Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 531.36

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ О ПОЛИУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.

Дается определение полиустойчивости движения как такого его свойства, когда различные группы переменных, описывающих движение, обладают различными видами устойчивости. Например, одна группа переменных обладает устойчивостью в малом, вторая — асимптотической устойчивостью, третья — ограниченностью и т. п. Методом функций Ляпунова доказываются теоремы о полиустойчивости, которые применяются для исследования устойчивости движения крылатых летательных аппаратов (ЛА) по группам переменных.

В существующих определениях и исследованиях по устойчивости обычно считается, что рассматриваемые фазовые координаты обладают одним и тем же видом устойчивости, например асимптотической или равномерной устойчивостью и т. п. Однако на практике, например при синтезе траекторий различных ЛА, появляется необходимость предъявления различных требований к поведению разных групп фазовых координат. Так, при рассмотрении пространственного маневра ЛА с постоянной перегрузкой важно обеспечить асимптотическую устойчивость по углам атаки и скольжения, а по угловым скоростям тангажа, рыскания и вращения требуется лишь равномерная устойчивость. При этом углы тангажа, рыскания и вращения могут даже принимать произвольные значения, т. е. от них устойчивое поведение не требуется.

Таким образом, отдельные координаты или группы координат одной и той же системы могут обладать различными видами устойчивости: асимптотическая устойчивость, равномерная устойчивость, притяжение и т. д. Такое поведение системы здесь названо полиустойчивостью движения. Оно является дальнейшим развитием понятия устойчивости по части переменных [1], теория которой была разработана В. В. Румянцевым [2] и развита его сотрудниками и другими учеными [3].

1. Рассмотрим уравнение возмущенного движения

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, 0) \equiv 0, \quad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, \quad t \in R^1$$

Невозмущенному движению соответствует $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \equiv 0$.

Разобьем фазовые координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на N групп:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+n_2}), \ldots \tag{1.2}$$

$$\ldots, \mathbf{x}^{(j)} = (x_{m_{j-1}+1}, x_{m_{j-1}+2}, \ldots, x_{m_{j-1}+n_j}), \ldots, \mathbf{x}^{(N)} =$$

$$= (x_{m_{N-1}+1}, x_{m_{N-1}+2}, \ldots, x_n); \quad m_{j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} n_k, \quad n = \sum_{k=1}^{N} n_k.$$

$$j = 1, 2, \ldots, N$$

Введем обозначения и нормы

$$x_i^{(j)} = x_i, \quad i = m_{j-1}+1, \quad m_{j-1}+2, \ldots, m_{j-1}+n_j; \quad m_0 \equiv 0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{x} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_{n_1+1}^{(2)}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{(2)}, x_{n_1+n_2+1}^{(3)}, \ldots, x_n^{(N)})$$

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n_j} x_{m_{j-1}+i}^2\Big)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}^{(j,k)}\| =$$

$$= (\|\mathbf{x}^{(j)}\|^2 + \|\mathbf{x}^{(j+1)}\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x}^{(k)}\|^2)^{1/2}, \quad j < k$$

$$\|\mathbf{x}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{j=1}^{N} \|\mathbf{x}^{(j)}\|^2\Big)^{1/2}, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

Аналогичные обозначения и нормы введем для составляющих вектора $\mathbf{X}$ (1.1), т. е. для $\mathbf{X}^{(j)}$ и $\mathbf{X}^{(j,k)}$, $j < k$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Обозначим $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ решение системы (1.1) с начальными значениями t_0, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0)$.

Будем рассматривать полиустойчивость решения $x \equiv 0$ по всем переменным $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N)}$ или по отношению к части переменных $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N_*)}$, где $N_* < N$. Поэтому предположим, что правые части системы (1.1) — непрерывные функции в области

$$G^{(N_*)} = \{t, \mathbf{x}: \|\mathbf{x}^{(1,N_*)}\| \leqslant H > 0,\ 0 \leqslant \|\mathbf{x}^{(N_*+1,N)}\| < \infty,\ t \in [0, \infty)\} \tag{1.4}$$

и удовлетворяют условиям единственности решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, которое определено для всех $t \geqslant 0$ при $\|\mathbf{x}^{(1,N_*)}\| \leqslant H$, т. е. имеет место $\mathbf{x}^{(1,N_*)}$-продолжимость решения [3]. Если рассматривается полиустойчивость решения $\mathbf{x} \equiv 0$ по всем переменным $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N)}$, то полагаем $N_* = N$ и введенные предположения выполняются в области $G^{(N)}$.

