Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.36

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ПУЧКОВ

Гаращенко Ф. Г.

Рассматривается задача практической устойчивости (ПУ) движения, которая обобщает известную постановку о $\{\lambda, A, t_0, T\}$-устойчивости по Н. Г. Четаеву. Для линейных систем получены критерии для оптимальной оценки условий ПУ. При помощи введенного понятия устойчивости по направлению разработаны алгоритмы построения экстремальных множеств устойчивости. Ставится задача максимизации областей ПУ. Исследуются задачи структурно-параметрической оптимизации разрывных динамических систем, максимизации функции максимума по начальным условиям и независимой переменной. На основе разработанных алгоритмов ПУ и параметрической оптимизации предлагаются подходы к оптимальному проектированию систем ускорения и фокусировки.

В отличие от имеющихся работ по устойчивости движения на конечном интервале времени [1, 2] ниже на основании результатов, полученных в [3—5], для исследования ПУ развивается численный подход.

1. Численные исследования по практической устойчивости. Рассмотрим в пространстве n-мерного вектора состояний x множества Φ_t и C_0, содержащие внутреннюю точку $x(t) \equiv 0$, и систему уравнений

$$x^{\cdot} = f(x, t),\ f(0, t) \equiv 0,\ t \in [t_0, T] \tag{1.1}$$

(точкой обозначается производная по времени).

Предполагаем, что вектор-функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Определение 1.1. Невозмущенное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1.1) назовем $\{C_0, \Phi_t, t_0, T\}$-устойчивым, если из начальных условий $x(t_0) \in C_0$ для ее траекторий следует соотношение $x(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$.

Наряду с (1.1) будем рассматривать систему дифференциальных уравнений с постоянно действующими возмущениями (Ω_R — область допустимых возмущений)

$$x^{\cdot} = f(x, t) + R(x, t),\ \ R(x, t) \in \Omega_R \tag{1.2}$$

Определение 1.2. Невозмущенное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1.1) назовем $\{C_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если $x(t) \in \Phi_t$ $(t \in [t_0, T])$ для любых $x(t_0) \in C_0$ и $R(x, t) \in \Omega_R$.

Теоремы о ПУ в смысле сформулированных определений приведены в [3]. Важный момент при формулировке критериев ПУ — доказательство существования функций Ляпунова, удовлетворяющих условиям соответствующих теорем. Пусть $C_0 = \{x\colon W(x) < 1\}$, где $W(x)$ — непрерывно дифференцируемая положительно-определенная функция, линии уровня которой $W(x) = c$ $(0 < c \leqslant 1)$ замкнутые.

Теорема 1.1. Для того чтобы невозмущенное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1.1) было $\{C_0, \Phi_t, t_0, T\}$-устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно-определенная функция Ляпунова $V(x, t)$, удовлетворяющая условиям

(1.3) $\{x\colon V(x, t) < 1\} \subset \Phi_t, \quad t \in [t_0, T]$

(1.4) $\left(\dfrac{dV(x,t)}{dt}\right)_{(1.1)} \leqslant 0, \quad x \in \{x : V(x,t) \leqslant 1\}, \quad t \in [t_0, T]$

(1.5) $C_0 \subset \{x\colon V(x, t_0) < 1\}$

Достаточные условия теоремы 1.1 доказываются по схеме, приведенной в [3].

Необходимость покажем при помощи функции

$$V(x, t) = W(\varphi(x, t, t_0)), \quad x(t_0) = \varphi(x(t), t, t_0)$$

Построенная таким образом функции $V(x, t)$ положительно-определенная, так как $V(0, t) = 0$, $V(x, t) > 0$ при $\|x\| \neq 0$ на $[t_0, T]$ в силу единственности решений системы (1.1). Поскольку на траекториях системы функция $V(x, t)$ принимает постоянные значения, то $(dV(x, t)/dt)_{(1.1)} = 0$, $t \in [t_0, T]$. Доказательство включения (1.3) осуществляется от противного [5]. Условие (1.5) выполняется, так как $\{x\colon W(x) < 1\} = \{x\colon V(x, t_0) < 1\}$.

