Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.01

ОДНО СЛЕДСТВИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ПРИНЦИПА ГАУССА

Вуйичич В. А.

Рассматривается инвариантное представление принципа наименьшего принуждения Гаусса в пространстве положений системы со связями (среди которых могут быть и неголономные). Предлагается модификация построения функции принуждения на конфигурационном пространстве. Модифицированное выражение содержит информацию о связях, наложенных на систему. Из полной системы дифференциальных уравнений получены уравнения для определения реакций связей. Приводится пример использования такого подхода.

Аналитическую форму принципа Гаусса рассматривали многие известные ученые (см. [1, 2]). Однако в аналитической динамике пока нет единства в трактовке этого принципа. Например, утверждается ([3], с. 192), что «принцип Гаусса ... не обладает аналитическими преимуществами других принципов», «имеет меньшее значение», чем принцип наименьшего действия ([3], с. 134). Другие авторы считают ([4], с. 219), что «уравнения Гиббса—Аппеля (с которыми тесно связан принцип Гаусса) представляют наиболее простую и в то же время наиболее общую форму уравнений движения». Но, хотя эти уравнения тесно связаны с принципом наименьшего принуждения, в них фигурирует не функция принуждения

$$Z=\frac{1}{2}\sum_{\nu} m_{\nu}\left(x^{\cdot\cdot}-\frac{X_{\nu}}{m_{\nu}}\right)^{2} \tag{0.1}$$

а функция Гиббса — Аппеля

$$S=\frac{1}{2}\sum_{\nu} m_{\nu}x^{\cdot\cdot 2} \tag{0.2}$$

где m_ν — масса ν-й точки рассматриваемой системы, $x_\nu^{\cdot\cdot}$ — координаты вектора ускорения и X_ν — координаты вектора сил в прямоугольной ортогональной системе координат.

Кроме этих несогласий трудности имеются и при введении обобщенных координат Лагранжа, в которых

$$Z = S - Q_\alpha q^{\cdot\cdot\alpha} \tag{0.3}$$

где Q_α — обобщенные силы. Функции (0.1) и (0.3) неодинаковые и неинвариантные.

В [5] выведена квадратичная форма принуждения Гаусса в конфигурационном пространстве вида

$$2Z^* = g_{\alpha\beta}(a^\alpha - Q^\alpha)(a^\beta - Q^\beta) \tag{0.4}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — координаты метрического тензора, a^α — координаты вектора ускорения и Q^α — соответствующие обобщенные силы. Из принципа Гаусса просто выводятся дифференциальные уравнения движения для голономной

$$\partial Z^*/\partial a^\alpha = 0 \tag{0.5}$$

и неголономной

$$\partial Z^*/\partial a^\mu + c_\mu{}^\sigma\, \partial Z^*/\partial a^\sigma = 0 \tag{0.6}$$

механических систем. Здесь

$$a^\alpha = Dq^{\cdot\alpha}/dt = q^{\cdot\cdot\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} q^{\cdot\beta} q^{\cdot\gamma} \tag{0.7}$$

Однако функция (0.4) не совпадает с принуждением Гаусса (0.1), так как в форму (0.4) не входят компоненты ускорений $\mathbf{a}_\nu$ и векторов сил $\mathbf{F}_\nu$, ортогональных конфигурационному пространству.

1. Рассмотрим движение системы N материальных точек с массами m_ν ($\nu = 1, \ldots, N$), стесненной идеальными склерономными голономными связями вида

$$(1.1) \qquad f_\sigma(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, k)$$

где $\mathbf{r}_\nu$ — радиус-вектор точки M_ν. Координаты материальных точек в некоторой криволинейной системе координат можно обозначить $x^1, x^2, \ldots$ $\ldots, x^{3N}$. В соответствии с этим соотношением массу точки M_ν естественно обозначить $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}$, а связи (1.1)

$$(1.2) \qquad f_\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots x^{3N}) = 0$$

