Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.01

СЛЕДСТВИЯ НЕИНТЕГРИРУЕМОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СВЯЗЕЙ: МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Татаринов Я. В.

Рассматриваются механические системы с кинематическими связями, содержащими малый параметр. Предполагается, что при нулевом значении параметра связи такой системы интегрируемы, т. е. получается семейство голономных систем, зависящих от нескольких произвольных постоянных интегрирования. Тогда методами теории возмущений движение системы при ненулевых значениях параметра в первом приближении можно представить как сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением бывших постоянных (трансгрессия).

В настоящее время есть две основные теории движения систем с неинтегрируемыми связями, причем обе получили определенное обоснование, учитывающее возможную физическую природу этих связей (когда они линейны и однородны по скоростям и не зависят от времени).

Классическая теория (КТ) [1—3]: здесь в развитие одной идеи Каратеодори [4] с уточнением Н. А. Фуфаева [5] было показано [6], что КТ-системы могут рассматриваться как предел некоторых голономных систем, в которых действуют диссипативные силы специального вида (вроде сильного вязкого трения в зоне контакта двух тел). О перспективности исследования трансгрессии в широких рамках этого подхода свидетельствует следующий класс задач: рассмотрим катающееся по неподвижной поверхности тело со сферической опорой малого радиуса; если радиус устремить к нулю, то в пределе получится задача о вращении твердого тела с неподвижной точкой.

Вариационно-аксиоматическая (сокращенно вакономная [7]) теория (ВТ): движения по определению являются экстремалями функционала действия среди кривых, удовлетворяющих связям (силы при этом считаются потенциальными). Герц, рассматривая движение при отсутствии активных сил, такие экстремали называл геодезическими (ныне этот термин понимается иначе — его широкое толкование относится к теории связностей) и не усмотрел в них физического смысла [1]. Однако было показано [7], что ВТ-системы получаются из голономных тоже предельным переходом, но другим — за счет изменения метрики (наподобие сильно эллиптического тензора присоединенных масс у пластинки в идеальной жидкости). Возможно также сочетание КТ и ВТ [8].

Ниже рассматривается группа модельных задач со связями типа саней Чаплыгина, где возможно применение обеих теорий. Описание трансгрессии позволит произвести сравнение КТ- и ВТ-эффектов на общей основе невозмущенного семейства гамильтоновых систем.

1. Лагранжева форма уравнений движения. Различие между КТ и ВТ хорошо видно на системах почти чаплыгинского типа. Пусть заданы уравнения связей

$$x_s^{\boldsymbol{\cdot}} = f_s(x_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{\cdot}}, x_1, \ldots, x_m, t), \quad s = m+1, \ldots, n \tag{1.1}$$

кинетическая энергия системы T не зависит от $x_{m+1}, \ldots, x_n$, (а потенциальная V может зависеть). Обозначим T^* результат подстановки в T выражений (1.1) и составим уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial x_\lambda^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T^*}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} + \sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_\lambda^{\boldsymbol{\cdot}}} = \sum_s p_s\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_s}{\partial x_\lambda^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial f_s}{\partial x_\lambda}\right) \tag{1.2}$$

Чтобы замкнуть систему, к (1.1) и (1.2) надо присоединить еще $n - m$ уравнений. Это будут

$$(1.3)\qquad p_s = \frac{\partial T}{\partial x_s^{\cdot}}\ (\text{КТ});\quad p_s^{\cdot} = -\frac{\partial V}{\partial x_s},\quad p_s(t_0) = 0\ (\text{ВТ})$$

(При указанном для ВТ выборе начального значения p_s решение $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ будет сильной экстремалью функционала действия $\int Ldt$ в том смысле, что при варьировании левый ее конец не остается на месте, а смещается согласованно со связями.) Обобщение на системы общего вида несложно.

Если уравнения связей зависят от параметра ε и при $\varepsilon = 0$ могут быть проинтегрированы, то без уменьшения общности можно считать, что уравнения (1.1) представлены в виде

$$(1.4)\qquad x_s^{\cdot} = \varepsilon f_s (x_1^{\cdot}, \ldots, x_m^{\cdot}, x_1, \ldots, x_m, t, \varepsilon)$$

При $\varepsilon = 0$ получаем семейство голономных систем, зависящее от констант x_s. При $\varepsilon \neq 0$ в (1.2) надо заменить f_s на εf_s; тогда получаются уравнения трансгрессии.