Для численного построения оптимальных оценок при помощи сформулированной теоремы рассмотрим два класса множеств [3]

(1.6) $\Phi_t \stackrel{\Delta}{=} \Gamma_t = \{x\colon |l_s^*(t) x| \leqslant 1, s = 1, 2, \ldots, N\}$

(1.7) $\Phi_t \stackrel{\Delta}{=} \Psi_t = \{x\colon \psi(x, t) \leqslant 1\}$

и линейную нестационарную систему

(1.8) $x^{\cdot} = A(t) x + f(t), \quad t \in [t_0, T]$

с произвольными возмущениями, удовлетворяющими условию

(1.9) $f(t) \in \Omega_R = \left\{f(t) : \|f(t)\| = \left(\int\limits_{t_0}^{T} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i(t)|^p\right)^{p_1/p} dt\right)^{1/p_1} \leqslant \bar{R}\right\}$

Предполагаем, что n-мерные векторы $l_s(t)$ ($t \in [t_0, T]$, $s = 1, 2, \ldots, N$) — кусочно-непрерывные функции переменной t, множество Ψ_t содержит внутреннюю точку $x(t) \equiv 0$ и является выпуклым и компактным для любого $t \in [t_0, T]$; $\Psi_t' = \{x\colon \psi(x, t) = 1\}$ — граница множества Ψ_t; $\psi(x, t)$ — непрерывная функция своих аргументов вместе с частными производными по компонентам вектора x; звездочка означает транспонирование.

Пусть $C_0 = \{x\colon x^* B x \leqslant c^2\}$, B — положительно-определенная симметричная матрица.

Критерий 1.1. Для $\{C_0, \Gamma_t, t_0, T, \Omega_R\}$-устойчивости системы (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

(1.10) $c^2 \leqslant \min\limits_{t \in [t_0, T]} \min\limits_{s=1, 2, \ldots, N} \dfrac{(1 - a_s(t))^2}{l_s^*(t) Q(t) l_s(t)}$

$$a_s(t) < 1, \quad t \in [t_0, T], \quad s = 1, 2, \ldots, N$$

Критерий 1.2. Для $\{C_0, \Psi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-устойчивости системы (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

(1.11) $c^2 \leqslant \min\limits_{t \in [t_0, T]} \min\limits_{\bar{x} \in \Psi_t'} \dfrac{[g^*(\bar{x}, t)\bar{x} - a_{\bar{x}}(t)]^2}{g^*(\bar{x}, t) Q(t) g(\bar{x}, t)}$

$$g^*(\bar{x}, t)\bar{x} > a_{\bar{x}}(t), \quad \bar{x} \in \Psi_t', \quad t \in [t_0, T]$$

Здесь $Q(t)$ — положительно-определенная симметричная матрица, являющаяся решением задачи Коши

$$Q^{\cdot}(t) = A(t)Q(t) + Q(t)A^{*}(t), \quad Q(t_0) = B^{-1} \tag{1.12}$$

$$a_{\bar{x}}(t) = \bar{R}\left(\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} x_{ij}(t,\tau)\, g_i(\bar{x},t)\right|^{q}\right)^{q_1/q} d\tau\right)^{1/q_1}$$

$$1/p + 1/q = 1, \quad 1/p_1 + 1/q_1 = 1, \quad g(\bar{x},t) = \{g_i(\bar{x},t)\}_{i=1}^{n} = \\ = \operatorname{grad}_x \psi(\bar{x},t)$$

$a_s(t)$ получается из функции $a_{\bar{x}}(t)$ заменой векторов $g(\bar{x},t)$ на $l_s(t)$, $\{x_{ij}(t,\tau)\}_{ij=1}^{n} = X(t,\tau)$ — элементы нормированной по τ фундаментальной матрицы, соответствующей однородной системе (1.8).

Сформулируем критерий устойчивости для системы

$$x^{\cdot} = A(t)(x + f_2(t)) + f_1(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{1.13}$$

при возмущениях $f_1(t)$, $f_2(t)$ и начальных условиях $x(t_0)$ из области

$$C_0(t) = \Big\{x(t_0), f_1(t), f_2(t) : x^{*}(t_0)Bx(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t}[f_1^{*}(\tau)C_1(\tau)f_1(\tau) + f_2^{*}(\tau)C_2(\tau)f_2(\tau)]\,d\tau \leqslant c^2\Big\}$$

где B, $C_1(t)$, $C_2(t)$ — симметричные положительно-определенные матрицы.

