Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

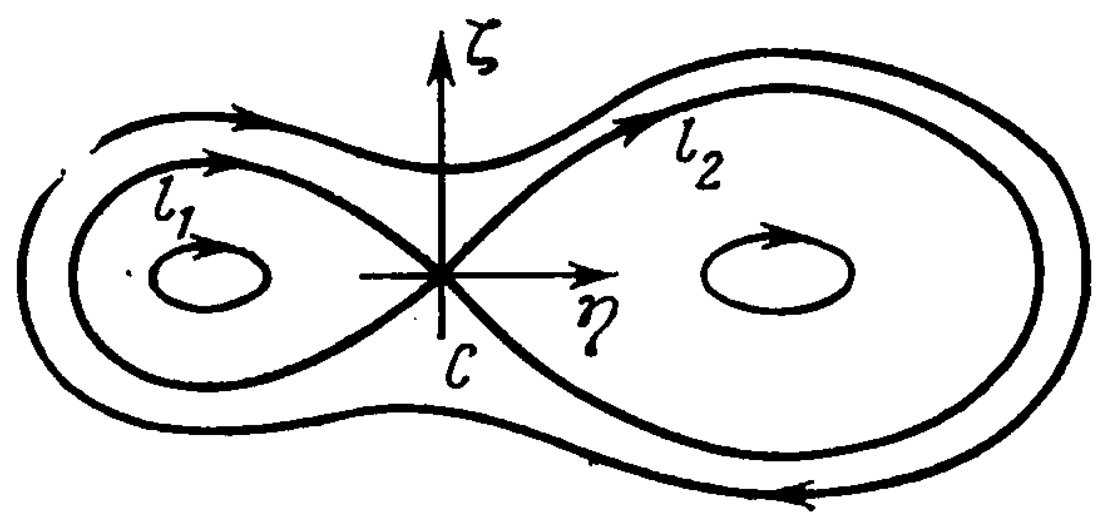
УДК 531.36 : 534.1

ОБ ИЗМЕНЕНИИ АДИАБАТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ СЕПАРАТРИСУ В СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Нейштадт А. И.

Рассматриваются гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, в которых одна степень свободы соответствует быстрому движению, а другая — медленному. Фазовая точка пересекает сепаратрису быстрого движения. Получены формулы для изменения адиабатического инварианта при этом переходе. Рассмотрен пример: изменение адиабатического инварианта астероида вблизи резонанса 3 : 1 с Юпитером.

1. Постановка задачи. Ряд задач теории колебаний приводит к гамильтоновым системам с гамильтонианом вида $H = H(p, q, y, x)$, где q, $\varepsilon^{-1}x$ — координаты, p, y — сопряженные им импульсы, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $H \in C^\infty$. Переменные p, q называются быстрыми, переменные y, x — медленными. Гамильтонова система для p, q при $(y, x) = \mathrm{const}$ называется быстрой или невозмущенной. Гамильтониан рассматриваемого вида характеризует, например, движение астероида в ограниченной задаче трех тел вблизи резонанса.



Фиг. 1

Ниже предполагается, что на фазовой плоскости быстрой системы при всех рассматриваемых значениях медленных переменных имеются сепаратрисы (фиг. 1). При изменении медленных переменных фазовая точка пересекает сепаратрису. Движение вдали от сепаратрис характеризуется величиной, которая сохраняется с высокой степенью точности — адиабатическим инвариантом (АИ) [1]. Окрестность сепаратрис — зона неадиабатичности, и при переходе через нее АИ изменяется. В работе получены асимптотические формулы для этого изменения. В качестве следствия из них выводится формула для изменения АИ резонансного астероида.

Ранее рассматривалось изменение АИ при переходе через сепаратрису в гамильтоновой системе с одной степенью свободы, параметры которой плавно изменяются со временем: гамильтониан $H = H(p, q, \varepsilon t)$. Соответствующая формула получена в [2,3], а для частного случая маятника в плавно изменяющемся поле тяжести — впервые в [4].

2. Адиабатическое приближение. Пусть $I = I(H, y, x)$ — переменная «действие» [1] быстрой системы для какой-нибудь области, не содержащей сепаратрис, $\Phi(I, y, x)$ — гамильтониан H, выраженный через I, y, x. При движении вдали от сепаратрис на временах порядка $1/\varepsilon$ с точностью $O(\varepsilon)$ величина I остается постоянной, а изменение y, x описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом $\varepsilon\Phi(I, y, x)$, где y, x — сопряженные переменные, $I = \mathrm{const}$ (медленной системой) [5]. Это приближение называется адиабатическим, «действие» I — АИ. Имеются полезные тождества: $\partial\Phi/\partial\alpha = \langle\partial H/\partial\alpha\rangle$, $\alpha = y, x$, где угловые скобки означают усреднение по фазе невозмущенного движения.