Предлагаемый подход имеет целью сблизить качественные теории движения голономных и неголономных систем. Ясно, что надежд на непосредственное решение уравнений трансгрессии мало и для ее исследования потребуется привлечь асимптотические методы, в первую очередь метод осреднения. Но это возможно будет лишь тогда, когда при $\varepsilon = 0$ получается семейство интегрируемых (в смысле наличия достаточного числа интегралов в инволюции) гамильтоновых систем, в которых можно ввести переменные «действие — угол». В случаях, когда правые части уравнений движения и их первые производные ограничены, осредненную систему можно рассматривать как адекватно отражающую реальные механические эффекты трансгрессии, исходя из того, что большинство решений осредненной системы близко к решениям исходной на весьма больших временах (см., например, изложение результатов Н. Н. Боголюбова и Ж. Бесьеса [9], Д. В. Аносова и А. И. Нейштадта [10]).

2. Почти голономный маятник. В плоскости Oxy движется невесомая пластинка, несущая два T-образно расположенных лезвия, из которых поперечное медленно смещается вдоль себя; на линии продольного лезвия к пластинке прикреплена точечная масса M. Таким образом, мгновенный центр скоростей C пластинки в некоторой системе координат $M\xi\eta$, связанной с пластинкой, имеет координаты $\xi = \varepsilon t + \xi_0$, $\eta = r > 0$. В предположении, что на точку M действует сила $F = -Mg\mathbf{e}_y$, при $\varepsilon = 0$ получается обычный маятник.

Если $C(\xi(t), \eta(t))$ — произвольная точка, движущаяся по известному закону относительно тела, то в качестве координат, определяющих положение тела, можно взять координаты x, y этой точки в неподвижной системе и угол φ поворота тела. В таких координатах, построенных для точки $(\varepsilon t + \xi_0, r)$ (т. е. x, y теперь — координаты центра скоростей тела), уравнения связи и кинетическая энергия тела таковы:

$$(2.1)\qquad dx/d\xi = \cos\varphi,\quad dy/d\xi = \sin\varphi,\quad \xi = \varepsilon t + \xi_0$$

$$2T^* = M(\xi^2 + \eta^2)\varphi^{\cdot 2}$$

Поскольку потенциальная энергия

$$V = Mg(y - r\cos\varphi - \xi\sin\varphi)$$

уравнения (1.2) получают вид (впредь примем, что размерно независимые параметры $M = g = r = 1$)

$$(2.2)\qquad (1 + \xi^2)\varphi^{\cdot\cdot} + 2\varepsilon\xi\varphi^{\cdot} + \sin\varphi - \xi\cos\varphi = \varepsilon(p_x\sin\varphi - p_y\cos\varphi)$$

Зная декартовы координаты центра масс

$$x - \xi\cos\varphi + \sin\varphi,\ y - \xi\sin\varphi - \cos\varphi$$

легко понять, что в КТ тождества (1.3) с учетом связей такие:

$$p_x = 0 + (\xi\sin\varphi + \cos\varphi)\varphi^{\cdot},\ p_y = 0 + (-\xi\cos\varphi + \sin\varphi)\varphi^{\cdot}$$

а в ВТ (1.3) тривиально интегрируются, и это дает

$$p_x = 0,\ p_y = -t$$

После подстановки в (2.2) находим, что уравнения трансгрессии в этой задаче состоят из (2.1) и

$$(2.3)\qquad (1 + \xi^2)\varphi^{\cdot\cdot} + \varepsilon N\xi\varphi^{\cdot} + \sin\varphi - N\xi\cos\varphi = 0$$

причем $N = 1$ для КТ, $N = 2$ для ВТ. Для сравнения укажем, что у маятника с подвижной только относительно тела (т. е. $x^{\cdot} = y^{\cdot} = 0$) точкой подвеса $C(\xi, 1)$ уравнения движения

$$(1 + \xi^2)\varphi^{\cdot\cdot} + 2\varepsilon\xi\varphi^{\cdot} + \sin\varphi - \xi\cos\varphi = 0$$

Здесь и в дальнейшем члены порядка ε^2 отбрасываются без специальных оговорок.

После замены переменной

$$(2.4)\qquad \varphi = \operatorname{arctg} N\xi + \psi$$

уравнение (2.3) перейдет в

$$(2.5)\qquad (1 + \xi^2)\psi^{\cdot\cdot} + \varepsilon N\xi\psi^{\cdot} + \sqrt{1 + (N\xi)^2}\sin\psi = 0$$

Отсюда следует, что невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) может интерпретироваться как маятник переменной длины (точка подвеса движется по $M\eta$)

$$(2.6)\qquad l(\xi) = (1 + \xi^2)(1 + (N\xi)^2)^{-1/2}$$

Помимо ξ, x, y, медленной переменной является удельная (на единицу длины) энергия невозмущенной системы

$$(2.7)\qquad h = {}^1/_2 l(\xi)\psi^{\cdot 2} + (1 - \cos\psi)$$

($h = 0$ в состоянии равновесия).