Критерий 1.3. Для $\{C_0(t), \Gamma_t, t_0, T\}$-устойчивости системы (1.13) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$c^2 \leqslant \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,\ldots,N} [l_s^{*}(t)Q_1(t)l_s(t)]^{-1} \tag{1.14}$$

причем матрица $Q_1(t)$ — решение задачи Коши

$$Q_1^{\cdot}(t) = A(t)Q_1(t) + Q_1(t)A^{*}(t) + C_1^{-1}(t) + \\ + A(t)C_2^{-1}(t)A^{*}(t), \quad Q_1(t_0) = B^{-1} \tag{1.15}$$

Аналогичный критерий имеет место для множества вида (1.7).

2. Построение экстремальных областей устойчивости и их оптимизация. При численных расчетах областей захвата частиц в режим ускорения возникают задачи определения всего множества начальных условий, при которых траектории не выходят из заданных множеств фазового пространства. Для решения подобных задач целесообразно ввести понятие устойчивости по n-мерному направлению l ($\|l\| = 1$) в момент $t = t_0$. Определения устойчивости в направлении l можно вводить как в малом (в смысле Ляпунова), так и в конечном. Остановимся на последнем, поскольку будут рассматриваться численные алгоритмы и конкретные оценки.

Определение 2.1. Невозмущенное решéние $x(t) \equiv 0$ системы (1.1) назовем $\{k, l, \Phi_t, t_0, T\}$-устойчивым, если $x(t) \in \Phi_t$ ($t \in [t_0, T]$) для любых начальных условий $x(t_0) = k_1 l$, $0 \leqslant k_1 < k$.

Такое определение устойчивости является конкретизацией известных понятий частичной устойчивости и вместе с тем позволяет разработать конструктивные подходы к решению указанных выше задач. По этой причине не будем останавливаться на формулировке и доказательстве общих теорем об устойчивости в направлении l, а приведем лишь несколько критериев.

Критерий 2.1. Для $\{k, l, \Gamma_t, t_0, T\}$-устойчивости системы (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$(2.1)\qquad k \leqslant \bar{k}(l) = \min_{t\in[t_0,\,T]}\ \min_{s=1,2,\ldots,N} \frac{1-|l_s^*(t)\,a(t)|}{|l_s^*(t)\,X(t,t_0)\,l\,|}$$

$$|l_s^*(t)\,a(t)| < 1,\quad s=1,2,\ldots,N,\quad t\in[t_0,T]$$

$$\left(a(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau\right)$$

Критерий 2.2. Для $\{k, l, \Phi_t, t_0, T\}$-устойчивости системы (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(2.2)\qquad k \leqslant \bar{k}(l) = \min_{t\in[t_0,\,T]}\ \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \frac{g^*(\bar{x},t)\,(\bar{x}-a(t))}{g^*(\bar{x},t)\,X(t,t_0)\,l}$$

$$g^*(\bar{x},t)\,(\bar{x}-a(t))>0,\quad g^*(\bar{x},t)\,\bar{x}>0,\quad \bar{x}\in\Psi_t',\quad t\in[t_0,T]$$

Критерий 2.3. Для $\{k, l, \Phi_t, t_0, T\}$-устойчивости системы (1.8) на множествах (1.6), (1.7) при возмущениях, удовлетворяющих (1.9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось, соответственно, одно из следующих соотношений:

$$(2.3)\qquad k \leqslant \bar{k}(l) = \min_{t\in[t_0,\,T]}\ \min_{s=1,2,\ldots,N} \left|\frac{1-a_s(t)}{l_s^*(t)\,X(t,t_0)\,l}\right|$$

$$a_s(t) < 1,\ s=1,2,\ldots,N,\ t\in[t_0,T]$$

$$(2.4)\qquad k \leqslant \bar{k}(l) = \min_{t\in[t_0,\,T]}\ \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \frac{g^*(\bar{x},t)\,\bar{x}-a_{\bar{x}}(t)}{g^*(\bar{x},t)\,X(t,t_0)\,l}$$

$$g^*(\bar{x},t)\,\bar{x}>a_{\bar{x}}(t),\quad t\in[t_0,T],\quad \bar{x}\in\Psi_t'$$

Экстремальное множество устойчивости представимо в виде

$$(2.5)\qquad C_0^{(\max)} = \{x_0 = k_1 l\colon\ 0\leqslant k_1\leqslant \bar{k}(l),\ \forall l\ (\|l\|=1)\}$$