или в параметрическом виде

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(x^1, \ldots x^{3N})\,|_{x^\sigma = x^\sigma(x^{k+1}, \ldots, x^{3N})}$$

Условимся обозначать некоторые k координат через $x^1, \ldots, x^k$, а остальные — через q^α ($\alpha = 1, \ldots, n = 3N - k$), так, что

$$(1.3) \qquad \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q^1, \ldots, q^m;\ x^1, \ldots, x^k)$$

Это означает, что размерность конфигурационного пространства E_{n+k} равна $n + k$. Координатные (базисные) векторы подпространства $R_n \subset$ $\subset E_{n+k}$ обозначим $\mathbf{g}_{\nu\alpha} = \partial\mathbf{r}_\nu/\partial q^\alpha$, а подпространства $E_k \subset E_{3N}$ — $\mathbf{э}_{\nu i} =$ $= \partial\mathbf{r}_\nu/\partial x^i$ ($\alpha = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, k$).

Координатная система выбирается так, что уравнения связей будут иметь вид

$$(1.4) \qquad f_\sigma = x_\sigma - c_\sigma = 0 \quad (c_\sigma = \mathrm{const})$$

В пространстве E_{n+k} на точку M_ν кроме активных сил $\mathbf{F}_\nu$ действуют и наложенные связи (1.2); заменим их реакциями $\mathbf{R}_\nu$. Тогда главный вектор сил в точке M_ν равен

$$(1.5) \qquad \mathbf{F}_\nu{}^\circ = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu$$

Разложим векторы ускорения и силы на их составляющие в выбранной координатной системе:

$$(1.6) \qquad \mathbf{a}_\nu = a^\alpha \mathbf{g}_{\nu\alpha} + a_i \mathbf{э}_\nu{}^i$$

$$\mathbf{F}_\nu/m_\nu = Q^\alpha \mathbf{g}_{\nu\alpha} + F_{i\mathbf{э}_\nu{}^i}, \quad \mathbf{R}_\nu/m_\nu = R_i \mathbf{э}_\nu{}^i$$

где Q^α — контравариантные координаты обобщенных сил в конфигурационном n-мерном пространстве M_n, F_i — ковариантные координаты тех же сил в подпространстве E_k, а a^α и a_i — соответствующие координаты векторов ускорений.

Принуждение Гаусса по определению равно

$$(1.7) \qquad Z = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\mathbf{a}_\nu - \frac{\mathbf{F}_\nu{}^\circ}{m_\nu}\right)^2$$

В ортогональной декартовой системе координат y^1, y^2, y^3 с базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, в которой $\mathbf{F}_\nu{}^\circ = Y_\nu{}^s\mathbf{e}_s$, $\mathbf{a}_\nu = \ddot{y}_\nu{}^s\mathbf{e}_s$, принуждение (1.9) будет равно

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \sum_{s=1}^{3}\left(\ddot{y}_\nu{}^s - \frac{Y_\nu{}^s}{m_\nu}\right)^2$$

или в индексных обозначениях

$$2Z = \delta_{\chi\varkappa}(y^{\cdot\cdot\chi} - Y^\chi)(y^{\cdot\cdot\varkappa} - Y^\varkappa) \tag{1.8}$$

$$\delta_{\chi\varkappa} = m_\chi \mathbf{e}_\chi \cdot \mathbf{e}_\varkappa = \begin{cases} 0, & \chi \neq \varkappa \\ m_\chi, & \chi = \varkappa \end{cases}, \quad Y^\chi = \frac{Y_\nu^{\ \chi}}{m_\nu}$$

Подставим выражение (1.6) в (1.7). Тогда

$$2Z = \sum_{\nu=1}^N m_\nu [(a^\alpha - Q^\alpha)\,\mathbf{g}_{\nu\alpha} + (a_i - F_i - R_i)\,\mathbf{э}_\nu^{\ i}]^2 = \tag{1.9}$$

$$= \sum_{\nu=1}^N m_\nu [(a^\alpha - Q^\alpha)\,\mathbf{g}_{\nu\alpha}]^2 + \sum_{\nu=1}^N m_\nu [(a_i - X_i)\,\mathbf{э}_\nu^{\ i}]^2$$

поскольку скалярное произведение векторов $\mathbf{g}_{\nu\alpha}$ и $\mathbf{э}_\nu^{\ i}$ равно нулю и $X_i = F_i + R_i$.