В силу (2.5)

$$\frac{dh}{d\xi} = -\frac{\xi}{1+\xi^2}\left(1 + \frac{N-1}{1+4\xi^2}\right)(h - (1 - \cos\psi))$$

(переменная ξ играет роль медленного времени), а остальные уравнения получаются из (2.1) подстановкой (2.4).

Осредним уравнения для x', y', h' по периоду невозмущенного движения [9, 10], рассматривая колебательный режим. В системе с энергией (2.7)

$$\langle\sin\psi\rangle = 0,\ \langle\cos\psi\rangle = f(h) = 2\mathbf{E}(\sqrt{h/2})/\mathbf{K}(\sqrt{h/2}) - 1$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$ — полные эллиптические интегралы. Следовательно, осредненные уравнения трансгрессии

$$(2.8)\qquad h' = -\frac{\xi}{1+\xi^2}\left(1 + \frac{N-1}{1+4\xi^2}\right)(h + f(h) - 1)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+(N\xi)^2}}f(h),\quad y' = \frac{N\xi}{\sqrt{1+(N\xi)^2}}f(h)$$

Функция $\mathrm{E}(k)/\mathrm{K}(k)$ с ростом $k \in [0, 1)$ монотонно убывает от 1 до 0. При этом производная ее неограниченно растет, но не быстрее $k(1 - k^2)^{-3/2}$. Следовательно, при росте $h \in [0, 2)$ функция $f(h)$ изменяется от $+1$ до -1, но ее производная не ограничена и оценивается неравенством $|f'(h)| \leqslant 2^{1/2}(2 - h)^{-3/2}$. Равномерной близости решений (2.8) к точным нет. Однако в силу осредненной системы $h' < 0$ и из оценок, которые будут приведены в п. 3, следует, что погрешность метода осреднения в зависимости от начального значения (на постоянном интервале времени порядка $1/\varepsilon$) ухудшается по закону $\exp (2 - h_0)^{-3/2}$.

Разложим f в ряд Тейлора: $f(h) = 1 - h(1 + h/16)/2 + O(h^3)$; эта формула может быть получена при помощи известных разложений E, K или непосредственным вычислением $\langle V \rangle$ путем разложения V в ряд Тейлора, аналогично доказательству формулы Линдштедта ([11], с. 48—51).

В случае малых колебаний $h \approx 0$ и

(2.9) $$x = N^{-1} \operatorname{Arsh} N\xi, \quad y = N^{-1}\sqrt{1 + (N\xi)^2}; \quad y = N^{-1} \operatorname{ch} Nx$$

так что центр скоростей смещается по цепной линии.

В случае колебаний с малой энергией ($h^2 \approx 0$)

(2.10) $$h = h_0 [l(\xi)]^{-1/N}$$

При этом смещение центра скоростей несколько замедляется. По аналогичной схеме можно рассуждать и дальше, так как в уравнении для h разделяются переменные.

Пусть s — натуральный параметр кривой $x(\xi)$, $y(\xi)$, а θ — угол между касательной и осью Ox; ρ — радиус кривизны. Тогда $ds/d\xi = |f(h)|$ и

(2.11) $$\theta = \operatorname{arctg} N\xi, \; \rho = N^{-1}(1 + (N\xi)^2)\,|f(h)|$$

Поскольку $h' < 0$, $f' < 0$, ρ все время возрастает, если $f(h_0) > 0$.

Необходимо подчеркнуть, что краткость ответа в случае ВТ в сильной степени обусловлена выбором начальных условий для p_x, p_y, который снял многозначную зависимость решений от начальных условий, характерную для ВТ [7].

С этой оговоркой можно все-таки заключить, что КТ- и ВТ-эффекты у почти голономного маятника схожи: линия отвеса качания поворачивается (на угол $\operatorname{arctg} N\xi$, как и в состоянии покоя), центр качания получает нетривиальное смещение в перпендикулярном направлении, а энергия качания, вообще говоря, убывает.

3. Некоторые оценки осреднения. Пусть

$$\chi(\Phi, \varphi) = \chi_0(\Phi) + \chi_*(\Phi, \varphi), \quad \chi_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi\, d\varphi$$

обычное выделение среднего у 2π-периодической по φ, зависящей также от переменных Φ, векторной или скалярной функции χ. Обозначим также χ' вектор или матрицу $\partial\chi/\partial\Phi$, пусть $|\cdot|$ — модуль скаляра, норма вектора или согласованная с ней норма матрицы.