3. Структурно-параметрическая оптимизация динамики пучков. Сложность решения практических задач оптимизации динамики пучков заряженных частиц состоит в том, что они являются минимаксными, функционирование задано на большом отрезке времени, для моделирования траекторий необходимо определять ускоряющие и фокусирующие поля из соответствующих уравнений Максвелла [3, 6—8]. Здесь предлагаются приемы структурного представления полей в системах ускорения и фокусировки и тем самым оптимизационная задача сводится к конечномерной. Это позволило не только упростить задачу оптимального проектирования систем ускорения и фокусировки, но и проводить оптимизацию в реализуемых структурах.

Известно [7, 8], что скорость частицы в ускоряющем прямоугольном поле при входе и выходе ее из трубки дрейфа изменяет направление. В этой связи рассмотрим задачу минимизации критерия качества

$$(3.1)\qquad \min_{\alpha\in C_\alpha} \Phi(x(T))$$

на траекториях системы дифференциальных уравнений

$$(3.2)\qquad \dot{x} = f^{(i)}(x,t,\alpha),\quad x(t_0) = x(t_0+0) = x_0$$

$$t_{i-1} < t < t_i,\quad i=1,2,\ldots,N+1\ (t_{N+1}=T)$$

при условиях

$$(3.3)\qquad x(t_i+0) = \Phi_i(x(t_i-0),t_i,\alpha),\ i=1,2,\ldots,N$$

$$(3.4)\qquad t_i = \varphi_i(\alpha),\quad i=1,2,\ldots,N$$

Здесь t_i — точки переключения, в которых n-мерный вектор состояния x имеет скачки (3.3), $x(t_i + 0)$, $x(t_i - 0)$ — значения вектора $x(t)$ справа и слева точки t_i, $f^{(i)}(x, t, \alpha)$ и $\Phi_i(x, t, \alpha)$ — вектор-функции размерности n, непрерывные по своим аргументам вместе с частными производными соответственно по x, α и x, t, α, α — r-мерный вектор оптимизируемых параметров, $\varphi_i(\alpha)$ — непрерывно дифференцируемые функции аргумента α, C_α — область допустимых значений параметров α.

Задачу (3.1) можно решать по итерационной схеме [9]

$$\alpha^{(i+1)} = P_{C_\alpha}(\alpha^{(i)} - \rho_i C(\alpha^{(i)})), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

где $P_{C_\alpha}(\cdot)$ — операция проектирования на множество C_α, ρ_i — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию сходимости [9], $\alpha^{(0)} \in C_\alpha$ — начальное приближение, компоненты вектора-градиента $C(\alpha^{(i)})$ вычисляются по формуле

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} = C_j(\alpha^{(i)}) = &-\sum_{s=1}^{N} \psi^*(t_s + 0)\Biggl\{\Biggl[\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s - 0), t_s, \alpha^{(i)})}{\partial x} \times \\ &\times f^{(s)}(\bar{x}(t_s - 0), t_s, \alpha^{(i)}) - f^{(s+1)}(\bar{x}(t_s + 0), t_s, \alpha^{(i)}) + \\ &+ \frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s - 0), t_s, \alpha^{(i)})}{\partial t}\Biggr]\frac{\partial \varphi_s(\alpha^{(i)})}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s - 0), t_s, \alpha^{(i)})}{\partial \alpha_j}\Biggr\} - \\ &- \sum_{s=1}^{N+1} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \psi^*(t)\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t), t, \alpha^{(i)})}{\partial \alpha_j}\,dt \\ &j = 1, 2, \ldots, r\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь $\psi(t)$ — кусочно-дифференцируемая векторная функция размерности n, являющаяся решением краевой задачи

$$\begin{aligned}&\dot{\psi} = -(\partial f^{(s)}(\bar{x}(t), t, \alpha^{(i)})/\partial x)^* \psi \\ &t_{s-1} < t < t_s, \quad s = 1, 2, \ldots, N + 1, \quad \psi(T) = -\mathrm{grad}_x \Phi(x(T))\end{aligned} \tag{3.7}$$

с разрывами в точках переключения

$$\psi(t_s - 0) = (\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s - 0), t_s, \alpha^{(i)})/\partial x)^* \psi(t_s + 0), \quad s = 1, 2, \ldots, N \tag{3.8}$$

$\bar{x}(t)$ — решение системы (3.2), соответствующее параметру $\alpha^{(i)}$.