Улучшенным АИ называется величина

$$J = J(p, q, y, x) = I + \varepsilon u(p, q, y, x) \tag{2.1}$$

$$u = \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial y}\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}d\sigma\right)dt - \int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial x}\int_0^t \frac{\partial H}{\partial y}d\sigma\right)dt\right]$$

Интегралы берутся по фазовой траектории быстрой системы, проходящей через точку (p, q), t, σ — время движения, отсчитываемое от момента прохождения через эту точку, T — период. Величина J — улучшенное первое приближение в методе усреднения [6]. При движении вдали от сепаратрис на временах порядка $1/\varepsilon$ величина J остается постоянной с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Формула (2.1) может быть получена следующим образом. В быстрой системе переменные действия — угол I, $\varphi \bmod 2\pi$ вводятся симплектической заменой переменных с производящей функцией $W(I, q, y, x)$. В полной системе делается симплектическая замена переменных $p, q, y, \varepsilon^{-1}x \mapsto \bar{I}, \bar{\varphi}, \bar{y}, \varepsilon^{-1}\bar{x}$ с производящей функцией $\varepsilon^{-1}\bar{y}x + W(\bar{I}, q, \bar{y}, x)$. В новых переменных гамильтониан принимает вид

$$F = \Phi(\bar{I}, \bar{y}, \bar{x}) + \varepsilon F_1(\bar{I}, \bar{\varphi}, \bar{y}, \bar{x}) + O(\varepsilon^2) \tag{2.2}$$

$$F_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\omega}\int_0^\varphi \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \alpha}\right\rangle\right)d\varphi, \qquad \omega = \frac{\partial \Phi}{\partial I}, \qquad \alpha = y, x$$

Угол φ отсчитывается от какой-нибудь прямой $q = \mathrm{const}$.

Для получения улучшенного АИ делается симплектическая близкая к тождественной замена переменных $\bar{I}, \bar{\varphi}, \bar{y}, \varepsilon^{-1}\bar{x} \mapsto J, \psi, Y, \varepsilon^{-1}X$, такая, что выраженный через новые переменные гамильтониан содержит фазу ψ лишь в членах порядка ε^2. С точностью до членов порядка ε^2 значение J определяется формулой

$$J = I + \varepsilon u(p, q, y, x), \quad u = \frac{F_1 - \langle F_1\rangle}{\omega} - \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}$$

Функция u инвариантна относительно выбора начала отсчета угла φ на невозмущенной траектории. Поэтому можно считать, что φ отсчитывается от точки (p, q). Тогда

$$u = -\frac{\langle F_1\rangle}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left\langle \frac{\partial H}{\partial x}\right\rangle\left\langle \frac{\partial W}{\partial y}\right\rangle - \frac{1}{\omega}\left\langle \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\right\rangle$$

Подставляя сюда $\partial W/\partial x$, $\partial W/\partial y$ из (2.2), после тождественных преобразований получаем (2.1).

3. Переход через сепаратрису в адиабатическом приближении. На фазовом портрете быстрой системы (фиг. 1) через седловую невырожденную особую точку C проходят сепаратрисы l_1 и l_2, делящие плоскость на области $G_i = G_i(y, x)$, $i = 1, 2, 3$. Обозначим $h_C = h_C(y, x)$ значение гамильтониана H в точке C, $E = E(p, q, y, x) = H - h_C$, $S_i = S_i(y, x)$ — площади областей G_i, $i = 1, 2$, $S_3 = S_1 + S_2$, $\Theta_i(y, x) = \{S_i, h_C\}$. Здесь и ниже $\{\ ,\ \}$ — скобки Пуассона функций от y, x: $\{f, g\} = f_x' g_y' - f_y' g_x'$.

Величина $\varepsilon\Theta_i(y, x)$ — это скорость изменения площади $S_i(y, x)$ в адиабатическом приближении в пределе, когда фазовая точка в области G_i приближается к сепаратрисе. Ниже предполагается, что $\Theta_i(y, x) > \mathrm{const} > 0$ в рассматриваемой области изменения y, x. В этом случае в адиабатическом приближении фазовые точки из G_3 за конечное медленное время εt могут выходить на сепаратрису, а в областях G_1 и G_2 — сходить с сепаратрисы (так как «действие» $I(H, y, x)$ — это поделенная на 2π площадь, ограниченная фазовой траекторией, и в адиабатическом приближении $I = \mathrm{const}$).

Изменение I, y, x приближенно описывается по следующей схеме [7]. Пусть движение начинается при $t = 0$ из точки M_0 (p_0, q_0, y_0, x_0), причем $(p_0, q_0) \in G_3$ (y_0, x_0). В области G_3 АИ считается постоянным вплоть до выхода на сепаратрису: $I(H, y, x) = I^- = \text{const}$. Изменение y, x описывается решением $Y_3(\tau)$, $X_3(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$ медленной системы с гамильтонианом $\varepsilon\Phi(I^-, y, x)$ при начальных условиях (y_0, x_0). Момент времени t_* выхода на сепаратрису определяется из соотношения $S_3(Y_3(\tau_*), X_3(\tau_*)) = 2\pi I^-$, $\tau_* = \varepsilon t_*$. Величины $y_* = Y_3(\tau_*)$, $x_* = X_3(\tau_*)$ можно определить решая систему уравнений $S_3(y_*, x_*) = 2\pi I^-$, $h_C(y_*, x_*) = H(p_0, q_0, y_0, x_0)$.

