Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.36

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАНИИ ПУАНКАРЕ

Мархашов Л. М.

Изучаются описания неавтономных механических систем уравнениями Пуанкаре [1] в лагранжевой и канонической формах. Для систем с гамильтонианом, зависящим только от переменных Четаева [2] и времени, доказывается существование полного набора линейных (некоммутирующих) первых интегралов. Исследуются требуемые для этого условия на кинетическую энергию и активные силы. Получены явные формулы для вычисления интегралов при помощи квадратур. Отмечена связь уравнений Пуанкаре с системами гидродинамического типа.

Случай движения автономных механических систем по инерции, когда функция Лагранжа, выраженная в скоростных параметрах, не зависит от координат, отмечен Пуанкаре как особенно интересный. К этому случаю относится и теория геодезических левоинвариантных метрик на группах Ли («обобщенное твердое тело» [3]). Первичным элементом ее конструкций является группа Ли (конфигурационное многообразие). Каждая из задаваемых на ней метрик, инвариантных относительно действий группы, определяет (при дефинитности) кинетическую энергию. В исследованиях, отталкивающихся непосредственно от замечания Пуанкаре, исходным объектом служит механическая система (кинетическая энергия и активные силы). Отсюда — различия в постановках задач и характере получаемых результатов.

1. Исходные соотношения. Приведем сводку всех используемых в дальнейшем фактов из работы [1], в которой они даны вместе с доказательствами. Всюду далее индексы принимают следующие значения:

$$i, j, l, k, p = 1, \ldots, n; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, N; \quad \nu = 1, \ldots, N - s$$

По повторяющимся индексам ведется суммирование.

Пусть x_α — координаты механической системы с s степенями свободы, стесненной $N - s$ идеальными голономными нестационарными связями $f_\nu(x, t) = 0$, явный вид которых знать необязательно. Предположим, что возможные перемещения и действительные скорости системы могут быть выражены формулами

$$\delta x_\alpha = \xi_\alpha{}^j(x, t)\,\Omega_j, \quad x_\alpha^{\cdot} = \xi_\alpha{}^j(x, t)\,\eta_j + \xi_\alpha(x, t); \quad N, n \geqslant s = \operatorname{rank} \| \xi_\alpha{}^j \|$$

в которых параметры Ω_j возможных перемещений и параметры η_j Пуанкаре независимы. Предполагается, что соответствующие операторы

$$X_0 = \partial/\partial t + \xi_\alpha(x, t)\,\partial/\partial x_\alpha, \quad X_j = \xi_\alpha{}^j(x, t)\,\partial/\partial x_\alpha$$

среди которых ровно $s + 1$ линейно несвязанных, образуют базис $(n + 1)$-мерной алгебры Ли (алгебры A)

$$[X_k, X_l] = c_{kl}^p X_p, \quad [X_k, X_0] = c_{k0}^p X_p$$

Пусть $L(t, x, x^{\cdot})$ — функция Лагранжа системы и $L^*(t, x, \eta) \equiv L(t, x, \xi_1{}^j\eta_j + \xi_1, \ldots, \xi_N{}^j\eta_j + \xi_N)$; Q_α — действующие на систему

---

[1] *Мархашов Л. М.* Некоторые свойства и приложения уравнений Пуанкаре — Четаева: Препринт № 273. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1986. 66 с.

неконсервативные силы. Уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_j}\right) = X_j' L^* + \xi_\alpha{}^j Q_\alpha, \quad X_j' = X_j + (c_{0j}^p + c_{lj}^p \eta_l)\frac{\partial}{\partial \eta_p} \tag{1.1}$$

$$x_\alpha^{\cdot} = \xi_\alpha{}^j(x, t)\,\eta_j + \xi_\alpha(x, t) \tag{1.2}$$

содержат $N - s$ избыточных координат x и $n - s$ избыточных параметров η. При $N = n = s$, $c_{0j}{}^p = 0$, $Q_\alpha = 0$, $\partial\xi_\alpha{}^j/\partial t = 0$, $\xi_\alpha = 0$ они превращаются в уравнения Пуанкаре. При $N \geqslant s$, $n = s$, $c_{0j}{}^p = 0$, $Q_\alpha = 0$ — в уравнения Пуанкаре — Четаева для случая нестационарных связей [2].

Отметим некоторые свойства уравнений (1.1).

1°. Из n уравнений (1.1) независимы только s. Прочие уравнения представляют собой линейные комбинации независимых уравнений. Отсюда следует: если независимые уравнения отвечают параметрам $\eta_1, \ldots, \eta_s$, то параметры $\eta_{s+1}, \ldots, \eta_n$ в этих уравнениях являются свободными, т. е. они не связаны никакими дополнительными условиями.

2°. Операторы X_j' образуют базис алгебры, изоморфной алгебре A: $[X_j', X_k'] = c_{jk}{}^p X_p'$.

3°. Уравнения (1.1) можно получить из уже готовых уравнений Лагранжа переходом к квазискоростям по формулам (1.2).

Перейдем в уравнениях (1.1), (1.2) при $n = s$ к переменным Четаева $y_i = \partial L^*/\partial\eta_i$. В механических задачах функция Лагранжа L^* — невырожденная квадратичная форма переменных $\eta_1, \ldots, \eta_s$. По свойству преобразования Лежандра (теорема Донкина [4]) существует обратное преобразование $\eta_i = \partial H^*/\partial y_i$, порождаемое функцией $H^* = \eta_i y_i - L^*$. Уравнения движения приобретают каноническую форму

$$\begin{aligned} x_\alpha^{\cdot} &= \xi_\alpha{}^i \frac{\partial H^*}{\partial y_i} + \xi_\alpha \\ y_j^{\cdot} &= -\left(\xi_\alpha{}^j \frac{\partial H^*}{\partial x_\alpha} + c_{jl}{}^p y_p \frac{\partial H^*}{\partial y_l}\right) + c_{0j}{}^p y_p + \xi_\alpha{}^j Q_\alpha \end{aligned} \tag{1.3}$$

Уравнения (1.3) в избыточных координатах при нестационарных связях впервые получены Четаевым ([2], с. 199) в предположении об отсутствии неконсервативных сил ($Q_\alpha = 0$) и перестановочности оператора X_0 с операторами $X_1, \ldots, X_s$ ($c_{0j}{}^p = 0$). Если $n = s$ и $X_0 = 0$, уравнения (1.1) можно получить непосредственно из уравнений Гамильтона

$$x_i^{\cdot} = \partial H/\partial p_i, \quad p_i^{\cdot} = -\partial H/\partial x_i + Q_i$$

заменой импульсов $y_k = \xi_i{}^k p_i$.