Пусть M_0 — компактное множество из пространства вектора состояний. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$I(\alpha^{(0)}) = \min_{\alpha \in C_\alpha} I(\alpha), \quad I(\alpha) = \max_{x_0 \in M_0} \max_{t \in [t_0, T]} \Phi(x(t, x_0, \alpha)) \tag{3.9}$$

на траекториях системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t, \alpha), \quad t \in [t_0, T] \tag{3.10}$$

в предположении, что вектор-функция $f(x, t, \alpha)$ непрерывна по своим аргументам вместе с частными производными по компонентам векторов x, α.

Функция $I(\alpha)$ дифференцируема в каждой точке $\alpha \in C_\alpha$ по любому направлению в случае, если функция $\Phi(x(t, x_0, \alpha))$ дифференцируема по компонентам вектора α на открытом множестве $C_\alpha' \supset C_\alpha$ [10, 11]. Если $\alpha^{(0)}$ — решение задачи (3.9), то необходимые условия оптимальности состоят в том, что производная от $I(\alpha)$ по любому направлению, вычисленная в точке $\alpha^{(0)}$, неотрицательна [10, 11]

$$\begin{aligned}&\max_{\alpha \in C_\alpha} \min_{x_0 \in \bar{M}_0} \min_{\tau \in M} \min_{l \in \partial \Phi(x(\tau, x_0, \alpha^{(0)}))} \int_{t_0}^{T} \psi^*(t, \tau, x_0, \alpha^{(0)}, l) \times \\ &\times \partial f(x, t, \alpha^{(0)})/\partial \alpha(\alpha - \alpha^{(0)}))\,dt \leqslant 0\end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\overline{M}_0$, M — множества точек, в которых, соответственно, достигаются максимумы по x_0 и t в соотношении (3.9), $\partial\Phi(x(\tau, x_0, \alpha^{(0)}))$ — множество субдифференциалов в точке $x_0, \tau, \psi(t, \tau, x_0, \alpha^{(0)}, l)$ — решение задачи Коши

$$(3.12) \qquad \psi^{\cdot} = -(\partial f(x(t, x_0, \alpha^{(0)}), t, \alpha^{(0)})/\partial x)^* \psi$$
$$\psi(\tau, \tau, x_0, \alpha^{(0)}, l) = -l$$

Для численного решения оптимизационной задачи (3.9) применяются итерационные методы типа (3.5), причем вектор $C(\alpha^{(i)})$ определяет направление наискорейшего спуска.

Остановимся на методике построения вектора $C(\alpha^{(i)})$ на i-й итерации. С этой целью зададимся положительными числами $\varepsilon_i^{(1)}$ и $\varepsilon_i^{(2)}$, определяющими точность вычисления максимумов по x_0 и t. Определим множества

$$\overline{M}_0^{(i)} = \{x_0 \in M_0\colon \max_{t\in[t_0, T]} \Phi(x(t, x_0, \alpha^{(i)})) \geqslant I(\alpha^{(i)}) - \varepsilon_i^{(1)}\}$$
$$\overline{M}_{x_0}^{(i)} = \{\tau \in [t_0, T]\colon \Phi(x(\tau, x_0, \alpha^{(i)})) \geqslant \max_{t\in[t_0, T]} \Phi(x(t, x_0, \alpha^{(i)})) - \varepsilon_i^{(2)}\},$$
$$x_0 \in \overline{M}_0^{()}$$

Множества $\overline{M}_0^{(i)}$ и $\overline{M}_{x_0}^{(i)}$ покрываются достаточно плотной дискретной сеткой $x_0^{(k,i)}$, $\tau_{kj}^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots, Q_i)$, при помощи которой вычисляем векторы-градиенты $C^{(k,j)}(\alpha^{(i)})$ $(j = 1, 2, \ldots, n_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots, Q_i)$ по формуле вида (3.6). По векторам $C^{(k,j)}(\alpha^{(i)})$ строим выпуклую оболочку и находим кратчайшее расстояние до нее от начала координат. Найденная таким образом точка будет определять вектор наискорейшего спуска на i-й итерации [10]. Для анализа сходимости итерационной процедуры (3.5) можно воспользоваться результатами работ [10, 11]. Такие же алгоритмы без существенных изменений переносятся на системы с переменной структурой (3.2).