Рассмотрим три системы дифференциальных уравнений

(3.1) $$\frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon F(\Phi, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\Phi) + \varepsilon f(\Phi, \varphi)$$

(3.2) $$\frac{d\Theta}{dt} = \varepsilon F_0(\Theta) + \varepsilon^2 R(\Theta, \theta, \varepsilon), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega(\Theta) + \varepsilon f_0(\Theta) + \varepsilon^2 r(\Theta, \theta, \varepsilon)$$

(3.3) $$\frac{d\Psi}{dt} = \varepsilon F_0(\Psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(\Psi) + \varepsilon f_0(\Psi)$$

Первая пусть определена в области $\mathbf{D}\{\Phi_1, \ldots, \Phi_k\} \times S^1 \{\varphi \bmod 2\pi\}$, третья получается из нее осреднением по φ (такое осреднение, захватывающее также и уравнение для быстрой переменной, перестановочно с любыми заменами времени вида $ds = K(\Phi)dt$). Вместе с тем система (3.3) может быть получена в два приема: сначала отображением L_ε

(3.4) $$\Theta = \Phi + \varepsilon\Lambda(\Phi, \varphi), \; \theta = \varphi + \varepsilon\lambda(\Phi, \varphi)$$

система (3.1) переводится в (3.2), а затем просто отбрасываются члены порядка ε^2.

Будем искать Λ, λ с нулевыми средними (тогда отображение L_ε в среднем не смещает слои $\Phi = \text{const}$ и не поворачивает их). Взяв

$$(3.5)\qquad \Lambda(\Phi, \varphi) = -\left(\int_0^\varphi \frac{1}{\omega(\Phi)} F_*(\Phi, \varphi)\, d\varphi\right)_*$$

получим (λ сейчас может быть произвольным)

$$(3.6)\qquad \varepsilon^2 R(\Theta, \theta, \varepsilon) = -\varepsilon(F_0(\Phi + \varepsilon\Lambda) - F_0(\Phi)) + \varepsilon^2(\Lambda' F - (F_*/\omega) f)$$

Система (3.2) определена, вообще говоря, в более узкой области (зависящей от ε и такой, что отображение L_ε обратимо и не выводит за пределы $\mathbf{D} \times S^1$).

Будем рассматривать такие решения введенных систем: $\Phi_\varepsilon(t)$, $\varphi_\varepsilon(t)$; $\Psi(\varepsilon t)$, $\psi_\varepsilon(t)$; $\Theta_\varepsilon(t)$, $\theta_\varepsilon(t)$. При этом

$$\Phi_\varepsilon(0) = \Psi(0) = \mathrm{A},\ \varphi_\varepsilon(0) = \psi_\varepsilon(0) = \alpha$$

$$\Theta_\varepsilon(0) = \mathrm{B}_\varepsilon = \mathrm{A} + \varepsilon\Lambda(\mathrm{A}, \alpha),\ \theta_\varepsilon(0) = \beta_\varepsilon = \alpha + \varepsilon\lambda(\mathrm{A}, \alpha)$$

Предположим, что траектория $\{\Psi(\varepsilon t),\ 0 \leqslant \varepsilon t \leqslant T\}$ лежит в $\mathbf{D}$ вместе со своей δ-окрестностью (которую обозначим Ψ^δ), и пусть $\max\chi$ означает максимум модуля или нормы χ в этой окрестности.

По обычным теоремам об оценках

$$|\Theta_\varepsilon = \Psi| \leqslant |B_\varepsilon - A|\exp(\varepsilon \max F_0' \cdot t) + (\max R/\max F_0')(\exp(\varepsilon\max F_0'\cdot t) - 1)$$

если только система (3.2) определена в Ψ^δ и пока $\Theta_\varepsilon(t) \in \Psi^\delta$. В силу (3.4)

$$|\Theta_\varepsilon - \Psi_\varepsilon| \leqslant \varepsilon \max\Lambda$$

пока $\Phi_\varepsilon \in \Psi^\delta$, и точно также оценивается $B_\varepsilon - A$. В итоге

$$|\Phi_\varepsilon - \Psi| \leqslant \varepsilon[m(\exp\varepsilon Dt + 1) + D^{-1}\max R(\exp\varepsilon Dt - 1)]$$

пока Φ_ε, $\Theta_\varepsilon \in \Psi^\delta$. Здесь было принято, что

$$(3.7)\qquad \max F_0' \leqslant D$$

а оценка $\max\Lambda \leqslant m$ вытекает из требования

$$(3.8)\qquad \max(F_*/\omega) \leqslant m/\pi$$

В силу (3.6) (независимо от λ)

$$\max R \leqslant Dm + \max\Lambda' \max F + (m/\pi)\max f$$

но это неравенство уже будет справедливо в области $L_\varepsilon[\Psi^\delta] \cap \Psi^\delta$. Чтобы в нее попасть, теперь потребуется ограничиться $(\delta - \varepsilon m)$-окрестностью $\Psi(\varepsilon t)$.