Уравнения (1.3) можно записать в форме

$$\begin{aligned} &x_\alpha^{\cdot} = Y_\alpha{}^* H^* + \xi_\alpha, \quad y_j^{\circ} = -X_j{}^* H^* + c_{0j}{}^p y_p + \xi_\alpha{}^j Q_\alpha \\ &Y_\alpha{}^* = \xi_\alpha{}^i(x, t)\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad X_j{}^* = \xi_\alpha{}^j(x, t)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + c_{jl}{}^p y_p \frac{\partial}{\partial y_l} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Под оператором сдвига вдоль траекторий движения системы $z_i^{\cdot} = f_i(z_i, t)$ понимается в дальнейшем оператор полного дифференцирования по времени в силу уравнений движения функций, заданных в пространстве $\{z, t\}$, $S = \partial/\partial t + f_i(z, t)\,\partial/\partial z_i$, или оператор, действующий на функции, определенные в фазовом пространстве $\{z\}$, $S = f_i(z)\,\partial/\partial z_i$.

Рассмотрим механическую систему с идеальными голономными нестационарными связями, движение которой описывается уравнениями (1.4). Оператор сдвига такой системы

$$S = \frac{\partial}{\partial t} + (Y_\alpha{}^* H^* + \xi_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + (-X_j{}^* H^* + c_{0j}{}^p y_p + \xi_\alpha{}^j Q_\alpha)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

Перечислим некоторые его свойства.

1°. Оператор S допускает представление в виде

$$S = X_0{}^* - \frac{\partial H^*}{\partial x_\alpha} Y_\alpha{}^* + \frac{\partial H^*}{\partial y_j} X_j{}^* \tag{1.5}$$

$$X_0{}^* = X_0 + \left(c_{0j}{}^p y_p + \xi_\alpha{}^j Q_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Таким образом, оператор S принадлежит линейной оболочке, натянутой на операторы $X_0{}^*$, $Y_\alpha{}^*$, $X_j{}^*$.

2°. Система операторов $X_0{}^*$, $Y_\alpha{}^*$, $X_j{}^*$ замкнута. При отсутствии неконсервативных сил ($Q_\alpha = 0$) ее таблица умножения определяется коммутационными соотношениями

$$[X_j{}^*, X_k{}^*] = c_{jk}^p X_p{}^*, \quad [Y_\alpha{}^*, Y_\beta{}^*] = 0 \tag{1.6}$$

$$[X_j{}^*, X_\alpha{}^*] = \frac{\partial \xi_\alpha{}^j}{\partial x_\beta} Y_\beta{}^*, \ [X_0{}^*, \quad \alpha^*] = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} Y_\beta{}^*$$

$$[X_0{}^*, X_k{}^*] = c_{0k}^p X_p{}^*$$

3°. Если силы $Q_\alpha \neq 0$ и не зависят от переменных y, последняя совокупность соотношений в п. 5 будет заменена другой

$$[X_0{}^*, X_k{}^*] = c_{0k}^p X_p{}^* - \left(X_k Q_\beta{}' + \frac{\partial \xi_\alpha{}^k}{\partial x_\beta} Q_\alpha{}'\right) Y_\beta{}^* \tag{1.7}$$

$$Q_\beta{}' = Q_\beta - \partial\,(b_0 + U)/\partial x_\beta$$

где $(b_0 + U)$ — слагаемые H^*, не зависящие от y.

4°. Левые части уравнений связей принадлежат ядру K операторов $X_0{}^*$, $Y_\alpha{}^*$, $X_j{}^*$, т. е.

$$X_0{}^* f_\nu = Y_\alpha{}^* f_\nu = X_j{}^* f_\nu = 0$$

5°. Пусть $x_{\sigma+1}, \ldots, x_s$ — такие координаты консервативной системы, что выполнены условия

$$\partial H^*/\partial x_{\sigma+1} = \ldots = \partial H^*/\partial x_s = 0, \quad \partial \xi_\gamma/\partial x_{\sigma+1} = \ldots$$
$$\ldots = \partial \xi_\gamma/\partial x_s = 0$$
$$\partial \xi_\gamma{}^j/\partial x_{\sigma+1} = \ldots = \partial \xi_\gamma{}^j/\partial x_s = 0; \quad \gamma = 1, \ldots, \sigma$$

Ранг матрицы $\| \xi_j{}^i \|$, из которой удален блок

$$\begin{Vmatrix} \xi_{\sigma+1}^1 & \ldots & \xi_{\sigma+1}^s \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \xi_s{}^1 & \ldots & \xi_s{}^s \end{Vmatrix}$$

равен σ и

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \xi_1{}^1 & \ldots & \xi_1{}^s \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \xi_\sigma{}^1 & \ldots & \xi_\sigma{}^s \end{Vmatrix} = \sigma$$

Тогда в соответствии с (1.5) и (1.6) ядро K состоит из функций f_γ и еще $s - \sigma$ функций ω_μ

$$Y_\gamma{}^* \omega_\mu = X_j{}^* \omega_\mu = X_0{}^* \omega_\mu = 0; \quad \gamma = 1, \ldots, \sigma; \quad j = 1, \ldots, s; \tag{1.8}$$
$$\mu = 1, \ldots, s - \sigma$$

Это функционально независимые первые интегралы механической системы. Если последняя имеет в некотором лагранжевом представлении циклические координаты $x_{\sigma+1}, \ldots, x_{\sigma+m}$ ($m \leqslant s - \sigma$), которые при переходе к канонической форме уравнений включены в число четаевских координат $x_{\sigma+1}, \ldots, x_s$, то все соответствующие циклические интегралы содержатся среди функций ω_μ.