После перехода через сепаратрису точка может продолжить движение либо в области G_1, либо в области G_2. При движении в G_i, $i = 1, 2$ адиабатический инвариант опять считается постоянным: $I = S_i(y_*, x_*)/(2\pi)$. Изменение медленных переменных описывается решением $Y_i(\tau)$, $X_i(\tau)$ построенной для области G_i медленной системы с начальным условием $Y_i(\tau_*) = y_*$, $X_i(\tau_*) = x_*$.

В области G_3 начальные условия, соответствующие захватам в G_1 и G_2, при малых ε сильно перемешаны. Поэтому захват в ту или иную область приходится считать случайным событием. Для точки M_0 вероятность P_i захвата в область G_i, $i = 1, 2$ определяется как доля фазового объема малой окрестности точки M_0, захватывающаяся в G_i в пределе, когда $\varepsilon \to 0$ и размер окрестности $\delta \to 0$, $\varepsilon \ll \delta$ [5] (сначала берется предел по ε, а потом по δ). Эта вероятность дается формулой

$$P_i = \Theta_i(y_*, x_*)/\Theta_3(y_*, x_*), \quad i = 1, 2$$

Было показано [1], что выписанные равенства для I, εt_*, y, x справедливы для большинства начальных условий с точностью $O(\varepsilon \ln \varepsilon)$ либо для $i = 1$, либо для $i = 2$. Исключительное множество начальных условий, для которых эти оценки не справедливы, имеет меру $O(\varepsilon^n)$, где $n \geqslant 1$ — любое наперед заданное число. (В аналитических системах исключительное множество имеет меру $O(\exp(-c/\varepsilon))$, $c = \text{const} > 0$.)

4. Асимптотические разложения для быстрого движения вблизи сепаратрис. Приведенные ниже асимптотические разложения аналогичны соответствующим разложениям из [2]. В них a, b_i, d_i — гладкие функции y, x. Для определенности предполагается, что $E > 0$ в области G_3, $E < 0$ в областях G_1 и G_2.

А. Для траектории $E = h$, лежащей в области G_i, $i = 1, 2, 3$ выполнены равенства

$$\begin{gathered}
T = -a_i \ln|h| + b_i + O(h \ln|h|), \quad a_1 = a_2 = a, \quad a_3 = 2a, \\
b_3 = b_1 + b_2 \\
2\pi I = S_i - a_i h \ln|h| + (b_i + a_i)h + O(h^2 \ln|h|) \\
\oint\limits_{E=h} \frac{\partial E}{\partial \alpha}\, dt = -\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + O(h \ln|h|), \quad \alpha = y, x \\
\oint\limits_{E=h} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{tot}} dt = -\varepsilon\Theta_i + \varepsilon O(h \ln|h|)
\end{gathered} \tag{4.1}$$

В последней формуле под знаком интеграла стоит производная функции E в силу полной исходной системы.

---

[1] *Нейштадт А. И.* О некоторых резонансных задачах в нелинейных системах: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ. 1976. 15 с.

Б. Функцию u в (2.1) для получения асимптотических разложений удобно переписать в виде

$$u = \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^T \left(\frac{\partial E}{\partial y}\int_0^t \frac{\partial E}{\partial x}\,d\sigma\right)dt - \int_0^T \left(\frac{\partial E}{\partial x}\int_0^t \frac{\partial E}{\partial y}\,d\sigma\right)dt\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^T \left(\frac{T}{2} - t\right)\left(\frac{\partial h_C}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial h_C}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial y}\right)dt$$

Пусть $C\eta\zeta$ — система главных координат для седловой точки C (фиг. 1). Если точка (p, q) лежит в области G_i, $i = 1, 2$ вблизи C на оси $C\eta$, то для функции u справедливо разложение

$$2\pi u = d_i + O\left(\sqrt{|h|}\ln|h|\right),\quad h = E\,(p, q, y, x)$$

Если точка (p, q) лежит в области G_3 вблизи C на положительной части оси $C\zeta$, то

$$2\pi u = {}^1/_2 a\,(\Theta_2 - \Theta_1)\ln h + {}^1/_2\,(\Theta_1 b_2 - \Theta_2 b_1) + {}^1/_2\,\{S_2, S_1\} + + d_3 + O\left(\sqrt{h}\ln h\right),\quad d_3 = d_1 + d_2 \tag{4.2}$$

5. Вычисления изменения АИ. Вдали от сепаратрис улучшенный АИ изменяется лишь на величину $O(\varepsilon^2)$. Поэтому изменение порядка ε или ниже набирается в малой окрестности сепаратрис и для его вычисления можно использовать асимптотические разложения п. 4. Выкладки, в основном, повторяют [2].