Положим наряду с (3.7) и (3.8):

$$(3.9)\qquad \max(F_*/\omega)' \leqslant km/\pi,\ \max F \leqslant M,\ \max f \leqslant \mu M$$
$$c = (k + \mu/\pi)M$$

и получим

$$(3.10)\qquad |\Phi_\varepsilon - \Psi| \leqslant \varepsilon m\,[2e^{\varepsilon Dt} + cD^{-1}(e^{\varepsilon Dt} - 1)]$$

пока $\Theta_\varepsilon \in \Psi^{\delta-\varepsilon m}$, $\Phi_\varepsilon \in \Psi^\delta$ и в предположении, что отображение L_ε взаимно однозначно. Гарантировать справедливость последнего при помощи неравенства можно за счет некоторого уменьшения окрестности.

Проще всего нужные оценки можно получить взяв $\lambda \equiv 0$. Заметим, что если точка $\Phi_0 \in \Psi^{\delta-\varepsilon m}$, то отображение L_ε взаимно однозначно в ее εm-окрестности $U^{\varepsilon m}(\Phi_0)$, если $\varepsilon m < 1/k$. Действительно, из

$$\Phi_1 + \varepsilon\Lambda(\Phi_1, \varphi) = \Phi_2 + \varepsilon\Lambda(\Phi_2, \varphi)$$

следует, что

$$|\Phi_1 - \Phi_2| \leqslant \varepsilon \max \Lambda' \cdot |\Phi_1 - \Phi_2| \leqslant \varepsilon km |\Phi_1 - \Phi_2| < |\Phi_1 - \Phi_2|$$

Пусть теперь $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Psi^{\delta-2\varepsilon m}$. Если $|\Phi_1 - \Phi_2| < 2m\varepsilon$, то $\Phi_i \subset U^{m\varepsilon}(\Phi_0)$, $\Phi_0 \in \Psi^{\delta-m\varepsilon}$. Поэтому $\Theta_1 \neq \Theta_2$. При $|\Phi_1 - \Phi_2| \geqslant 2m\varepsilon$ тот же вывод следует просто из $|\Lambda| < m\varepsilon$. Таким образом, отображение L_ε взаимно однозначно на $\Psi^{\delta-2m\varepsilon}$ и $L_\varepsilon[\Psi^{\delta-2m\varepsilon}] \subset \Psi^{\delta-m\varepsilon}$. Следовательно, если оценка (3.10) справедлива при $t = 0$, то условие $\Phi_\varepsilon \in \Psi^{\delta-2m\varepsilon}$ не нарушится до тех пор, пока правая часть (3.10) будет меньше $\delta - 2m\varepsilon$ и все это время условие (3.10) будет выполняться.

Теперь можно утверждать, что для $0 \leqslant \varepsilon t \leqslant T$ будет

$$(3.11) \qquad |\Phi_\varepsilon - \Psi| < \varepsilon m(2 + c\varepsilon t)e^{\varepsilon D t}$$

пока правая часть меньше $\delta - 2m\varepsilon$. Для большей ясности оценка (3.10) была слегка ухудшена привлечением неравенства

$$(3.12) \qquad (e^{\varepsilon D t} - 1)/D < \varepsilon t e^{\varepsilon D t} \quad (t > 0)$$

Следовательно, на том же интервале времени

$$(3.13) \qquad |\Phi_\varepsilon - \Psi| < \varepsilon C, \quad C = m(2 + cT)e^{DT}$$

при $\varepsilon < \varepsilon_0 = \delta/(C + 2m)$.

Чтобы получить систему (3.3) полностью, наряду с (3.5) возьмем

$$\lambda = -\left(\int_0^\varphi \frac{1}{\omega}[f_* - \omega'\Lambda]\,d\varphi\right)_*$$

Если $\omega' \neq 0$, то λ существенно зависит от Λ и, прибавляя к Λ некоторую функцию $\Lambda_0(\Phi)$, можно, не изменяя $F_0(\Theta)$, прибавить к $f_0(\Theta)$ любую функцию $g(\Theta)$. Наконец, в этом случае оценки дают конечное расхождение θ_ε и ψ на временах порядка $1/\varepsilon$. Единственная возможность получить оценки порядка ε — это перейти к новому времени $ds = \omega^{-1}dt$ и не возвращаться к старому.