Замечания. 1°. Здесь и в дальнейшем под первым интегралом движения ω_μ понимается решение уравнения $S\omega = 0$. Вопрос об однозначности этого решения и степени соответствия данного определения современным геометрическим представлениям о первых интегралах не обсуждается.

2°. Условие на ранг матрицы $\| \xi_j^i \|$ выполняется автоматически, притом очевидным образом, в двух случаях: при $N = s$ и когда $x_1, \ldots, x_\sigma$ — лагранжевы координаты, а $x_{\sigma+1}, \ldots, x_N$ параметризуются остальными $s - \sigma$ лагранжевыми координатами системы.

Частному случаю, отмеченному Пуанкаре, отвечает следующая ситуация, рассматриваемая далее в пп. 2—4. Механическая система с идеальными голономными нестационарными связями, имеющая s степеней свободы, движется при отсутствии активных сил ($U = 0$, $Q_\alpha = 0$). Пусть путем введения надлежащей алгебры из функции H^* удалось удалить все координаты: $H^* = H^*(t, y)$. Тогда оператор сдвига S окажется элементом линейной оболочки, натянутой на базисную систему операторов X_0^*, $X_1^*, \ldots, X_s^*$ $(s+1)$-мерной алгебры Ли

$$S = X_0^* + \frac{\partial H^*}{\partial y_j} X_j^*, \quad [X_j^*, X_k^*] = c_{jk}^p X_p^*, \quad [X_0^*, X_k^*] = c_{0k}^p X_p^*$$

Это следует из формул (1.5), (1.6). Полагая в уравнениях (1.4)

$$H^* = {}^1/_2 b_{ij}(t)\, y_i y_j + b_i(t)\, y_i + b_0(t) \tag{1.9}$$

получим при $N = s$

$$\begin{aligned} x_\alpha^{\cdot} &= \xi_\alpha^{\,i} b_{ij} y_j + \xi_\alpha^{\,i} b_i + \xi_\alpha \\ y_j^{\cdot} &= c_{l\,j}^{\,p} b_{li} y_p y_i + (c_{0j}^{\,p} + c_{lj}^{\,p} b_l)\, y_p \end{aligned} \tag{1.10}$$

2. О существовании и вычислении первых интегралов. Согласно формулам (1.8), система уравнений

$$X_0^*\omega = X_1^*\omega = \ldots = X_s^*\omega = 0 \tag{2.1}$$

совместна и ее решения — первые интегралы уравнений движения (1.10). Замкнутая система операторов $X_0^*, X_1^*, \ldots, X_s^*$ действует в $(2s+1)$-мерном пространстве $\{t, x, y\}$ и, следовательно, допускает точно $2s + 1 - (s+1) = s$ независимых решений. Покажем, что все они линейны относительно переменных y_j. Интегралы, зависящие только от y_j, нелинейны. Для $s = 3$ они вычислены в явном виде ([5], с. 51). Будем разыскивать совместные решения системы (2.1) в виде $\omega = \mu_k y_k$, $\mu_k = \mu_k(t, x)$. Для функций μ_k получим систему уравнений

$$X_0 \mu_k = c_{p0}^{k}\ \mu_p, \quad X_\nu \mu_k = c_{p\nu}^{k}\ \mu_p \tag{2.2}$$

Докажем ее совместность. Составляя условия совместности для каждой пары уравнений $X_0\mu_k - c_{p0}^k\ \mu_p = 0$, $X_\alpha\mu_k - c_{p\alpha}^k\ \mu_p = 0$, получим в силу условий Якоби

$$\begin{aligned} &[X_\alpha, X_\beta]\, \mu_k - c_{p\beta}^k X_\alpha \mu_p + c_{p\alpha}^k X_\beta \mu_p = \\ &= (c_{\alpha\beta}^p c_{lp}^k + c_{l\alpha}^p c_{\beta p}^k + c_{\beta l}^p c_{\alpha p}^k)\, \mu_l = 0 \end{aligned}$$

и аналогичные соотношения при замене $\alpha \to 0$, $\beta \to \nu$.

Последовательным интегрированием системы (2.2) можно показать, что она имеет s линейно несвязанных решений $(\mu_1^{(k)}, \ldots, \mu_s^{(k)})$, $k = 1, \ldots, s$, образующих фундаментальную систему ($\mu_j^k = \delta_j^k$ в некоторой точке (t_0, x°) общего положения), а общее решение системы (2.2) — их линейная комбинация с постоянными коэффициентами.

3. Вычисление линейных интегралов. Покажем, что если алгебра A с базисом

(3.1) $\quad X_1, \ldots, X_s$

разрешима ([6], с. 208), то линейные интегралы движения вычисляются квадратурами. Речь пойдет, таким образом, о разрешимости в квадратурах уравнений (2.2).

Пусть $(\mu_1{}^i, \ldots, \mu_s{}^i)$ — s каких-либо линейно несвязанных решений системы (2.2) (необязательно образующих фундаментальную систему). Перейдем к новой системе функций $\mu_k{}^{*p}$, определяемых по формулам $\mu_k{}^{*\beta}\mu_\beta{}^l = \delta_k{}^l$, $\det\|\mu_\beta{}^l\| \neq 0$. Эти функции удовлетворяют уравнениям

(3.2) $\quad X_0\mu_k^{*\beta} = c_{0\beta}^p\mu_k^{*p}, \quad X_j\mu_k^{*\beta} = c_{j\beta}^p\mu_k^{*p}, \quad \beta, k, p, j = 1, \ldots, s$

которые получаются из (2.2) умножением на функции $\mu_i^{*\beta}\ \mu_l^{*k}$ и суммированием. Системы (3.2) и (2.2) эквивалентны.

