varepsilon^4}{560\zeta_0^7}, \quad a_{33} = \frac{627E\varepsilon^4}{196\zeta_0^5}$$

причем для всех решений $a_{22} = (\partial^2 W/\partial\zeta)_0 = a_{11} + O(\varepsilon^4)$; остальные вторые частные производные равны нулю.

Условия устойчивости для решений (3.3)—(3.5) приводятся к неравенствам (2.5), из которых первые два выполняются, а последнее не выполняется для решений (3.3) и (3.4), в силу чего заключаем, что эти движения неустойчивы ($\chi = 1$), а движения (3.5) устойчивы ($\chi = 0$) по отношению к переменным (3.6).

Следует заметить, что даже малое отклонение линейных размеров тел (например, высоты конуса) может привести к возникновению новых динамических эффектов, не учитываемых данной постановкой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суликашвили Р. С.* О влиянии моментов инерции третьего и четвертого порядков на движение твердого тела // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 268—274.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1986