Введем обозначения

$$g_{\alpha\beta} = \sum_\nu m_\nu \mathbf{g}_{\nu\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\nu\beta}, \quad \mathbf{g}_{\nu\alpha} = \partial \mathbf{r}_\nu / \partial q^\alpha \tag{1.10}$$

$$g_{\alpha i} = \sum_\nu m_\nu \mathbf{g}_{\nu\alpha} \cdot \mathbf{э}_{\nu i}, \quad \mathbf{э}_{\nu i} = \partial \mathbf{r}_\nu / \partial x^i \tag{1.11}$$

$$э^{ij} = \sum_\nu m_\nu \mathbf{э}_\nu^{\ i} \cdot \mathbf{э}_\nu^{\ j} \tag{1.12}$$

Так как

$$\sum_\nu m_\nu [(a^\alpha - Q^\alpha)\mathbf{g}_{\nu\alpha}]^2 = \sum_\nu m_\nu \mathbf{g}_{\nu\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\nu\beta}\,(a^\alpha - Q^\alpha)\,(a^\beta - Q^\beta)$$

$$\sum_\nu m_\nu [(a_i - X_i)\,\mathbf{э}_\nu^{\ i}]^2 = \sum_\nu m_\nu \mathbf{э}_\nu^{\ i} \cdot \mathbf{э}_\nu^{\ j}\,(a_i - X_i)\,(a_j - X_j)$$

то принуждение (1.9) можно привести к виду

$$2Z = g_{\alpha\beta}\,(a^\alpha - Q^\alpha)\,(a^\beta - Q^\beta) + э^{ij}\,(a_i - F_i - R_i)\,(a_j - F_j - R_j) \tag{1.13}$$

Выражение (1.13) принуждения Гаусса эквивалентно выражениям (1.7), (1.8); оно инвариантно, так как (1.13) можно привести к виду (1.8), т. е.

$$2Z = g_{\chi\varkappa}\,(a^\chi - F^{\circ\chi})\,(a^\varkappa - F^{\circ\varkappa})$$

Отметим, что принуждение (1.13) включает все координаты векторов ускорения $a^\alpha = q^{\cdot\cdot\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha q^{\cdot\beta} q^{\cdot\gamma}$ и сил Q^α, относящихся к конфигурационному пространству M_n, и ковариантные координаты ускорения $a_i = э_{ij}\,(x^{\cdot\cdot j} + \Gamma^j_{\chi\varkappa}\, x^{\cdot\chi} x^{\cdot\varkappa})$ и силы X_i, принадлежащие пространству E_k. Из сравнения выражений (1.13) и (0.4) видно, что инвариантное принуждение Гаусса более общее, чем принуждение (0.4) на конфигурационном пространстве M_n, так как $Z = Z^* + Z^{**}$, где

$$2Z^{**} = э^{ij}\,(a_i - F_i - R_i)\,(a_j - F_j - R_j)$$

Этот добавок к выражению (0.4) не изменяет дифференциальные уравнения движения (0.5) и (0.6), так как

$$\partial Z^* / \partial a^\alpha = \partial Z / \partial a^\alpha$$

Между тем принцип Гаусса с принуждением (1.13) дает большее число уравнений, чем (0.6), т. е. больше, чем число степеней свободы рассматриваемой системы. Исходя из того что первая вариация функции Z в смысле Гаусса ($\delta q = \delta q^\cdot = 0$, $\delta x = \delta x^\cdot = 0$) равняется нулю

$$\delta Z = (\partial Z / \partial a^\alpha)\,\delta a^\alpha + (\partial Z / \partial a_i)\,\delta a_i = 0 \tag{1.14}$$

получим n уравнений ковариантного вида (0.5)

$$\partial Z / \partial a^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{1.15}$$

и еще k уравнений контравариантного вида

(1.16) $\partial Z/\partial a_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)$

(см., например, [6], с. 85).