Если алгебра (3.1) разрешима, то разрешима и $(s+1)$-мерная алгебра, получающаяся из нее присоединением оператора X_0 (из коммутационных соотношений $[X_0, X_k] = c_{0k}^p X_p$ видно, что алгебра (3.1) образует ее идеал ([6], с. 143)). В разрешимой алгебре можно указать такой новый базис

(3.3) $\quad X_1{}^\circ, \ldots, X_s{}^\circ, \overset{\circ}{X}_{s+1}, = X_0$

что каждая система операторов $X_1{}^\circ, \ldots, X_i{}^\circ$ $(i = 1, \ldots, s+1)$ отвечает нормальному делителю локальной группы с алгеброй (3.3) ([6], с. 212). Следовательно, коммутационные соотношения будут иметь вид

$$[X_k{}^\circ, X_j{}^\circ] = \overset{1}{c}_{kj}X_1{}^\circ + \overset{2}{c}_{kj}X_2{}^\circ + \ldots + \overset{j}{c}_{kj}X_j{}^\circ, \quad k, j = 1, \ldots, s+1$$

т. е. $c_{kj}{}^p = 0$ при $k < p$ или $j < p$. Уравнения (3.2) в базисе (3.3)

(3.4) $$X_j{}^\circ\mu_k^{*1} = c_{j1}{}^1\mu_k^{*1}, \quad X_j{}^\circ\mu_k^{*2} = c_{j2}{}^1\mu_k^{*1} + c_{j2}{}^2\mu_k^{*2}, \ldots$$
$$X_j{}^\circ\mu_k^{*s} = c_{js}{}^1\mu_k^{*1} + c_{js}{}^2\mu_k^{*2} + \ldots + c_{js}{}^s\mu_k^{*s}, \quad k = 1, \ldots, s;$$
$$j = 1, \ldots, s+1$$

Записанные системы интегрируются последовательно, начиная с первой

$$\mu_k^{*1} = c_k{}^1 \exp c_{j1}{}^1 \int \alpha_j{}^\beta\, dx_\beta, \quad x_{s+1} \equiv t, \quad \xi_j^{s+1} \equiv \xi_j, \quad c_k{}^1 = \mathrm{const}\ (\alpha_j{}^\beta\xi_\beta{}^k\delta_j{}^k)$$

После интегрирования первых i подсистем из (3.4) $(i+1)$-я подсистема представится совместными уравнениями вида

(3.5) $\quad \partial z/\partial x_j = a_j z + b_j$

где a_j, b_j — известные функции $x_1, \ldots, x_{s+1}$. Эта система интегрируется вариацией произвольной постоянной

$$z = C^* z_0, \quad z_0 = \exp\left(\int a_j dx_j\right)$$
$$C^* = C + \int b_j z_0^{-1} dx_j, \quad C = \mathrm{const}$$

поскольку из условий совместности уравнений (3.5) следует, что $a_j dx_j$ и $b_j z_0^{-1} dx_j$ — полные дифференциалы.

Найденная таким образом система функций $\mu_k{}^{*i}$ будет зависеть, по совокупности, от s^2 произвольных постоянных $c_j{}^i$, различный выбор которых будет отвечать выбору некоторого интегрального базиса. Требуется, лишь, чтобы такой базис был невырожденным. Для этого достаточно, например, подчинить постоянные c_j^i требованию, чтобы в какой-либо фиксированной точке, в которой все квадратуры не имеют особенностей, было выполнено условие $\mu_k{}^{*i} = \delta_k{}^i$. В некоторых задачах условия $c_j{}^i = \delta_j$, обеспечивают невырожденность интегрального базиса ($\det \| \mu_j{}^{*i} \| \neq 0$) и одновременно упрощают выкладки. Иногда же оказывается проще вообще не пользоваться описанной выше процедурой (дающей ответ всегда), а вычислять функции $\mu_k{}^i$ непосредственно по формулам (2.2).

Таким образом, справедлива

Теорема. Механическая система с s степенями свободы и голономными идеальными нестационарными связями, кинетическая энергия которой в переменных Четаева не зависит от координат, при движении в отсутствие активных сил допускает s (не менее) линейных первых интегралов. Если алгебра Ли, при помощи которой осуществлен переход к переменным Четаева, разрешима, эти интегралы вычисляются по явным формулам в квадратурах.

Заметим, что если алгебра коммутативна, для автономных систем может быть явно указано преобразование координат, превращающее все s линейных интегралов в циклические.

4. Об условиях приведения кинетической энергии склерономной системы к виду, не зависящему от координат. Пусть лагранжиан и функция H^* системы

$$L = {}^1/_2 a_{ij}(t, x)\, x_i{}^{\cdot} x_j{}^{\cdot} + a_i(t, x)\, x_i{}^{\cdot} + a_0(t, x) - U(x) \tag{4.1}$$

$$H^* = {}^1/_2 b_{ij}(t)\, y_i y_j + b_i(t)\, y_i + b_0(t) + U(x)$$

Тогда

$$b_{ij} = a^{kl}\alpha_i{}^k \alpha_j{}^l, \quad b_i = -(a^{kl}a_k + \xi_l)\,\alpha_i{}^l \tag{4.2}$$

$$b_0 = {}^1/_2 a^{kl} a_k a_l - a_0$$

$$a^{kl}a_{li} = \delta_i{}^k, \quad \alpha_i{}^l \xi_l{}^k = \delta_i{}^k$$

Для доказательства вычислим

$$y_\sigma \eta_\sigma - L^* = {}^1/_2 a_{ij}(\xi_j{}^\tau \eta_\tau + \xi_j)\,\xi_i{}^\sigma \eta_\sigma - {}^1/_2 a_{ij}(\xi_j{}^\tau \eta_\tau + \xi_j)\,\xi_i - a_i \xi_i - a_0 + U$$