Определение 1. Решение $\mathbf{x} \equiv 0$ системы (1.1) называется полиустойчивым, когда оно

1) $\mathbf{x}^{(1)}$-устойчиво, т. е. если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, как бы мало ε ни было, найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{x}^{(1)}(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$, $\forall t \geqslant t_0$;

2) $\mathbf{x}^{(2)}$-устойчиво равномерно по t_0, т. е. если оно $\mathbf{x}^{(2)}$-устойчиво и для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta(\varepsilon)$, не зависящим от t_0;

3) асимптотически $\mathbf{x}^{(3)}$-устойчиво, т. е. если оно $\mathbf{x}^{(3)}$-устойчиво и для каждого $t_0 \geqslant 0$ существует $\Delta(t_0) > 0$, такое, что решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с начальным значением $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}^{(3)}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0$$

4) асимптотически $\mathbf{x}^{(4)}$-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$, т. е. если оно $\mathbf{x}^{(4)}$-устойчиво равномерно по t_0 и существует не зависящее от t_0 число $\Delta_0 > 0$, такое, что условие

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}^{(4)}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0$$

выполняется равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ из области $G^\circ = \{t_0, \mathbf{x}_0: t_0 \geqslant 0, \|\mathbf{x}_0\| < \Delta_0\}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon)$, такое, что из $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta_0$ следует $\|\mathbf{x}^{(4)}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 + T$;

5) каждая j-я группа переменных ($j = 1, 2, \ldots, N$) обладает определенным видом устойчивости, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_{N_*} = n$, $N_* = N$.

При $n_1 + n_2 + \ldots + n_{N_*} < n$, т. е. $N_* < N$, поведение групп переменных с индексами $n_{N_*+1}, n_{N_*+2}, \ldots, n_N$ не контролируется и приходим к понятию полиустойчивости по отношению к части переменных $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N_*)}$.

Рассмотрим вещественные функции $V(t, \mathbf{x})$, определенные и непрерывные в области $G^{(N_*)}$, обладающие непрерывными частными производными $\partial V/\partial t$, $\partial V/\partial x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) во всех точках $G^{(N_*)}$, удовлетворяющие условию $V(t, 0) \equiv 0$.

Определение 2 [1]. Функция $W(\mathbf{x}^{1,N_*})$, не зависящая явно от времени t, называется положительно-определенной по переменным $\mathbf{x}^{(1,N_*)}$, если в области $\|\mathbf{x}^{(1,N_*)}\| \leqslant H$ она неотрицательна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^{(1,N_*)} = 0$.

Определение 3 [2]. Функция $V(t, \mathbf{x})$ называется $\mathbf{x}^{(1,N_*)}$-положительно-определенной, если существует такая, не зависящая явно от t, положительно-определенная функция $W(x^{(1,N*)})$, что в области $G^{(N*)}$ (1.4)

$$V(t, x) \geqslant W(x^{(1,N*)}) \tag{1.5}$$

Лемма 1. Для того чтобы функция $V(t, x)$ была $x^{(1,N*)}$-положительно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде суммы неотрицательной функции $V_+(t, x)$ по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и не зависящей явно от t положительно-определенной функции $W(x^{(1,N*)})$ по переменным $x^{(1,N*)}$, т. е.

$$V(t, x) = V_+(t, x) + W(x^{(1,N*)}) \tag{1.6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $V(t, x)$ является $x^{(1,N*)}$-положительно-определенной функцией. Тогда согласно определению 3 существует такая положительно-определенная функция $W(x^{(1,N*)})$, что в области $G^{(N*)}$ (1.4) выполняется условие (1.5).