Пусть фазовая точка начинает двигаться при $t = 0$ в области G_3, имея $I = I^-$, $J = J^-$, $u = u^-$; пусть при $\tau = \tau^+$ эта точка лежит в области G_i, $i = 1$ или $i = 2$, имея $I = I^+$, $J = J^+$. Обозначается: τ_*, y_*, x_* — рассчитанные в адиабатическом приближении п. 3 значения медленного времени и медленных переменных при выходе на сепаратрису (предполагается, что $\tau_* < \tau_+$); t_*^- — момент времени, в который фазовая точка в последний раз попадает на положительный луч оси $C\zeta$ вблизи седла C; t_*^+ — момент времени, в который фазовая точка впервые попадает на ось $C\eta$ вблизи C; $h_*^\pm$, $J_*^\pm$, $y_*^\pm$, $x_*^\pm$ — значение E, J, y, x на траектории при $t = t_*^\pm$; $\xi = h_*^-/(\varepsilon\Theta_3)$, $\xi_i = |h_*^+|/(\varepsilon\Theta_i)$.

Здесь Θ_j (и в дальнейшем a, b_j, d_j, $\partial S_j/\partial x$, $\partial S_j/\partial y$, $j = 1, 2, 3$) вычисляются при $x = x_*$, $y = y_*$. Предполагается, что начальная точка не принадлежит исключительному множеству малой меры, для которого не справедливы оценки п. 3. Поэтому $\varepsilon t_*^\pm = \tau_* + O(\varepsilon\ln\varepsilon)$.

Цель дальнейших выкладок — выразить в главном приближении J^+ через J^- и ξ_i.

5.1. *Приближение к сепаратрисе.* При $0 \leqslant t \leqslant t_*^-$ проекция фазовой точки на плоскость p, q описывает витки, близкие к невозмущенным траекториям. Можно проверить, что при движении в области $E > h > \varepsilon$ величина J изменяется на $O(\varepsilon^2/h)$. В частности, в области $E > \sqrt{\varepsilon}/|\ln\varepsilon|$ величина J изменяется на $O(\varepsilon^{3/2}\ln\varepsilon)$. После попадания в область $0 < E < \sqrt{\varepsilon}/|\ln\varepsilon|$ определены моменты последовательных пересечений движущейся точкой луча $C\zeta$ вблизи точки C. Эти моменты будут нумероваться, начиная от последнего: $t_*^- = t_0 > t_1 > \ldots > t_N > 0$. Значения E, τ, I, J, y, x при $t = t_n$ будут обозначаться h_n, τ_n, I_n, J_n, y_n, x_n. Если $\xi > k\sqrt{\varepsilon}$, где $k > 0$ — достаточно большая постоянная, то справедливы формулы

(5.1) $$h_{n+1}=h_n+\varepsilon[\Theta_3+O(\sqrt{h_{n+1}})],\quad \tau_{n+1}=\tau_n+$$
$$+\varepsilon[{}^1/_2 a\ln h_n+a\ln(h_n+\Theta_1\varepsilon)+{}^1/_2 a\ln h_{n+1}-b_3+O(\sqrt{h_{n+1}})]$$

(5.2) $$S_3(y_n,x_n)=S_3(y_0,x_0)+\Theta_3(\tau_n-\tau_0)+$$
$$+O(h_{n+1}^2\ln^2 h_{n+1})+O(\varepsilon\sqrt{h_{n+1}})$$

Изменение улучшенного АИ представляется в виде $J_*^- - J^- = (J_*^- - J_N) + (J_N - J^-)$. Второе слагаемое есть $O(\varepsilon^{3/2}\ln\varepsilon)$. При вычислении первого слагаемого для J_N, J_*^- используются разложения (4.1), (4.2). Входящие в разложение для J_N величины h_N, $S_3(y_N, x_N)$ определяются при помощи (5.1). Эти выкладки совпадают с проведенными в [2]; они приводят к следующему результату ($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция):

(5.3) $$2\pi(J_*^- - J^-)=2\varepsilon a\Theta_3[-{}^1/_2\ln\{2\pi[\Gamma(\xi)\Gamma(\xi+\theta_{13})]^{-1}\}+$$
$$+\xi+(-\xi+{}^1/_2\theta_{23})\ln\xi]+O(\varepsilon^{3/2}\ln\varepsilon),\quad \theta_{ij}=\Theta_i/\Theta_j$$

Оценка остаточного члена в (5.3) оказывается гораздо лучшей, чем в промежуточных формулах при $E=h_N$. Это вызвано тем, что остаточные члены в асимптотических разложениях связаны соотношениями, обеспечивающими адиабатическую инвариантность при больших h. Вывод оценки остаточного члена громоздок и здесь, как и в [2], опускается.