Заменив в правой части этого выражения слагаемые, содержащие функции η_σ, по формулам

$$a_{kj}(\xi_j{}^\tau \eta_\tau + \xi_j) = y_\sigma \alpha_\sigma{}^k - a_k, \quad \xi_k{}^l \eta_l = a^{kl}(y_\sigma \alpha_\sigma{}^l - a_l) - \xi_k$$

получим соотношения (4.2), а также

$$H^* = {}^1/_2 a^{kl}(y_\sigma \alpha_\sigma{}^k - a_k)(y_\tau \alpha_\tau{}^l - a_l) - \alpha_\sigma{}^k \xi_k y_\sigma - a_0 + U$$

Видно, что функция H^* не может быть получена из функции Гамильтона системы

$$H = {}^1/_2 a^{kl}(p_k - a_k)(p_l - a_l) - a_0 + U$$

заменой $p_k = y_i \alpha_i{}^k$, если $\Sigma \xi_i{}^2 \neq 0$; в этом смысле функция H^* при $\Sigma \xi_i{}^2 \neq 0$ не является гамильтонианом системы.

Напомним для удобства формулы Маурера ([6], с. 104]

$$\partial \alpha_\gamma{}^\tau / \partial x_j - \partial \alpha_\gamma{}^j / \partial x_\tau = c_{\mu\nu}^\gamma \alpha_\mu{}^\tau \alpha_\nu{}^j \tag{4.3}$$

Пусть связи, наложенные на механическую систему, не зависят от времени. Тогда $a_i = a_0 = 0$, $\partial a_{ij}/\partial t = 0$. Без нарушения общности можно положить $b_{ij} = \delta_j{}^i$ и $b_i = 0$ (взяв $\xi_l = 0$). Первая группа формул (4.2) дает

$$a_{i\tau} = \alpha_\gamma{}^i \alpha_\gamma{}^\tau \tag{4.4}$$

Записав результат дифференцирования соотношений (4.4) с учетом (4.3), а также формул $\xi_j{}^k = a^{\sigma j}\alpha_k{}^\sigma$, после введения символа Кристоффеля второго рода и преобразования слагаемых, содержащих структурные константы, путем замены индексов найдем

$$(4.5)\qquad \partial\alpha_k{}^i/\partial x_\tau = \Gamma^\beta_{i\tau}\alpha_k{}^\beta + \overset{*}{c}{}^\gamma_{\mu k}\alpha_\gamma{}^i\alpha_\mu{}^\tau, \quad \overset{*}{c}_{\mu k} = {}^1/_2\,(c^\gamma_{\mu k} + c^\mu_{\gamma k} + c^k_{\gamma\mu})$$

$$\Gamma_{i\tau}{}^\beta = {}^1/_2 a^{\beta j}\,(\partial a_{ij}/\partial x_\tau + \partial a_{\tau j}/\partial x_j - \partial a_{i\tau}/\partial x_j)$$

Коммутативный случай: $c_{jk}{}^i = 0$. Найдем условия совместности системы (4.5). Для каждой пары уравнений

$$\partial\alpha_k{}^i/\partial x_\tau = \Gamma_{i\tau}{}^\beta\alpha_k{}^\beta, \quad \partial\alpha_k{}^i/\partial x_\sigma = \Gamma_{i\sigma}{}^\beta\alpha_k{}^\beta$$

получим

$$R^\gamma_{\sigma i\tau} \equiv \partial\Gamma_{i\tau}{}^\gamma/\partial x_\sigma - \partial\Gamma_{i\sigma}{}^\gamma/\partial x_\tau + \Gamma^\gamma_{\beta\sigma}\Gamma_{i\tau}{}^\beta - \Gamma^\gamma_{\beta\tau}\Gamma_{i\sigma}{}^\beta = 0$$

Использовав символ Кристоффеля первого рода $\Gamma_{j,i\tau}$, выразим найденные условия через тензор кривизны Римана с опущенным индексом

$$(4.6)\qquad R_{mi\tau\sigma} \equiv \frac{\partial\Gamma_{m,\,i\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial\Gamma_{m,\,i\sigma}}{\partial x_\tau} + a^{j\beta}\,(\Gamma_{j,i\sigma}\Gamma_{\beta,\,m\tau} - \Gamma_{j,\,i\tau}\Gamma_{\beta}\qquad) = 0$$

$$\Gamma_{j,\,i\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial a_{\tau j}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{i\tau}}{\partial x_j}\right), \quad \Gamma_{i\tau}{}^\beta = a^{j\beta}\Gamma_{j,\,i\tau}$$

Это известное условие изометричности риманова пространства с метрикой $ds^2 = a_{ij}dx_idx_j$ евклидову. Число алгебраически независимых компонент тензора Римана равно $s^2\,(s^2 - 1)/12$. Они удовлетворяют следующим свойствам симметрии: $R_{mi\tau\sigma} = -R_{im\tau\sigma} = -R_{mi\sigma\tau} = R_{\tau\sigma mi}$, $R_{mi\tau\sigma} + R_{m\tau\sigma i} + R_{m\sigma i\tau} = 0$.

Можно показать, что соотношения (4.4) — частные интегралы уравнений (4.5). Это означает, что если условия (4.6) выполнены, то функции $\alpha_k{}^i$ вычисляются путем нахождения общего решения системы (4.5), а постоянные этого решения определяются из условий (4.4).

Пример. Рассмотрим движения по инерции автономных систем с двумя степенями свободы. При $s = 2$ условия (4.6) сводятся к одному:

$$(4.7)\qquad R_{1212} = 0$$

Движение системы можно представить как движение материальной точки по поверхности с метрикой

$$ds^2 = a_{11}dx_1{}^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}dx_2{}^2$$

Если условие (4.7) выполнено, метрика приводится к евклидовой. Соответствующее преобразование координат вычисляется квадратурами. В квадратурах решается и соответствующая механическая задача — вычисляются траектории (геодезические), два линейных интеграла и общее решение.