Введем функцию

$$V_+(t, x) = V(t, x) - W(x^{(1,N*)}) \tag{1.7}$$

которая в силу условия (1.5) является неотрицательной. Из выражения (1.7) получим представление функции $V(t, x)$ в виде (1.6).

Достаточность. Пусть имеет место равенство (1.6), где $V_+(t, x) \geqslant 0$, а $W(x^{(1,N*)})$ — положительно-определенная функция по переменным $x^{(1,N*)}$. Тогда из равенства (1.6) следует $V(t, x) - W(x^{(1,N*)}) = V_+(t, x) \geqslant 0$. Откуда для функции $V(t, x)$ вытекает справедливость условия (1.5), т. е. $V(t, x)$ является $x^{(1,N*)}$-положительно-определенной функцией.

Лемма 2 [3]. Функция $V(t, x)$ является $x^{(1,N*)}$-положительно-определенной тогда и только тогда, когда существует непрерывная монотонно возрастающая по $r \in [0, H] \subset R^1$ функция $f(r)$, $f(0) = 0$, такая, что в области $G^{(N*)}$ (1.4)

$$V(t, x) \geqslant f(\| x^{(1,N*)} \|) \tag{1.8}$$

Определение 4 [3]. Функция $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел по $x^{(1,N*)}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $t \geqslant 0$, $\| x^{(1,N*)} \| < \delta$, $0 \leqslant \| x^{(N*+1,N)} \| < \infty$ следует $| V(t, x) | < \varepsilon$.

Определение 5 [4]. Функция $V(t, x)$, определенная в области

$$G = \{t, x\colon 0 \leqslant \| x \| < \infty,\ t \in [0, \infty)\} \tag{1.9}$$

допускает бесконечно большой низший предел по $x^{(1,N*)}$ в G, если в области G (1.9) выполняется условие (1.5) и

$$W(x^{(1,N*)}) \to \infty \text{ при } \| x^{(1,N*)} \| \to \infty \tag{1.10}$$

2. Докажем некоторые теоремы о полиустойчивости движения. Для конкретности переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разобьем на четыре группы, т. е. примем $N = 4$ и рассмотрим полиустойчивость решения $x = x^{(1,4)} \equiv 0$ по отношению к части переменных $x^{(1,3)}$.

Определение 6. Решение $x = x^{(1,4)} \equiv 0$ системы (1.1) называется $x^{(1,3)}$-устойчивым равномерно по t_0, асимптотически $x^{(2,3)}$-устойчивым, $x^{(3)}$-устойчивым в большом, если:

для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\| x^{(1,3)} \| < \delta$ $(0 \leqslant \| x^{(4)} \| < \infty)$ следует

$$\| x^{(1,3)}(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon, \ \forall t \geqslant t_0$$

для каждого $t_0 \geqslant 0$ существует $\Delta(t_0) > 0$, такое, что решение $x(t; t_0, x_0)$ с $\| x_0 \| < \Delta$ обладает свойством

$$\lim_{t\to\infty} \| x^{(2,3)}(t; t_0, x_0) \| = 0 \tag{2.1}$$

где $\| x \| < \Delta$ — оценка области $x^{(2,3)}$-притяжения точки $x = 0$ для начального момента t_0;

для заданного числа μ_0 найдется число $\mu = \mu(\mu_0) > 0$, такое, что для любых $\{x_0, t_0\}$, удовлетворяющих неравенству $\| x_0 \| < \mu_0$, $\forall t \geqslant 0$ выполняется условие

$$\| x^{(3)}(t; t_0, x_0) \| < \mu, \ \forall t \geqslant t_0$$

Теорема 1. Для $x^{(1,3)}$-устойчивости, равномерной по t_0, $x^{(2,3)}$-асимптотической устойчивости, $x^{(3)}$-устойчивости в большом решения $x = x^{(1,4)} \equiv 0$ системы (1.1) достаточно, чтобы в области $G^{(3)}$ (1.4) существовала допускающая по $x^{(1,3)}$ бесконечно малый высший предел $x^{(1,3)}$-положительно-определенная функция $V(t, x)$, полная производная по времени t которой в силу системы (1.1), взятая с противоположным знаком, т. е. $-dV/dt$, является $x^{(2,3)}$-положительно-определенной функцией, и выполнялись условия