Поэтому просто предположим, что $\omega = \text{const}$; теперь $\max \lambda \leqslant \pi\omega^{-1} \max f_*$.

Обеспечим взаимную однозначность L_ε при $\lambda \neq 0$. Для этого наложим требования, уже полученные выше для L_ε с $\lambda = 0$. Тогда можем выразить

$$\Phi = \Theta + \varepsilon K(\Theta, \varphi, \varepsilon)$$

и подставить в λ, так что остается обеспечить монотонность функции φ, ε с параметром Θ:

$$\theta = \varphi + \varepsilon\lambda(\Theta + \varepsilon K(\Theta, \varphi, \varepsilon), \varphi)$$

а именно потребовать

$$\frac{\varepsilon}{\pi\omega}\left[\max f_* + \varepsilon \max f_*' \cdot \frac{m}{1 - \varepsilon km}\right] < 1$$

Дальнейшие оценки аналогичны, а результат равносилен (3.13).

В случае $\omega = \text{const}$, $f \equiv 0$ оценки типа (3.12) могут быть выведены из результатов Ж. Бесьеса (в изложении [9]), относящихся к периодическим системам стандартного вида. В принятых здесь обозначениях это дает

$$(3.14) \qquad |\Phi_\varepsilon - \Psi| \leqslant \varepsilon \cdot 4\pi\omega^{-1}M(1 + \varepsilon\Delta t)\, e^{\varepsilon\Delta t}$$

где $\Delta = \max F'$. В силу неравенств вида $|\chi_0| \leqslant |\chi|$, $|\chi_*| \leqslant 2|\chi|$ можем констатировать, что $D \leqslant \Delta$, $m/\pi \leqslant 2M/\omega$, $km/\pi \leqslant 2\Delta/\omega$, и потому правая часть (3.11) почленно лучше (3.14):

$$2m \leqslant 4\pi M/\omega, \quad mc = mkM \leqslant 2\pi\Delta M/\omega < 4\pi\Delta M/\omega, \quad e^{\varepsilon D t} \leqslant e^{\varepsilon\Delta t}$$

при том, что она получена с ухудшением (3.12).

4. Сани Чаплыгина (конек). Пусть вдоль плоскости Oxy движется твердое тело; его центр масс S имеет координаты x, y в неподвижных осях; с телом связано лезвие, в подвижных осях $S\xi\eta$ имеющее координаты r, d и направленное параллельно оси $S\xi$. Пусть φ — угол между Ox и $S\xi$, m — масса тела, ρ — его центральный радиус инерции, и на тело действуют упругие силы с потенциалом $^1/_2k\,(x^2 + y^2)$. Кинетическая энергия и уравнение связи имеют вид

$$T = {}^1/_2m\,(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + {}^1/_2m\rho^2\varphi^{\cdot 2},\quad -x^{\cdot}\sin\varphi + y^{\cdot}\cos\varphi + \\ + r\varphi^{\cdot} = 0$$

Примем, что размерно независимые параметры $m = \rho = k = 1$, и после замены переменных (ξ, η — компоненты вектора OS в системе $S\xi\eta$)

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,\quad y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi$$

будем иметь

$$\varphi^{\cdot} = \mu\eta^{\cdot},\quad \mu(\xi) = -(r+\xi)^{-1},\quad \mu^{\cdot} = \mu^2\xi^{\cdot},\quad 1 + \mu\xi = -\mu r$$

$$2L_* = \xi^{\cdot 2} + \eta^{\cdot 2} + 2\,(\xi\eta^{\cdot} - \eta\xi^{\cdot})\mu\eta^{\cdot} + (1 + \xi^2 + \eta^2)\mu^2\eta^{\cdot 2} - \\ - \xi^2 - \eta^2 \tag{4.1}$$

а соотношения (1.2) получат вид

$$p = p^K = \xi\eta^{\cdot} - \eta\xi^{\cdot} + (1 + \xi^2 + \eta^2)\mu\eta^{\cdot}\ (\text{КТ}),\quad p = p^B = \\ = \text{const}\ \ (\text{ВТ}) \tag{4.2}$$

Непосредственное следование формулам (1.1), исходя из (4.1), ведет к громоздким выкладкам. Если ввести переменные

$$p_\xi = \xi^{\cdot} - \eta\varphi^{\cdot},\quad p_\eta = \eta^{\cdot} + \xi\varphi^{\cdot}$$

то уравнения движения приведутся к интересному виду, которых может допускать обобщение на целый класс систем Чаплыгина:

$$\xi^{\cdot} = p_\xi - \eta p_\eta/r,\quad \eta^{\cdot} = p_\eta + \xi p_\eta/r,\quad \varphi^{\cdot} = -p_\eta/r \tag{4.3}$$

$$p_\xi^{\cdot} + \xi - p_\eta^2/r = \mu^2\eta^{\cdot}\,(p - p^K)/r \\ p_\eta^{\cdot} + \mu dp^K/dt + \eta + p_\xi p_\eta/r = -\mu^2\xi^{\cdot}\,(p - p^K)/r \tag{4.4}$$

Здесь $p = p^K$ или p^B, а p^K участвует обязательно. Последние уравнения еще надо разрешить относительно p_ξ, p_η (они входят также в $\mu dp^K/dt$).