Уравнения (1.16) — следствие соотношения (1.14) либо благодаря тому, что связи заменены силами $\mathbf{R}_\nu$ и все вариации ускорений δa^α и δa_i считаются независимыми, либо согласно методу неопределенных множителей Лагранжа с учетом связей (1.2), удовлетворяющих условиям

(1.17) $$\sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \nabla_i f_\sigma \delta a^i = R_i \delta a^i = 0$$

В этом случае реакции R_i не входят в принуждение (1.13), принимающее вид

(1.18) $$2Z_w = g_{\alpha\beta}(a^\alpha - Q^\alpha)(a^\beta - Q^\beta) + \text{э}^{ij}(a_i - F_i)(a_j - F_j)$$

Учитывая (1.14) и (1.17), уравнения (1.16) запишем в виде

(1.19) $\partial Z_w/\partial a_i = R_i$

Так как в уравнения (1.15) явно не входят связи вида $x^i = c^i$, эта система эквивалентна независимым дифференциальным уравнениям Лагранжа второго рода. Остальные k уравнений (1.16) и (1.19) составляют ту часть уравнений Лагранжа первого рода, из которых можно определить все реакции голономных связей.

2. Функцию Гиббса — Аппеля

(2.1) $$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt}$$

при помощи (1.5), (1.9), (1.10) и (1.12) можно привести к виду

(2.2) $$2S = g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta + \text{э}^{ij} a_i a_j$$

Принуждение Гаусса (1.13) можно представить в виде

(2.3) $$2Z = g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta + \text{э}^{ij} a_i a_j - 2(g_{\alpha\beta} a^\alpha Q^\beta + \text{э}^{ij} a_i X_j) + 2\Phi$$

$$2\Phi = g_{\alpha\beta} Q^\alpha Q^\beta + \text{э}^{ij} X_i X_j = 2\Phi(t, q, \dot{q}; x)_{x=\text{const}}$$

(2Φ — квадратичная форма обобщенных сил, функция координат, обобщенных скоростей и времени). Сравнивая (2.2) и (2.3), получим

(2.4) $$Z = S - g_{\alpha\beta} a^\alpha Q^\beta - \text{э}^{ij} a_i X_j + \Phi$$

Из уравнений (1.15) теперь можно вывести дифференциальные уравнения

(2.5) $\partial S/\partial a^\alpha - g_{\alpha\beta} Q^\beta = 0$

Это — дифференциальные уравнения движения Аппеля

(2.6) $\partial S/\partial q^{\cdot\cdot\alpha} = Q_\alpha$

для голономной системы, так как согласно (0.7)

(2.7) $$\frac{\partial S}{\partial q^{\cdot\cdot\beta}} = \frac{\partial S}{\partial a^\alpha}\frac{\partial a^\alpha}{\partial q^{\cdot\cdot\beta}} = \frac{\partial S}{\partial a^\alpha}\delta_\beta{}^\alpha = \frac{\partial S}{\partial a^\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} Q^\beta = Q_\alpha$$

Уравнения (1.16) или (1.19) нельзя привести к виду уравнений Аппеля, так как для рассматриваемых связей $x^{\cdot\cdot i} = 0$ и частная производная $\partial S/\partial x^{\cdot\cdot i}$ теряет смысл.