$$\sup_{\|x\|<\mu_0} V(t, x) < \inf_{\|x^{(3)}\|=\mu} V(t, x), \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{2.2}$$

$$\| X^{(2,3)} \| \leqslant M > 0, \quad M \in R^1 \tag{2.3}$$

Доказательство. Так как $-dV/dt$ является $x^{(2,3)}$-положительно-определенной функцией, то согласно лемме 1

$$-dV/dt = W_1(t, x) + W_2(x^{(2,3)}) \tag{2.4}$$

где $W_1(t, x) \geqslant 0$, $W_2(x^{(2,3)})$ — положительно-определенная функция.

Из (2.4) следует, что $dV/dt \leqslant 0$, т. е. теорема 1 содержит в себе условия теоремы о равномерной по t_0 устойчивости по части переменных [3]. Значит, решение $x \equiv 0$ системы (1.1) устойчиво равномерно по t_0. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, такое, что из $\| x_0 \| < \delta$ следует $\| x^{(2,3)}(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$.

Докажем свойство (2.1). Допустим противное: пусть существуют точка x_* с $\| x_* \| < \delta$ $(\delta > 0)$, число $l > 0$ и последовательность $t_k \to \infty$, $t_k - t_{k-1} \geqslant \alpha > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $\| x^{(2,3)}(t_k; t_0, x_*) \| \geqslant l$. В силу (2.3) можно [5] подобрать β, $0 < \beta < \alpha/2$, при котором

$$l/2 \leqslant \| x^{(2,3)}(t; t_0, x_*) \| < \varepsilon, \ \forall t \in [t_k - \beta, t_k + \beta], \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Согласно лемме 2, для $x^{(2,3)}$-положительно-определенной функции $(-dV/dt)$ выполняется условие

$$dV/dt \leqslant -f(\| x^{(2,3)} \|)$$

где $f(r)$ — непрерывная функция, монотонно возрастающая по $r \in [0, H]$. Интегрируя это неравенство в пределах от $t_0 = t_1 - \beta$ до $t = t_k + \beta$, получим с учетом (2.5)

$$0 \leqslant V(t_k + \beta, x(t_k + \beta; t_0, x_*)) \leqslant V(t_0, x_*) - \int_{t_0}^{t} f(\| x^{(2,3)} \|)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant V(t_0, x_*) - \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i-\beta}^{t_i+\beta} f(\| x^{(2,3)} \|)\, dt \leqslant V(t_0, x_*) - 2k\beta f\left(\frac{l}{2}\right)$$

Условие $V(t_k + \beta, x(t_k + \beta; t_0, x_*)) \geqslant 0$ нарушается при достаточно больших k. Следовательно, предположение, что $l > 0$, недопустимо, т. е. $l = 0$ и справедливо условие (2.1). Таким образом, $x^{(2,3)}$-асимптотическая устойчивость решения $x \equiv 0$ системы (1.1) доказана.

Для доказательства устойчивости решения $\mathbf{x} \equiv 0$ в большом по группе переменных $\mathbf{x}^{(3)}$ надо показать, что при выполнении условий теоремы величина нормы $\| \mathbf{x}^{(3)} (t;\ t_0,\ x_0) \|$ не достигает значения, равного μ, если в начальный момент $t = t_0$ было $\| \mathbf{x}_0 \| < \mu_0$.

Пусть $\| \mathbf{x}_0 \| < \mu_0$. В области $\Gamma_\mu = \{\mathbf{x},\ t\colon \| \mathbf{x}^{(3)} \| < \mu,\ \ t \geqslant t_0\}$ имеем $dV/dt \leqslant 0$. Тогда

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0) \leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\| < \mu_0} V(t, \mathbf{x}) \tag{2.6}$$

Покажем, что при выполнении условия (2.2)

$$\| \mathbf{x}^{(3)} (t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0) \| < \mu, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{2.7}$$

Если это не так, т. е. левая часть (2.7) равна μ в некоторый момент времени $t = t_* > t_0$, то

$$V(t_*, \mathbf{x}) \geqslant \inf_{\|\mathbf{x}^{(3)}\| = \mu} V(t_*, \mathbf{x}) \tag{2.8}$$

С учетом (2.6) и (2.8) имеем

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \leqslant \mu_0} V(t_*, \mathbf{x}) \geqslant V(t_*, \mathbf{x}) \geqslant \inf_{\|\mathbf{x}^{(3)}\| = \mu} V(t_*, \mathbf{x})$$

что противоречит условию (2.2) теоремы. Полученное противоречие доказывает, что имеет место устойчивость в большом.