Пусть, например, поверхность, по которой движется материальная точка,— произвольный гладкий конус. Кинетическая энергия материальной точки в сферических координатах $\varphi \equiv x_1$, $\alpha \equiv \alpha\,(x_1)$, $R \equiv x_2$

$$T = {}^1/_2\,[x_1{}^2\,(\alpha'^2\,(x_1) + \sin^2\alpha\,(x_1))\,\dot x_1{}^2 + \dot x_2{}^2] \qquad (m = 1)$$

Условие (4.7) удовлетворяется при любой функции $\alpha\,(x_1)$ (предполагаем ее 2π-периодической, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < \pi/2$), так как конус — развертывающаяся поверхность. Замена переменных

$$x_1' = \int x_2\,(\alpha'^2 + \sin^2\alpha)\cos\psi dx_1 + \sin\psi dx_2, \quad \psi = \int (\alpha'^2 + \sin^2 x)^{1/2}\,dx_1$$

$$x_2' = \int x_2\,(\alpha'^2 + \sin^2\alpha)\sin\psi dx_1 - \cos\psi dx_2$$

приводит кинетическую энергию к канонической форме $T = {}^1/_2\,(\dot x_1'^2 + \dot x_2'^2)$.

Все величины динамической задачи вычисляются также при помощи квадратур. Чтобы иметь дело лишь с явными и элементарными функциями, ограничимся случаем прямого кругового конуса ($\alpha = \mathrm{const}$). Уравнения траекторий в этом случае

$$R = a\,(b\sin\psi + c\cos\psi)^{-1}, \quad \psi = \varphi\sin\alpha$$

Линейные интегралы и полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби таковы

(4.8) $$R\varphi^{\cdot} \cos\psi + R^{\cdot} \sin\psi/\sin\alpha = c_1, \quad R\varphi^{\cdot} \sin\psi - R^{\cdot} \cos\psi/\sin\alpha = c_2$$

$$V = \sqrt{2h}R \sin(\psi - \varphi_0); \quad h, \varphi_0 = \text{const}$$

Некоммутативный случай. Можно непосредственно установить условия совместности системы уравнений (4.5)

(4.9) $$R_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4} = C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}\alpha_{\beta_1}{}^{\varepsilon_1}\alpha_{\beta_2}{}^{\varepsilon_2}\alpha_{\beta_3}{}^{\varepsilon_3}\alpha_{\beta_4}{}^{\varepsilon_4}$$

(4.10) $$C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} = \overset{*}{c}{}^{\gamma}_{\beta_3\beta_2}\overset{*}{c}{}^{\beta_1}_{\beta_4\gamma} + c^{\gamma}_{\beta_3\beta_4}\overset{*}{c}{}^{\beta_1}_{\gamma\beta_2} - \overset{*}{c}{}^{\gamma}_{\beta_4\beta_2}\overset{*}{c}{}^{\beta_1}_{\beta_3\gamma}$$

(для правильной тензорной расстановки индексов верхний и нижний индексы функций $\alpha_j{}^i$ следовало бы поменять местами).

Постоянный тензор $C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$ обладает такими же свойствами симметрии, как и тензор Римана

$$C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} = -C_{\beta_2\beta_1\beta_3\beta_4} = -C_{\beta_1\beta_2\beta_4\beta_3} = C_{\beta_3\beta_4\beta_1\beta_2},$$

$$\sum_{(\beta_2,\,\beta_3,\,\beta_4)} C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} = 0$$

вытекающими из формул (4.10).

Как и в коммутативном случае, соотношения (4.4) представляют собой интегральные многообразия уравнений (4.5). При $s = 2$ вычисления дают

$$R_{1212} = C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}\alpha_{\beta_1}{}^1\alpha_{\beta_2}{}^2\alpha_{\beta_3}{}^1\alpha_{\beta_4}{}^2 = -[(c_{12}{}^1)^2 + (c_{12}{}^2)^2](\alpha_1{}^1\alpha_2{}^2 - \alpha_2{}^1\alpha_1{}^2)^2$$

Поскольку $(\alpha_1{}^1\alpha_2{}^2 - \alpha_2{}^1\alpha_1{}^2)^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$, условия (4.9) сводятся к одному

(4.11) $$R_{1212} = -[(c_{12}{}^1)^2 + (c_{12}{}^2)^2](a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2)$$

описывающему поверхности постоянной отрицательной кривизны. Пример такой поверхности — псевдосфера (образована вращением трактрисы).

Таким образом, уравнения движения механических систем с двумя степенями свободы, коэффициенты кинетической энергии которой удовлетворяют условию (4.11), допускают, согласно теореме п. 3, два линейных интеграла.

В задачах размерности $s \geqslant 3$ условия (4.9) вводят новые (помимо соотношений (4.4)) конечные связи на функции $\alpha_j{}^i$. Это обстоятельство препятствует построению обозримых формул, выражающих условия совместности системы (4.5) в терминах одного лишь тензора a_{ij} и его производных (т. е. формул, не содержащих неизвестные функции $\alpha_j{}^i$). С другой стороны, это же обстоятельство позволяет иногда указывать построения решений уравнений (4.5) без их интегрирования.