Формула (5.3) позволяет получить в главном приближении необходимую для дальнейшего связь между $S_i(y_*^-, x_*^-)$, J^-, ξ $(i=1,2)$. Действительно, справедливы соотношения

(5.4) $$S_j(y_*^-,x_*^-)-S_j(y_*,x_*)=\frac{\partial S_j}{\partial y}(y_*^- - y_*)+\frac{\partial S_j}{\partial x}(x_*^- - x_*)+$$
$$+O(\varepsilon^2\ln^2\varepsilon)$$
$$h_*^-=-\frac{\partial h_C}{\partial y}(y_*^- - y_*)-\frac{\partial h_C}{\partial x}(x_*^- - x_*)+O(\varepsilon^2\ln^2\varepsilon)$$

Последнее соотношение вытекает из определения y_*, x_* и интеграла энергии: $H=h_C(y_*, x_*)$. Рассматривая в (5.4) первое соотношение для $j=3$ и второе соотношение как линейную систему относительно $y_*^- - y_*$, $x_*^- - x_*$, решая ее и подставляя результат в первое соотношение для $j=1, 2$, можно получить

(5.5) $$S_i(y_*^-,x_*^-)-S_i(y_*,x_*)=\{S_i,S_3\}h_*^-/\Theta_3+$$
$$+\theta_{i3}(S_3(y_*^-,x_*^-)-S_3(y_*,x_*))+O(\varepsilon^2\ln^2\varepsilon),\quad i=1,2$$

Разложения п. 4 позволяют выразить $S_3(y_*^-, x_*^-)$ через J_*^-, ξ; формула (5.3) выражает J_*^- через J^-, ξ. Поэтому (5.5) позволяет выразить $S_i(y_*^-, x_*^-)$ через J^-, ξ.

5.2. *Переход через сепаратрису*. Оценки показывают, что $\xi\in(0, 1+k\sqrt{\varepsilon})$. Если $\xi\in(k\sqrt{\varepsilon}, \theta_{23}-k\sqrt{\varepsilon})$, то после перехода через сепаратрису точка захватывается в G_2, а если $\xi\in(\theta_{23}+k\sqrt{\varepsilon}, 1-k\sqrt{\varepsilon})$ — то в G_1. Ниже для определенности рассматривается первый случай. При $t_*^-\leqslant t\leqslant t_*^+$ проекция фазовой точки на плоскость p, q описывает кривую, близкую к сепаратрисе l_2. Выполнены соотношения

$$h_*^+=h_*^- - \Theta_2\varepsilon+O(\varepsilon^{3/2})$$
$$t_*^+=t_*^- - {}^1/_2 a\ln h_*^+ - {}^1/_2 a\ln|h_*^-|+b_2+O(\varepsilon\ln^2\varepsilon)$$
$$S_2(y_*^+,x_*^+)=S_2(y_*^-,x_*^-)+\Theta_2\varepsilon(t_*^+ - t_*^-)+O(\varepsilon^{3/2})$$

Эти соотношения вместе с разложениями п. 4 позволяют выразить J_*^+, ξ через $S_2(y_*^-, x_*^-)$, ξ_2.

5.3. *Удаление от сепаратрисы.* Рассуждения п. 5.1, примененные к движению в области G_i, $i = 1, 2$, дают

$$(5.6)\qquad 2\pi\,(J^+ - J_*^+) = \varepsilon a\Theta_i\,[-\ln(\sqrt{2\pi}/\Gamma(\xi_i)) + \xi_i + ({}^1/_2 - \xi_i)\ln\xi_i] + O(\varepsilon^{3/2}\ln\varepsilon)$$

Отметим, что формулы (5.3), (5.6) справедливы при любом числе степеней свободы медленного движения.

5.4. *Окончательная формула.* В п. 5.3 величина J^+ выражена через J_*^+, ξ_i. Формулы п. 5.2 позволяют выразить J_*^+, ξ через $S_i\,(y_*^-, x_*^-)$, ξ_i. Формулы п. 5.1 позволяют выразить $S_i\,(y_*^-, x_*^-)$ через J^-, ξ. В итоге можно выразить J^+ через J^-, ξ_i: в случае попадания в область G_i, если $k\sqrt{\varepsilon} < \xi_i < 1 - k\sqrt{\varepsilon}$, то

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} 2\pi J^+ &= S_i\,(y_*, x_*) + \theta_{i3}\,(2\pi J^- - S_3\,(y_*, x_*)) + \\ &+ \varepsilon a\Theta_i\,(\xi_i - {}^1/_2)(\ln(\varepsilon\Theta_i) - 2\theta_{i3}\ln(\varepsilon\Theta_3)) - \\ &- \varepsilon a\Theta_i\ln\{(2\pi)^{3/2}\,[\Gamma(\xi_i)\Gamma(\theta_{i3}\,(1-\xi_i))\Gamma(1-\theta_{i3}\xi_i)]^{-1}\} + \\ &+ \varepsilon\Theta_i\,({}^1/_2 - \xi_i)(b_i - \theta_{i3}b_3) + \varepsilon\,(d_i - \theta_{i3}d_3) + \\ &+ \varepsilon\theta_{i3}\,({}^1/_2 - \xi_i)\{S_i, S_3\} + O(\varepsilon^{3/2}\,(|\ln\varepsilon| + (1-\xi_i)^{-1})) \end{aligned}$$