Введем малый параметр $\varepsilon = \rho/r$. При $\varepsilon \to 0$ лезвие удаляется от S либо распределение масс стремится к точечному; выбор $\rho = 1$ фактически означает переход к безразмерным переменным. В пределе при $\varepsilon = 0$ получается $\varphi^{\cdot} = 0$, т. е. связь становится интегрируемой: приходим к поступательным колебаниям тела. Уравнения (4.3), (4.4) при малых ε получают вид: $\varphi^{\cdot} = -\varepsilon p_\eta$ (связь) и

$$\xi^{\cdot} = p_\xi - \varepsilon\eta p_\eta,\quad \eta^{\cdot} = p_\eta + \varepsilon\xi p_\eta$$

$$p_\xi^{\cdot} = -\xi - \varepsilon p_\eta^2,\quad p_\eta^{\cdot} = -\eta + \varepsilon p_\xi p_\eta$$

причем предельный вид (4.4) одинаков в КТ и ВТ (а в последнем случае не зависит от выбора начальных условий).

Нетрудно показать (например, приведением к стандартному виду по Боголюбову и осреднением), что в первом приближении трансгрессии нет. Главным эффектом во втором приближении (соответствующие уравнения опущены) будет поправка к частоте колебаний по η, тогда как частота колебаний по ξ остается неизменной (в первом случае имеем колебания поперек направления лезвия, а во втором—вдоль). В КТ точная система

(4.4), (4.3) приводится к квазилинейному виду и может исследоваться соответствующими методами.

5. Пластинка, скользящая по лезвию. Продемонстрируем возможность представления неинтегрируемой связи в виде возмущения интегрируемой путем такого искусственного введения малого параметра, что предельная голономная система не существует.

Вдоль неподвижной плоскости Oyz движется твердое тело; координаты его центра масс обозначим y, z, угол поворота φ. Предположим, что в начале координат находится неподвижное лезвие, направленное по оси Oy. Тогда скорость точки тела, оказавшейся над ним, должна быть направлена по лезвию, что приводит к связи

$$z^\cdot = y\varphi^\cdot \tag{5.1}$$

Это хорошо известный пример простейшей в аналитическом отношении неинтегрируемой связи. Кинетическая энергия тела

$$T = {}^1/_2\,(y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}) + {}^1/_2\rho^2\varphi^{\cdot 2}$$

где $m = 1$, ρ — масса тела и центральный радиус инерции. Предположим, что силы имеют потенциал $V(\varphi, y, z)$. Сделаем замену переменной

$$\varphi = \alpha + \varepsilon x, \quad \varepsilon = 1/\rho \tag{5.2}$$

Тогда уравнения движения (преобразованное соотношение (5.1) стоит первым)

$$z^\cdot = \varepsilon y x^\cdot, \quad y^{\cdot\cdot} - \varepsilon^2 y x^{\cdot 2} + \partial V/\partial y = -\varepsilon p_z x^\cdot$$

$$(1 + \varepsilon^2 y^2) x^{\cdot\cdot} + 2\varepsilon^2 y y^\cdot x^\cdot + \varepsilon \partial V/\partial\varphi + \varepsilon \partial V/\partial z \cdot y = \varepsilon p_z y^\cdot$$

$$p_z = z^\cdot = \varepsilon y x^\cdot \ (\text{КТ}), \quad p_z^\cdot = -\partial V/\partial z \ (\text{ВТ})$$

имеют вид, пригодный для применения развиваемой теории (в $\varepsilon\partial V/\partial\varphi$ надо подставить выражение (5.2)). При $\varepsilon = 0$ получается формально система на плоскости x, y: точка единичной массы движется в поле с потенциалом $W(y) = V(\alpha, y, z_0)$.