4. Оптимальное проектирование ускоряющих и фокусирующих систем. Описанные выше алгоритмы применялись в задачах оптимизации динамики потоков заряженных частиц различных ускорительных систем: линейных ускорителей, группирователей электронов, оптимальном проектировании систем отбора мощности в многорезонаторных клистронах и т. д.

Не выписывая громоздкие уравнения движения частиц в электромагнитных полях, остановимся на одной часто встречающейся модели

$$(4.1) \qquad x^{\cdot} = f(x, t, \alpha), \quad y^{\cdot} = A(x, t, \alpha)\, y, \quad t \in [0, T], \quad x(0) \in M_0$$

где x, y — векторы продольных и радиальных координат соответственно, α — r-мерный вектор оптимизируемых параметров, определяющий структуру полей и саму ускоряющую систему, M_0 — разброс частиц по продольным координатам, T — длина установки; вектор y должен удовлетворять фазовым ограничениям

$$(4.2) \qquad y(t) \in \Gamma_t = \{y\colon |l_s^*(t)\, y| \leqslant 1, \ s = 1, 2, \ldots, N\}$$

Предположим, что оценка области захвата частиц в режим ускорения по переменной y определяется в виде $C_0 = \{y\colon y^*By \leqslant c^2\}$, B — положительно-определенная матрица. Ставится задача о максимальном захвате частиц в режим ускорения по радиальным координатам.

При помощи приведенных выше критериев практической устойчивости оценка области захвата дается соотношением

$$(4.3) \qquad c^2 \leqslant \min_{t\in[0, T]} \min_{x_0\in M_0} \min_{s=1, 2, \ldots, N} [l_s^*(t)\, Q(t, x_0, \alpha)\, l_s(t)]^{-1}$$

Здесь матрица $Q(t, x_0, \alpha)$ — решение задачи Коши (1.12) при условии, что $A(t) = A(x(t, x_0, \alpha), t)$. Таким образом пришли к решению задачи минимаксной параметрической оптимизации

$$(4.4)\qquad \min_{\alpha\in C_\alpha}\ \max_{t\in[0,\,T]}\ \max_{x_0\in M_0}\ \max_{s=1,\,2,\,\ldots,\,N}\ l_s^*(t)\,Q(t, x_0, \alpha)\,l_s(t)$$

на траекториях матричного дифференциального уравнения (1.12).

Оптимизационная задача (4.4), (1.12) получена для случая, когда структура множества начальных условий задается матрицей B. Если матрица B неизвестна, то по ее элементам можно проводить оптимизацию. При этом должно выполняться условие положительной определенности матрицы B. Более разумный способ — это использовать предлагаемую выше методику построения экстремальных множеств устойчивости и записать оптимизационную задачу вида (4.4) [3].

Для решения задачи (4.4) использовались итерационные алгоритмы вида (3.5), причем рассматривались случаи, когда максимумы по t, x_0, α были не единственными. При решении данного класса задач наблюдалась высокая скорость сходимости описанных итерационных процедур к точке $\alpha^{(0)}$. Анализ полученных режимов на оптимальность проводился в основном с физической точки зрения. Необходимо отметить, что оптимальное проектирование систем ускорения и фокусировки предлагаемыми методами дает возможность существенно повысить к.п.д. таких установок [3].

Автор благодарит В. В. Румянцева, Б. Н. Бублика, Н. Ф. Кириченко за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 535 с.
2. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука. 1968. Т. 1. С. 5—66.
3. *Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. Киев: Наук. думка. 1985. 304 с.
4. *Кириченко Н. Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. Киев: Вища шк. 1978. 182 с.
5. *Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.* Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 15—24.
6. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ. 1980. 228 с.
7. *Капчинский И. М.* Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: Атомиздат. 1966. 310 с.
8. *Мурин Б. П., Бондарев Б. И., Кушин В. В., Федотов А. П.* Линейные ускорители ионов. Т. 1. Проблемы и теория. М.: Атомиздат. 1978. 260 с.
9. *Васильев Ф. П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ. 1974. 374 с.
10. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука. 1972. 368 с.
11. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука. 1978. 487 с.

Киев

Поступила в редакцию
11.V.1986