Величина $\xi_i \in (0, 1)$ — функция начальных условий, значение которой можно изменить на величину порядка единицы малым, порядка ε, изменением аргументов. Поэтому ξ_i целесообразно трактовать как случайную величину. Для заданной начальной точки $M_0\,(p_0, q_0, y_0, x_0)$ вероятность события $\xi_i \in (\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ по определению есть

$$P_i^{(\alpha,\beta)} = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{mes} U_{\delta,i}^{(\alpha,\beta)}/\operatorname{mes} U_{\delta,i}$$

где $U_{\delta,i}$ — множество точек из δ-окрестности M_0, захватывающихся в область G_i, $U_{\delta,i}{}^{(\alpha,\beta)}$ — множество точек из $U_{\delta,i}$, для которых $\xi_i \in (\alpha, \beta)$, $\operatorname{mes}(\cdot)$ — фазовый объем. Можно показать, что $P_i{}^{(\alpha,\beta)} = \beta - \alpha$, т. е. распределение ξ_i равномерное на $(0, 1)$. Величина J^+ также трактуется как случайная, а формула (5.7) определяет ее условное распределение при условии, что точка захватывается в область G_i.

Если начальную и конечную точки траектории выбрать так, что в них $u = 0$, то в (5.7) можно заменить $J^\pm$ на $I^\pm$; при этом второй член в правой части (5.7) обращается в нуль.

5.5. *Формулы для изменения АИ при других переходах.* Выше предполагалось, что $\Theta_1 > 0$, $\Theta_2 > 0$. При других знаках Θ происходят другие переходы между областями. В частности, пусть $\Theta_1 > 0$, $\Theta_2 < 0$, $\Theta_3 > 0$. Тогда точки из областей G_2 и G_3 с вероятностью 1 попадают в область G_1. Изменение J при переходе из G_3 в G_1 дается формулой (5.7), причем $k\sqrt{\varepsilon} < \xi_1 < \theta_{31} - k\sqrt{\varepsilon}$. Изменение J при переходе из G_2 в G_1 для $k\sqrt{\varepsilon} < \xi_2 < 1 - k\sqrt{\varepsilon}$ дается формулой

$$(5.8)\qquad \begin{aligned} 2\pi J^+ &= S_1\,(y_*, x_*) + \theta_{12}\,(2\pi J^- - S_2\,(y_*, x_*)) + \varepsilon a\,(1-\xi_2)\,\cdot \\ &\cdot(\Theta_2\ln(\varepsilon\Theta_1) - \Theta_1\ln|\varepsilon\Theta_2|) - \varepsilon a\Theta_1\ln\{2\pi\,(1-\xi_2)\,\cdot \\ &\cdot\sqrt{\theta_{21}}\,[\Gamma(\xi_2)\,\Gamma(\theta_{31} - \theta_{21}\xi_2)]^{-1}\} + \varepsilon\,(1-\xi_2)\,(\Theta_1 b_2 - \Theta_2 b_1) + \\ &+ \varepsilon\,(d_1 - \theta_{12}d_2) - \varepsilon\,(1-\xi_2)\,\{S_1, S_2\} + O(\varepsilon^{3/2}\,(|\ln\varepsilon| + (1-\xi_2)^{-1})), \\ \xi_2 &= h_*^-/(\varepsilon\Theta_2) \end{aligned}$$

Здесь h_*^- — значение функции E при последнем попадании на ось $C\eta$ в области G_2 вблизи седла C.