Интегралы движения: всегда сохраняется полная энергия

$$H = {}^1/_2\,((1 + \varepsilon^2 y^2) x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + V$$

У ВТ-системы при условии $\partial V/\partial\varphi \equiv 0$ есть интеграл

$$(1 + \varepsilon^2 y^2) x^\cdot - \varepsilon p_z y = k$$

а у КТ-системы, когда $\partial V/\partial\varphi \equiv 0$ и потенциал $V(y, z)$ осесимметричен, имеется похожий интеграл (момента относительно начала координат)

$$(1 + \varepsilon^2 y^2) x^\cdot - \varepsilon z y^\cdot = k$$

Если $V = V_1(y) + V_2(x, z)$, то в классической системе переменные разделяются, в силу чего интеграл энергии распадается на два:

$$ {}^1/_2\,(1 + \varepsilon^2 y^2) x^{\cdot 2} + V_2(x, z) = K$$

$$ {}^1/_2 y^{\cdot 2} + V_1(y) = h$$

Рассмотрим движение по инерции с начальными условиями

$$\varphi_0^\cdot = \varepsilon u, \quad y_0^\cdot = v, \quad z_0^\cdot = 0, \quad \varphi_0 = y_0 = z_0 = 0$$

Из интегралов движения следует, что в случае КТ

$$y^\cdot = v, \quad x^\cdot = u\,(1 + \varepsilon^2 y^2)^{-1/2}, \quad z^\cdot = \varepsilon u y\,(1 + \varepsilon^2 y^2)^{-1/2}$$

$$y = vt, \quad x = u\,(\varepsilon v)^{-1}\,\mathrm{Arsh}\,\varepsilon y, \quad z = u\,(\varepsilon v)^{-1}\,(\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2} - 1)$$

При использовании ВТ $p_z^\cdot = 0$, и потому можно принять, что $p_z = 0$:

$$y^\cdot = \sqrt{v^2 + \frac{\varepsilon^2 y^2 u^2}{1 + \varepsilon^2 y^2}}, \qquad x^\cdot = \frac{u}{1 + \varepsilon^2 y^2}, \qquad z^\cdot = \frac{\varepsilon u y}{1 + \varepsilon^2 y^2}$$

С точностью до членов порядка ε^2 КТ- и ВТ-эффекты совпадают. Хорошо видны и потери точности, возникающие при отбрасывании членов порядка ε^2. Качественное описание здесь несложно.

6. Заключение. Известно, стационарные неинтегрируемые связи возможны только в случае, когда число определяющих координат не менее трех. Выше были рассмотрены системы, для которых и достигается этот минимум. В условиях дефицита степеней свободы как бы выявляются наиболее неизбежные расхождения в ВТ- и КТ-эффектах: в первом приближении количественные (но не качественные) расхождения проявились в случае нестационарных связей, тогда как в случае стационарных связей эти расхождения, видимо, всегда следует ожидать лишь в высших приближениях.

Можно показать, что в слабо неголономных системах Чаплыгина со стационарными линейными связями вековых КТ- и ВТ-эффектов не будет ни в каком приближении. Действительно, уравнения движения при связях вида (1.4) таковы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial x_\lambda^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T^*}{\partial x_\lambda} = \varepsilon \sum_s p_s\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_s}{\partial x_\lambda^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial f_s}{\partial x_\lambda}\right)$$

В КТ-модели $p_s = \partial T/\partial x_s^{\boldsymbol{\cdot}}$ и правые части получаются квадратичными по скоростям, возникает обратимая система, для которой (в предположении невырожденности при $\varepsilon = 0$) справедлива теорема Мозера [12] о сохранении торов с условно-периодическими движениями. ВТ-модель, в которой $p_s = \mathrm{const}$, при всех начальных условиях дает просто гамильтоново возмущение типа гироскопических сил.

Автор благодарит В. В. Румянцева, А. В. Карапетяна, В. В. Козлова, А. И. Нейштадта, А. С. Сумбатова за полезные обсуждения и В. Ф. Журавлева за замечания, позволившие существенно улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hertz H.* Die Prinziepien der Mechanik in neuem Zusammenhänge dargestellt: Ges. Werke. B. 3. Leipzig: Barth. 1894. 312 S.
2. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз. 1960. 487 с.
3. *Синдж Дж. Л.* Тензорные методы в динамике. М.: Гостехиздат. 1947. 43 с.
4. *Carathéodory C.* Der Schlitten // Z. angew. Math. und Mech. 1933. B. 13. H. 2. S. 71—76.
5. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука. 1967. 519 с.
6. *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42—51.
7. *Козлов В. В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. III // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 3. С. 102—111.
8. *Козлов В. В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 272. № 3. С. 550—554.
9. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука. 1985. 125 с.
10. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 304 с.
11. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ. 1984. 295 с.
12. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды // Успехи мат. наук (УМН). 1969. Т. 24. Вып. 2. С. 165—211.

Москва

Поступила в редакцию
27.I.1986