Таким образом, все свойства полиустойчивости решения системы (1.1), а с ними и теорема 1 доказаны.

В следующей теореме примем $N = 3$ и предположим, что условия, наложенные на правые части системы (1.1), выполняются в области G (1.9).

Определение 7. Решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1,3)} \equiv 0$ системы (1.1) называется $\mathbf{x}^{(1,2)}$-устойчивым равномерно по t_0, асимптотически $\mathbf{x}^{(2)}$-устойчивым в целом, если:

для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\| \mathbf{x}^{(1,2)} \| < \delta$ $(0 \leqslant \| \mathbf{x}^{(3)} \| < \infty)$ следует

$$\| \mathbf{x}^{(1,2)} (t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_0$$

для любых $t_0 \geqslant 0$ и $\mathbf{x}_0 \in R^n$ решение $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ обладает свойством

$$\lim_{t \to \infty} \| \mathbf{x}^{(2)} (t; t_0, \mathbf{x}_0) \| = 0 \tag{2.9}$$

Здесь областью $\mathbf{x}^{(2)}$-притяжения точки $\mathbf{x} = 0$ служит все пространство.

Теорема 2. Для $\mathbf{x}^{(1,2)}$-устойчивости, равномерной по t_0, асимптотической $\mathbf{x}^{(2)}$-устойчивости в целом решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1,3)} \equiv 0$ системы (1.1) достаточно, чтобы в области G (1.9) существовала допускающая по $\mathbf{x}^{(1,2)}$ бесконечно малый высший предел, а по $\mathbf{x}^{(2)}$ — бесконечно большой низший предел $\mathbf{x}^{(1,2)}$-положительно-определенная функция $V(t,\ \mathbf{x})$, полная производная по времени которой в силу системы (1.1), взятая с противоположным знаком, т. е. $-dV/dt$, является $\mathbf{x}^{(2)}$-положительно-определенной функцией, и выполнялось условие

$$\| \mathbf{X}^{(2)} \| \leqslant M > 0, \quad M \in R^1 \tag{2.10}$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 выполняются условия теоремы 1. Из теоремы 1 следует равномерная по t_0 $\mathbf{x}^{(1,2)}$-устойчивость и асимптотическая $\mathbf{x}^{(2)}$-устойчивость решения $\mathbf{x}^{(1,3)} \equiv 0$.

Покажем, что условие (2.9) выполняется для любых $\mathbf{x}_0 \in R^n$. Действительно, так как $V(t,\ \mathbf{x})$ допускает в области G (1.9) бесконечно малый высший предел по $\mathbf{x}^{(1,2)}$ и бесконечно большой низший предел по $\mathbf{x}^{(2)}$, то согласно определениям 4 и 5 в области G (1.9) справедливо условие

$$W(\mathbf{x}^{(2)}) \leqslant V(t, \mathbf{x}) \leqslant W_*(\mathbf{x}^{(1,2)}) \tag{2.11}$$

где $W(\mathbf{x}^{(2)})$, $W_*(\mathbf{x}^{(1,2)})$ — положительно-определенные функции и $W(\mathbf{x}^{(2)}) \to \infty$ при $\|\mathbf{x}^{(2)}\| \to \infty$.

Повторяя доказательство асимптотической устойчивости, приведенное в теореме 1, с учетом условий (2.10) и (2.11), приходим к выводу о выполнении свойства (2.9) при любых $\mathbf{x}_0 \in R^n$, $\forall t_0 \geqslant 0$. Теорема доказана.