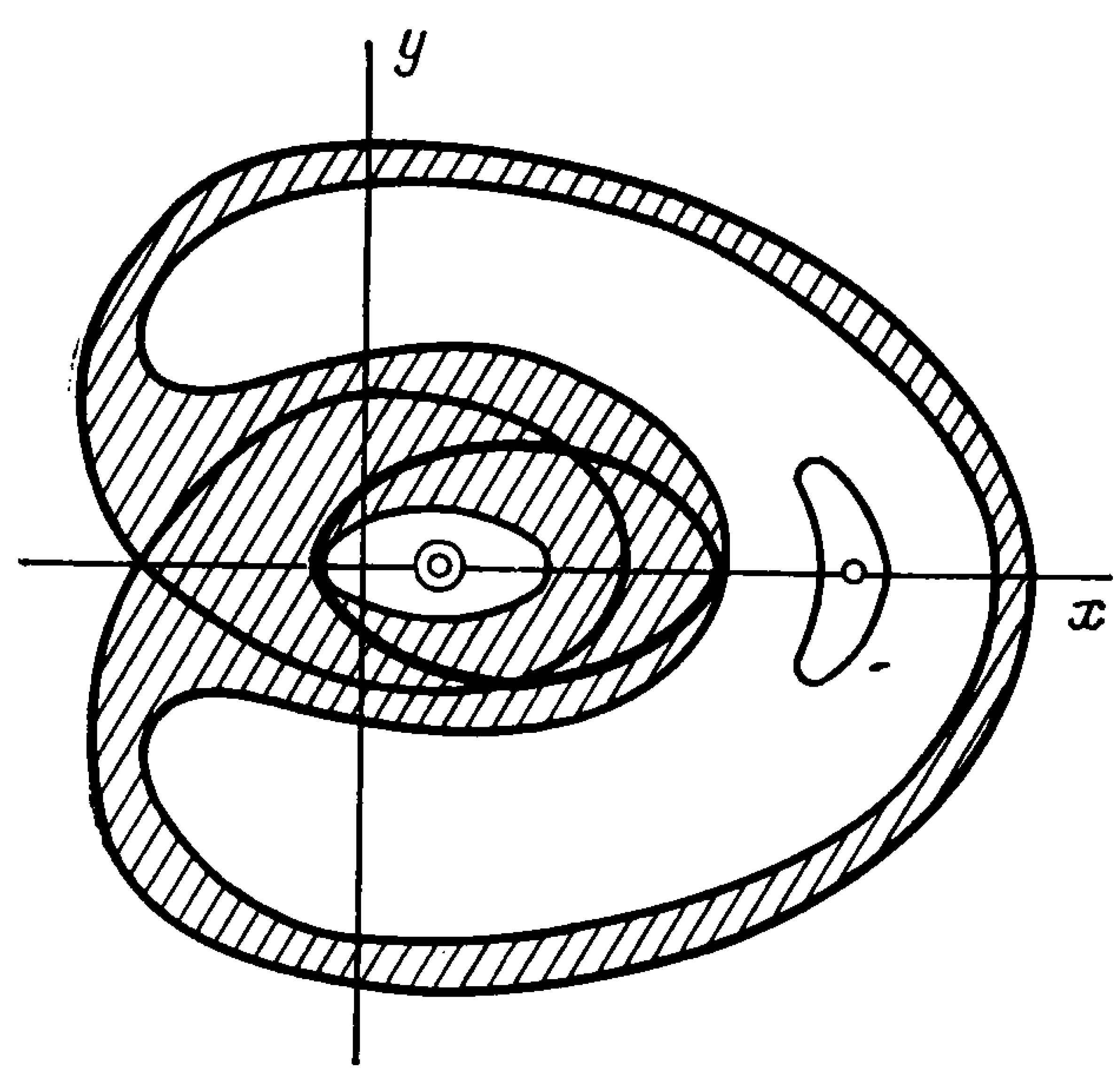
Формулы для остальных вариантов переходов получаются из (5.7), (5.8) переменами направления времени и номеров областей. Использованный метод получения формулы (5.7) является общим и позволяет вычислять изменение АИ для других типов фазового портрета, разбитого на области сепаратрисами. Существенные предположения — невырожденность седловых особых точек и ненулевые скорости изменения площадей областей в адиабатическом приближении.

6. Пример. Гамильтониан ограниченной плоской эллиптической задачи трех тел (Солнце, Юпитер, астероид) вблизи резонанса 3 : 1, усредненный по долготам Юпитера и астероида с учетом этого резонанса, в главном приближении приведен в [8] к виду

$$H = {}^1/{}_2\alpha p^2 - A(x, y)\cos(q - Q(x, y)) - B(x, y) \tag{6.1}$$

Здесь p, y, q, $\varepsilon^{-1}x$ — канонические переменные, q — средняя долгота астероида минус утроенная средняя долгота Юпитера, x и $-y$ пропорциональны компонентам вектора Лапласа для астероида, $\varepsilon = \sqrt{\mu}$, μ — отношение массы Юпитера к массе Солнца, $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Функции A, B — четные по y, а Q — нечетная, $A \geqslant 0$.

Быстрая система для (6.1) — маятник, сепаратрисы делят его фазовый портрет на области прямого вращения G_1, обратного вращения G_2, колебаний G_3. Фазовый портрет медленной системы на уровне энергии $H = r$ для некоторого интервала значений r имеет, согласно [8], вид, показанный на фиг. 2. Жирно выделена соответствующая сепаратрисам кривая $L = \{x, y\colon h_C(y, x) = r\}$, $h_C = A - B$, названная в [8] кривой неопределенности. Она разделяет области плоскости x, y, на которые проектируются при естественной проекции части уровня энергии, отвечающие областям $G_{1,2}$ и G_3; при этом G_1 и G_2 проектируются на одну и ту же конечную область. Траектории медленной системы вне L — линии $I(h, y, x) = \mathrm{const}$. На L функция I терпит разрыв, а траектории непрерывны. При выходе на L переходы из G_3 в G_1 и G_2 равновероятны. На фазовом портрете медленной системы имеется седловая особая точка. Одна из проходящих через нее сепаратрис пересекает L. На портрете заштрихована область Σ, заполненная медленными траекториями, пересекающими L.



Фиг. 2

Процедура п. 5, примененная к гамильтониану (6.1), показывает, что изменение улучшенного АИ при переходе из G_3 в G_i ($i = 1, 2$) дается формулой (5.7), в которой надо положить $S_1 = S_2 = {}^1/{}_2 S(y, x)$, $\Theta_1 = \Theta_2 = {}^1/{}_2\{S, h_C\}$, $b_1 = b_2$, $d_1 = -d_2 = d$ ($S = S(y, x)$ — площадь области колебаний для маятника).