3. Пусть на систему точек кроме голономных связей (1.1) наложены еще l неголономных связей

$$\varphi_\mu(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, l < n) \tag{3.1}$$

из которых получаем соотношения для ускорений

$$\mathbf{a}_\nu \cdot \mathrm{grad}_{\mathbf{v}_\nu} \varphi_\mu + \Theta(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0$$

Уравнения вариаций по Гауссу будут следующими:

$$\delta \mathbf{a}_\nu \cdot \mathrm{grad}_{\mathbf{v}_\nu} \varphi_\mu = 0 \tag{3.2}$$

Подставляя соотношения (1.6) в (3.2), получим l соотношений

$$b_{\mu\alpha}\delta a^\alpha + b_\mu{}^i \delta a_i = 0 \tag{3.3}$$

$$b_{\mu\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{g}_{\nu\alpha} \cdot \mathrm{grad}_{\mathbf{v}_\nu} \varphi_\mu, \quad b_\mu{}^i = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{э}_\nu{}^i \cdot \mathrm{grad}_{\mathbf{v}_\nu} \varphi_\mu$$

Методом неопределенных множителей Лагранжа из соотношений (3.3) и (1.14) получим $n + k$ уравнений движения неголономной системы

$$\partial Z / \partial a^\alpha = \sum_{\mu=1}^{l} \lambda_\mu b_{\mu\alpha} \tag{3.4}$$

$$\partial Z / \partial a_i = \sum_{\mu=1}^{l} \lambda_\mu b_\mu{}^i \tag{3.5}$$

Переписывая (3.3)

$$b_{\mu\rho}\delta a^\rho + b_{\mu p}\delta a^p + b_\mu{}^i \delta a_i \quad (\rho = 1, \ldots, l; \; p = l + 1, \ldots, n)$$

при условии $\det | b_{\mu\rho} | \neq 0$ можно определить зависимые вариации

$$\delta a^\mu = c_p{}^\mu \delta a^p + b^{\mu i} \delta a_i \tag{3.6}$$

$$c_p{}^\mu = b_{\rho p} b^{\rho\mu}, \quad b^{\mu i} = b_\rho{}^i b^{\rho\mu}; \quad b^{\rho\mu} = B_{\rho\mu} / | b_{\rho\mu} |$$

$B_{\rho\mu}$ — алгебраическое дополнение элемента $b_{\rho\mu}$.

Подставляя (3.6) в (1.14), получим

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial a^p} + c_p{}^\mu \frac{\partial Z}{\partial a^\mu} \right) \delta a^p + \left(\frac{\partial Z}{\partial a_i} + b^{i\mu} \frac{\partial Z}{\partial a^\mu} \right) \delta a_i = 0$$

Отсюда следует $n + k - l$ уравнений движения неголономной системы

$$\frac{\partial Z}{\partial a^p} + c_p{}^\mu \frac{\partial Z}{\partial a^\mu} = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, l; \; p = l + 1, \ldots, n) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} + b^{i\mu} \frac{\partial Z}{\partial a^\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.8}$$

Уравнения (3.7) и (3.8) можно представить при помощи функции Гиббса — Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial a^p} = Q_p - c_p{}^\mu \left(\frac{\partial S}{\partial a^\mu} - Q_\mu \right) \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = F^i + R^i - b^{i\mu} \left(\frac{\partial S}{\partial a^\mu} - Q_\mu \right) \tag{3.10}$$

Из этих уравнений или из уравнений движения (3.4) получаем явную форму уравнений Лагранжа с множителями

$$q_{\alpha\beta} (q^{\cdot\cdot\beta} + \Gamma^\beta_{\gamma\delta} q^{\cdot\gamma} q^{\cdot\delta}) = Q_\alpha + \sum_{\mu=1}^{l} \lambda_\mu b_{\mu\alpha}$$

Уравнения (3.5), (3.10) или (3.8) указывают зависимость реакций

$$R^i = \Gamma^i_{\alpha\beta} q^{\cdot\alpha} q^{\cdot\beta} - F^i + b^{i\mu} (a_\mu - Q_\mu)$$

от множителей $b^{i\mu}$ неголономных связей (3.6). Ясно, что если все элементы $b^{i\mu}$ равны нулю, то неголономные связи не влияют на величины реакций голономных связей.