Следствие. Считая в теоремах 1 и 2 $N_* = N$, получим соответствующие теоремы о полиустойчивости движения по всем переменным. При этом в теореме 1 $N_* = N = 3$, а в теореме 2 $N_* = N = 2$.

3. Применим полученный результат для исследования устойчивости пространственного движения крылатых летательных аппаратов (ЛА). Рассмотрим случай, когда ЛА самолетной схемы, движущийся с постоянной по величине скоростью, совершает маневр с постоянной перегрузкой. Таким образом, невозмущенному движению соответствуют постоянные значения углов атаки α_0, скольжения β_0 и угловых скоростей тангажа ω_{z0}, рыскания ω_{y0}, вращения ω_{x0}. Отклонения их от возмущенных будем соответственно обозначать α, β, ω_z, ω_y, ω_x. При этом отклонения угловых скоростей тангажа, рыскания и вращения не должны превышать заданных пределов.

Уравнения возмущенного движения рассмотрим в виде [6]

$$\begin{aligned}
&\alpha^{\cdot} = \mu\omega_z - {}^1/_2 c_y{}^{\alpha}\alpha - \mu\beta\omega_x - {}^1/_2 c_y^{\delta_e}\delta_e \\
&\omega_z{}^{\cdot} = m_z{}^{\alpha}\alpha + m_z^{\omega_z}\omega_z - \mu A\omega_x\omega_y + m_z^{\delta_e}\delta_e \\
&\beta^{\cdot} = \mu\omega_y + {}^1/_2 c_z{}^{\beta}\beta + \mu\alpha\omega_x + {}^1/_2 c_z^{\delta_r}\delta_r \\
&\omega_y{}^{\cdot} = m_y{}^{\beta}\beta + m_y^{\omega_y}\omega_y + \mu B\omega_x\omega_z + m_y^{\delta_r}\delta_r \\
&\omega_x{}^{\cdot} = m_x{}^{\beta}\beta + m_x^{\omega_x}\omega_x - \mu C\omega_y\omega_z + m_x^{\delta_a}\delta_a \\
&A = \frac{J_y - J_x}{J_z} > 0, \quad B = \frac{J_z - J_x}{J_y} > 0, \quad C = \frac{J_z - J_y}{J_x} > 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где μ — относительная плотность ЛА, $c_u{}^{\xi}$ — коэффициенты аэродинамических сил, $m_u{}^{\xi}$ — коэффициенты аэродинамических моментов, δ_e, δ_r, δ_a — отклонения рулей высоты, направления и крена, J_x, J_y, J_z — моменты инерции ЛА относительно осей связанной системы координат.

Закон стабилизации рассмотрим в виде

$$\delta_e = k_e{}^{\alpha}\alpha + k_e{}^{z}\omega_z, \quad \delta_r = k_r{}^{\beta}\beta + k_r{}^{y}\omega_y, \quad \delta_a = k_a{}^{\beta}\beta + k_a{}^{x}\omega_x \tag{3.2}$$

Подставим значения (3.2) в уравнения (3.1). Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&x_1 = \omega_x, \quad x_2 = \omega_y, \quad x_3 = \omega_z, \quad x_4 = \alpha, \quad x_5 = \beta \\
&a_{11} = m_x{}^{\beta} + k_a{}^{\beta}m_x^{\delta_a}, \quad a_{15} = m_x^{\omega_x} + k_a{}^{x}m_x^{\delta_a}, \quad a_{123} = -\mu C \\
&a_{22} = m_y{}^{\beta} + k_r{}^{\beta}m_y^{\delta_r}, \quad a_{25} = m_y^{\omega_y} + k_r{}^{y}m_y^{\delta_r}, \quad a_{213} = \mu B \\
&a_{33} = m_z{}^{\alpha} + k_e{}^{\alpha}m_z^{\delta_e}, \quad a_{34} = m_z^{\omega_z} + k_e{}^{z}m_z^{\delta_e}, \quad a_{312} = -\mu A \\
&a_{44} = {}^1/_2(c_y{}^{\alpha} + k_e{}^{\alpha}c_y^{\delta_e}), \quad a_{43} = \mu - {}^1/_2 k_e{}^{z}c_y^{\delta_e}, \quad a_{415} = -\mu \\
&a_{55} = {}^1/_2(c_z{}^{\beta} + k_r{}^{\beta}c_z^{\delta_r}), \quad a_{52} = \mu + {}^1/_2 k_r{}^{y}c_z^{\delta_r}, \quad a_{514} = \mu
\end{aligned} \tag{3.3}$$