Опишем один из подобных способов. Пользуясь соотношениями (4.9), вычислим компоненты тензора Риччи

$$R_{\varepsilon_2\varepsilon_4} = a^{\varepsilon_1\varepsilon_3}R_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4} = C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}\alpha^{\varepsilon_1}_{\beta_1}\alpha^{\varepsilon_2}_{\beta_2}\alpha^{\varepsilon_3}_{\beta_3}\alpha^{\varepsilon_4}_{\beta_4}\xi^{\gamma}_{\varepsilon_1}\xi^{\gamma}_{\varepsilon_3} = h_{\beta_2\beta_4}\alpha^{\varepsilon_2}_{\beta_2}\alpha^{\varepsilon_4}_{\beta_4}$$

$$h_{\beta_2\beta_4} = \sum_{\beta=1}^{s} C_{\beta\beta_2\beta\beta_4}$$

Отсюда, после учета формул $\xi_k{}^l = a^{ik}\alpha_l{}^i$, $\xi_j{}^i\,\alpha_k{}^j = \delta_k{}^i$, получим $a^{i\gamma}R_{k\gamma}\alpha_l{}^i = h_{\gamma l}\alpha_\gamma{}^k$, или в матричной форме

(4.12) $$R^*\alpha = \alpha h; \quad R^* = (a^{\gamma\beta}R_{k\beta}), \quad \alpha = (\alpha_l{}^\gamma), \quad h = (h_{\gamma l})$$

Из подобия матриц R^* и h следует, что собственные значения матрицы R^*, а следовательно, и коэффициенты ее характеристического уравнения должны быть постоянны. (На практике эти необходимые условия следует проверять в первую очередь.) Благодаря этому среди уравнений (4.12) (в которых R^* и h — симметрические матрицы) алгебраически независимых будет не более $s(s+1)/2 - s = s(s-1)/2$. В общем положении число независимых уравнений может оказаться и не менее $s(s-1)/2$.

Вместе с $s\,(s+1)/2$ уравнениями (4.4) получим s^2 уравнений для вычисления функций α_j^i. Результат подстановки полученных таким образом функций в уравнения (4.5) даст необходимые и достаточные условия разрешимости поставленной задачи.

5. Движения при действии активных сил. Обратимся к случаям, когда механическая система подвержена действию некоторых активных сил как консервативных, так и неконсервативных. Последние, ради простоты, будем считать не зависящими от скоростей, т. е. переменными позиционными. Связи по-прежнему считаем голономными и нестационарными; кинетическую энергию, преобразованную к переменным Четаева,— не зависящей от координат (см. (1.9)). Однако при наличии сил функцию b_0, входящую в выражение для H^* согласно второй формуле (4.1), нет нужды считать не зависящей от координат: ее можно присоединить к потенциальной энергии $U\,(x)$ и силы, отвечающие сумме $b+U$, отнести к неконсервативным. В этом случае полученные силы будем называть приведенными и обозначать Q_α'. Очевидно, $Q_\alpha' = Q_\alpha - \partial\,(b_0+U)/\partial x_\alpha$. Предположим, что после введения надлежащей алгебры и сил Q_α'

$$H^* = {}^1/_2 b_{ij}\,(t)\,y_i y_j + b_i\,(t)\,y_i \tag{5.1}$$

Коммутационные соотношения для рассматриваемого случая будут (1.6), (1.7).

Для того чтобы система операторов X_0^*, X_k^* оставалась замкнутой и при наличии приведенных сил, как показывают соотношения (1.7), необходимо и достаточно выполнение условий

$$X_k Q_i' = -Q_\alpha' \partial\xi_\alpha{}^k/\partial x_i$$

которым можно придать другую, эквивалентную форму

$$X_i Q_k^* = c_{ik}{}^l Q_l^*, \quad Q_k^* = \xi_\alpha{}^k Q_\alpha'$$

Из совместности этой системы, доказываемой как обычно, вытекает существование ее решений, а также возможность их вычисления в квадратурах, если алгебра A разрешима (ср. п. 3).

Найдем условия, при которых силы Q_α' допускают силовую функцию (возможно, зависящую от времени)

$$Q_\alpha' = \partial U'/\partial x_\alpha, \quad Q_k^* = \xi_\alpha{}^k \partial U'/\partial x_\alpha = X_k U'$$

Из условий (5.1) следует

$$X_j X_k U' - c_{jk}^l X_l U' = (X_j X_k - c_{jk}^l X_l)\,U' = X_k X_j U' = X_k Q_j^* = 0$$

$$Q_j^* = c_j^*\,(t), \quad c_j^* c_{ik}^j = 0 \tag{5.2}$$

Выполнение условий (5.2) также и достаточно для того, чтобы силы Q_α' допускали силовую функцию. В самом деле, $Q_k' = c_l^* \alpha_l{}^k$. Умножив уравнения Маурера на c_l^* и просуммировав по l, получим

$$\frac{\partial c_l^* \alpha_l{}^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial c_l^* \alpha_l{}^\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial Q_\mu'}{\partial x_\nu} - \frac{\partial Q_\nu'}{\partial x_\mu} = c_l^* c_{jk}^l \alpha_j{}^\mu \alpha_k{}^\nu = 0$$

Отсюда $Q_\alpha' = \partial U'/\partial x_\alpha$, $U' = U'\,(t, x)$.

Определим функции $\mu_k{}^i\,(t, x)$ формулами (2.2): $X_0 \mu_k{}^i = c_{p0}{}^k \mu_p{}^i$, $X_\nu \mu_k{}^i = c_{p\nu}{}^k \mu_p{}^i$. Выясним свойства произведений $\varepsilon^i = \mu_k{}^i Q_k^*$. Имеем

$$X_\nu \varepsilon' = \mu_k{}^i X_\nu Q_k^* + Q_k^* X_\nu \mu_k{}^i = \mu_k{}^i c_{\nu k}^l Q_l^* + Q_k^* c_{p\nu}^k \mu_p{}^i =$$
$$= (c_{\nu k}^l + c_{k\nu}^l)\,\mu_k{}^i Q_l^* = 0$$

Отсюда $\partial\varepsilon^i/\partial x_j = 0$ и $\mu_k{}^i Q_k^* = \varepsilon^i\,(t)$. Таким образом, наиболее общий вид величин Q_α', отвечающих допустимым силам, определяется, с точностью до произвола функций $\varepsilon(t)$, наложенными на механическую систему связями

$$Q_l^* = \varepsilon^i(t)\mu_i^{*l}, \quad \mu_i^{*l}\mu_k{}^i = \delta_k{}^l$$

Будем искать линейные интегралы рассматриваемой механической системы в виде $\omega_i' = \mu_j{}^i y_j + \mu_0{}^i(t)$. Подставив эти выражения в уравнения $X_1^*\omega_1' = 0, \ldots, X_s^*\omega_i' = 0$, получим

$$X_k^*\omega_i' = y_j X_k \mu_j{}^i + \mu_j{}^i c_{kj}^p y_p = (c_{pk}^j + c_{kp}^j)\mu_p{}^i y_j = 0$$