В качестве примера рассмотрим движение тяжелого шара массы m и радиуса r без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного вертикального цилиндра радиуса $R > r$. В цилиндрических координатах $x^1 = \rho$, $q^2 = \chi$, $q^3 = \zeta$ при углах Эйлера $q^4 = \varphi$, $q^5 = \psi$, $q^6 = \theta$ неголономные связи заданы соотношениями

$$(R - r)\,\chi^{\cdot} + r\psi^{\cdot} + r\varphi^{\cdot}\cos\theta = 0$$

$$\zeta^{\cdot} - r\theta^{\cdot}\sin(\psi - \chi) - r\varphi^{\cdot}\sin\theta\cos(\psi - \chi) = 0$$

Определим обобщенные силы

$$F_\rho = 0;\; Q_\chi = Q_\varphi = Q_\psi = Q_\theta = 0;\; Q_\zeta = -mg$$

и метрический тензор

$$\| g_{\chi\varkappa} \| = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$$

$$A = \mathrm{diag}\,\{m,\, m\rho^2,\, m\},\qquad B = \begin{Vmatrix} J & J\cos\theta & 0 \\ J\cos\theta & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{Vmatrix}$$

где J — момент инерции шара.

Функция принуждения (1.13)

$$2Z = э^{11}(a_1 - F_1 - R_1)^2 + g_{\alpha\beta}(a^\alpha - Q^\alpha)(a^\beta - Q^\beta)$$

равна

$$(a_1 - R_1)^2/m + a_2a^2 + (a_3 + mg)(a^3 + g) + a_4a^4 + a_5a^5 + a_6a^6$$

Дифференциальные уравнения (3.4) получаются простым дифференцированием; например

$$\partial Z/\partial a^2 = a_2 = \lambda_1(R - r)$$

где $a_2 = \chi$. Получаем пять ковариантных уравнений

$$a_\chi = \lambda_1(R - r),\quad a_\zeta + mg = \lambda_2$$

$$a_\varphi = \lambda_1 r\cos\theta - \lambda_2 r\sin\theta\cos(\psi - \chi)$$

$$a_\psi = \lambda_1 r,\quad a_\theta = -\lambda_2 r\sin(\psi - \chi)$$

или, учитывая уравнения (3.7)

$$a_\chi = a_\psi(R - r)/r,\quad a_\theta = -(a_\zeta + mg)\,r\sin(\psi - \chi)$$

$$a_\varphi = a_\psi\cos\theta - (a_\zeta + mg)\,r\sin\theta\cos(\psi - \chi)$$

Здесь

$$a_\chi = m(R - r)^2\chi^{\cdot\cdot},\quad a_\psi = J d/dt\,(\psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\theta),\quad a_\zeta = m\zeta^{\cdot}$$

$$a_\varphi = J d/dt\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta),\quad a_\theta = J(\theta^{\cdot\cdot} + \varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\sin\theta)$$

Уравнение (3.5), соответствующее координате $x^1 = \mathrm{const}$

$$\partial Z/\partial a_1 = э^{11}(a_1 - R_1) = \lambda_1 b_1{}^1 + \lambda_2 b_2{}^1$$

дает выражение реакции

$$R_1 = a_1 = a_\rho = -mR\chi^{\cdot 2}$$

Здесь учтено, что

$$b_1{}^1 = b_2{}^1 = 0,\; a_\rho = a_1 = \Gamma_{\alpha\beta,1}q^{\cdot\alpha}q^{\cdot\beta} = \Gamma_{22,1}q^{\cdot 2}q^{\cdot 2} = -m\rho\chi^{\cdot}\chi^{\cdot}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз. 1960. 487 с.
2. Вариационные принципы механики / Под ред. Л. С. Полака. М.: Физматгиз. 1959. 932 с.
3. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир. 1965. 408 с.
4. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука. 1971. 635 с.
5. *Vujicic V. A.* Une maniere d'obtenir les equations du mouvement a partir du principe de Gauss en coordonnees generalisees // Math. vesnik. 1964. V. 1. No. 3. P. 215—220.
6. *Vujicic V. A.* Kovarijantna dunamika. Beograd: Mat. inst. 1981. 136 S.

Белград

Поступила в редакцию 15.XII.1986