Вычисления приводят к формуле

$$\begin{gathered} 2\pi J_+ = \pi J_- - \varepsilon a\Theta \ln(2\sin(\pi\xi_i)) - (-1)^i\varepsilon d + \\ + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\varepsilon| + (1 - \xi_i)^{-1})), \quad i = 1, 2 \\ a = \frac{1}{\sqrt{\alpha A}}, \quad \Theta = \frac{4}{\sqrt{\alpha A}}\{B, A\}, \quad d = \frac{2\pi}{\alpha}\{B, Q\} \end{gathered} \tag{6.2}$$

Коэффициенты a, Θ, d вычисляются в точке (x_*, y_*) выхода траектории медленной системы на кривую L, ξ_i — введенная в п. 5.4 величина, которая трактуется как случайная, равномерно распределенная на отрезке (0, 1). При переходе от (5.7) к (6.2) использованы формулы дополнения и удвоения для гамма-функции.

Изменение J при переходе из G_i в G_3 дается формулой (6.2), в которой надо поменять местами индексы плюс и минус и заменить Θ на $-\Theta$. Поэтому фазовая точка, выйдя из области G_3, пройдя через G_i и вновь вернувшись в G_3, получает приращение улучшенного АИ

$$\Delta J = \frac{\varepsilon a\Theta}{\pi}\ln\frac{\sin\pi\xi_i'}{\sin\pi\xi_i} + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\varepsilon| + (1 - \xi_i)^{-1} + (1 - \xi_i')^{-1})) \tag{6.3}$$

Коэффициенты a, Θ вычисляются в точке (x_*, y_*) выхода на кривую неопределенности L при переходе из G_3 в G_i; ξ_i и ξ_i' — введенные в п. 5.4 величины ξ_i для переходов из G_3 в G_i и из G_i в G_3 соответственно. Учтено, что эти два перехода происходят в симметричных относительно оси $y=0$ точках плоскости x, y и в этих точках значения $a\Theta$ отличаются знаком, а значения d совпадают. В пределе, при $\varepsilon \to 0$, величины ξ_i и ξ_i' трактуются как случайные, равномерно распределенные на отрезке (0, 1), причем можно показать, что они независимы. Соответственно при $\varepsilon \to 0$ величина $\varepsilon^{-1}\Delta J$ считается случайной, а формула (6.3) дает закон ее распределения. Согласно (6.3), эта величина имеет среднее, равное нулю, и дисперсию

$$\sigma^2 = 2a^2\Theta^2\pi^{-2}\int_0^1 \ln^2(2\sin\pi\xi)\,d\xi \approx 0{,}17a^2\Theta^2$$

При многократных переходах через сепаратрису суммирование квазислучайных изменений АИ вызывает диффузию, обнаруженную в [8] численным интегрированием. Когда в ходе диффузии проекция фазовой точки на плоскость медленных переменных пересекает сепаратрису медленного движения, характер медленного движения резко изменяется. В частности, для реальных параметров системы Солнце — Юпитер эксцентриситет астероида может увеличиваться от значений меньших 0, 1 до значений около 0, 4, при которых астероид пересекает орбиту Марса. Возмущающее влияние Марса выбрасывает такие астероиды из области основного пояса. При этом, согласно [8], в распределении астероидов образуется люк, близкий к наблюдаемому люку Кирквуда на резонансе 3 : 1.

Строгая теория диффузии АИ отсутствует. Правдоподобно, что малая окрестность начальной точки расплывается из-за диффузии по области Σ за $N \sim \varepsilon^{-2}\sigma_L^{-2}I_L^2$ переходов через сепаратрису, что требует времени $t_L \sim \varepsilon^{-3}\sigma_L^{-2}I_L^2\tau_L$. Здесь I_L — изменение I вдоль L, а σ_L, τ_L — характерные значения дисперсии σ^2 и промежутка медленного времени между переходами. В теории [8] величина t_L совпадает с характерным временем образования люка в распределении астероидов. Для реальных параметров системы Солнце — Юпитер получается $t_L \sim 10^5 \div 10^6$ лет, что по порядку согласуется с приведенными в [8] результатами численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974. 431 с.
2. *Нейштадт А. И.* Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису // Физика плазмы. 1986. Т. 12. Вып. 8. С. 992—1001.
3. *Tennyson J. L.*, *Cary J. R.*, *Escande D. F.* Change of the adiabatic invariant due to separatrix crossing // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. No. 20. P. 2117—2120.
4. *Тимофеев А. В.* К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения // Ж. Эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1978. Т. 75. Вып. 4. С. 1303—1308.
5. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91—192.
6. *Боголюбов Н. Н.*, *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
7. *Лифшиц И. М.*, *Слуцкин А. А.*, *Набутовский В. М.* О явлении «рассеяния» заряженных квазичастиц на особых точках в p-пространстве // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1961. Т. 137. № 3. С. 553—556.
8. *Wisdom J.* A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability // Icarus. 1985. V. 63. No. 2. P. 272—289.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1986