Выбором функций $\mu_0{}^i(t)$ попытаемся удовлетворить уравнениям $X_0^*\omega_i' = 0$

$$X_0^*\omega_i' = y_i X_0 \mu_j{}^i + \mu_j{}^i(c_{0j}{}^p y_p + Q_j^*) + d\mu_0{}^i(t)/dt =$$
$$= (c_{p0}^j + c_{0p}^j)\mu_p{}^i y_j + \mu_j{}^i Q_j^* + d\mu_0{}^i(t)/dt = \varepsilon^i(t) + d\mu_0{}^i(t)/dt$$

Очевидно, уравнения будут удовлетворены, если положить

$$\mu_0{}^i(t) = -\int \varepsilon^i(t)\,dt$$

Таким образом, искомые линейные интегралы

$$\omega_i' = \mu_j{}^i(t, x)\,y_j - \int \varepsilon^i(t)\,dt = c_i$$

Поскольку $\mu_j{}^i y_j = \omega_i$ — первые интегралы той же механической системы при отсутствии допустимых сил, наложение последних приводит к эволюции этих интегралов $\omega_i = \int \varepsilon^i(t)\,dt + c_i$.

Заметим, что если основная алгебра коммутативна, то выполнены условия (5.2) и движение происходит в поле с некоторой силовой функцией. В этом случае $\mu_j{}^i = \mu_j{}^i(t)$. Если $\mu_j{}^i = \delta_j{}^i$, то $\varepsilon^j = c_j^*$. Первые интегралы имеют вид

(5.3) $$\omega_i' = y_i - \int c_i^*\,dt = c_i$$

а силовая функция вычисляется квадратурой

(5.4) $$V \equiv U' = c_j^* \int \alpha_j{}^l\,dx_l$$

Последняя может оказаться неоднозначной функцией координат механической системы. Тогда задача о движении под действием допустимых сил теряет механический смысл.

Пример. В задаче о движении материальной точки по поверхности прямого кругового конуса

$$\alpha_1{}^1 = x_2\cos\psi,\ \alpha_1{}^2 = \sin\psi/\sin\alpha,\ \alpha_2{}^1 = x_2\sin\psi$$
$$\alpha_2{}^2 = -\cos\psi/\sin\alpha,\ x_1 = \varphi,\ x_2 = R\sin\alpha,\ \psi = x_1\sin\alpha$$

Здесь имеет место коммутативный случай. Вычисление по формуле (5.4) дает

$$V = R\,[c_1^*(t)\sin(\varphi\sin\alpha) - c_2^*(t)\cos(\varphi\sin\alpha)]$$

Силовая функция V однозначна лишь при $\alpha = \pi/2$, когда материальная точка движется по плоскости в однородном поле сил. При $\alpha \neq \pi/2$ действующие на точку силы утрачивают механический характер, но уравнения движения, согласно (5.3), допускают линейные интегралы, соответствующие (4.8) при замене c_1, c_2 на $c_1 - \int c_1^* dt$, $c_2 - \int c_2^* dt$.

6. Замечание о характере уравнений движения. Системы гидродинамического типа. Если гамильтониан системы удалось привести к виду (5.1), уравнения движения записываются в форме (Q_l' — приведенные силы)

(6.1) $$x_\alpha{}^\cdot = b_{ij}\xi_\alpha{}^i y_j + \xi_\alpha{}^i b_i + \xi_\alpha$$

(6.2) $$y_j{}^\cdot = c_{lj}^p b_{li} y_p y_i + (c_{lj}^p b_l + c_{0j}^p)\,y_p + \xi_l{}^j Q_l'$$

Характерная особенность полученного описания механической задачи состоит в том, что при $Q_j^* = c_j^*(t)$ уравнения для переменных Четаева y_j отделены от остальных и поэтому могут иметь самостоятельное происхождение. Так, при $b_{li} = \delta_i^l$, $b_l = c_{0j}^p = Q_l' = 0$ уравнения (6.2) можно представить в виде

$$y_j^{\cdot} = A_{jlk} y_l y_k, \qquad A_{ilk} = {}^1/_2 \, (c_{ki}^l + c_{li}^k)$$

Можно проверить справедливость тождеств $A_{ilk} = A_{ikl}$, $A_{ilk} + A_{lki} + A_{kil} = 0$ Если на структурные константы наложить дополнительные условия $c_{il}^l = 0 \; (A_{ill} = 0)$, придем к системам гидродинамического типа [7].

В случаях, когда уравнения (6.2) описывают некоторую отдельную задачу, уравнения (6.1) приобретают вспомогательный характер. Входящие в них компоненты операторов X_0, X_k можно выбирать произвольно, но с соблюдением условия: структурные константы должны выбираться в соответствии с поставленной задачей. Если при этом величины $Q_j^* = \xi_l^j Q_l'$ оказываются в классе допустимых, а уравнения (6.1) (с учетом имеющихся в данном случае s линейных интегралов) можно проинтегрировать, задача решается до конца.

В других случаях, напротив, может обнаружиться интегрируемость уравнений (6.2) при допустимых силах. Тогда в условиях разрешимости линейных интегралов относительно координат x_α получим полное решение механической задачи, описываемой системой (6.1), (6.2).

Автор благодарит В. В. Румянцева и А. С. Сумбатова за обсуждение предмета данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mecanique // C. r. Acad. sci. 1901. V. 132. P. 369—371.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 535 с.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974. 432 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз. 1960. 296 с.
5. *Мархашов Л. М.* Об уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре — Четаева // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 43—55.
6. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 396 с.
7. Нелинейные системы гидродинамического типа / Под ред. А. М. Обухова. М.: Наука. 1974. 160 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.VII.1986