С учетом обозначений (3.3) систему (3.1) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & x_1^{\bullet} = a_{11}x_1 + a_{15}x_5 + a_{123}x_2x_3 \\
& x_2^{\bullet} = a_{22}x_2 + a_{25}x_5 + a_{213}x_1x_3 \\
& x_3^{\bullet} = a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{312}x_1x_2 \\
& x_4^{\bullet} = a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{415}x_1x_5 \\
& x_5^{\bullet} = a_{52}x_2 + a_{55}x_5 + a_{514}x_1x_4
\end{aligned}
$$

Найдем условия, связывающие коэффициенты системы (3.4), при выполнении которых решение системы $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво по x_4, x_5 и устойчиво по x_1, x_2, x_3.

Для решения задачи воспользуемся следствием из теоремы 2. В данном примере $N = 2$, т. е. имеются две группы переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{x_4, x_5\}$. Согласно обозначениям (1.3), для системы (3.4) имеем

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1,2)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(2)}, x_5^{(2)})$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(3.5)\qquad V = {}^1/_2\,(-a_{213}a_{312}x_1^2 + 2a_{123}a_{312}x_2^2 - a_{123}a_{213}x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)$$

которая является положительно-определенной и допускает бесконечно малый высший предел и бесконечно большой низший предел по переменным $\mathbf{x}^{(1,2)}$.

Производная функции (3.5) в силу системы (3.4)

$$
\begin{aligned}
(3.6)\qquad dV/dt = & -a_{213}a_{312}a_{11}x_1^2 - a_{213}a_{312}a_{15}x_1x_5 + 2a_{123}a_{312}a_{22}x_2^2 + \\
& + (2a_{123}a_{312}a_{25} + a_{52})\,x_2x_5 - a_{123}a_{213}a_{33}x_3^2 + (a_{43} - \\
& - a_{123}a_{213}a_{34})x_3x_4 + a_{44}x_4^2 + a_{55}x_5^2
\end{aligned}
$$

Согласно следствию из теоремы 2, для решения задачи требуется определить условия неположительности функции (3.6) по x_1, x_2, x_3 и отрицательной определенности по x_4, x_5.

Метод получения таких условий разработан в [7] и состоит в следующем. Производную dV/dt (3.6) приравняем к функции

$$
\begin{aligned}
(3.7)\qquad W(x) = & -(c_{11}x_1 + c_{15}x_5)^2 - (c_{22}x_2 + c_{25}x_5)^2 - \\
& -(c_{33}x_3 + c_{34}x_4)^2 - (c_4x_4)^2 - (c_5x_5)^2
\end{aligned}
$$

и, сравнивая коэффициенты при одинаковых членах функций (3.6) и (3.7), находим условия существования коэффициентов функции (3.7), которые и являются искомыми условиями неположительности функции (3.6) по x_1, x_2, x_3 и отрицательной определенности по x_4, x_5. Эти условия имеют вид

$$
\begin{aligned}
(3.8)\qquad & a_{11} < 0, \quad a_{22} < 0, \quad a_{33} < 0, \quad a_{44} + \frac{(a_{43} - a_{123}a_{213}a_{34})^2}{a_{123}a_{213}a_{33}} < 0 \\
& a_{55} + \frac{a_{15}^2 a_{213}a_{312}}{a_{11}} - \frac{(2a_{123}a_{312}a_{25} + a_{52})^2}{2a_{123}a_{312}a_{22}} < 0
\end{aligned}
$$

Подставляя значения коэффициентов (3.3) в неравенства (3.8), получим достаточные условия, решающие задачу пространственного маневра ЛА.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 472 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. 1957. № 4. С. 9—16.
3. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364 — 384.

4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 212 с.
5. *Peiffer K.*, *Rouche N.* Liaponov's second method applied to partial stability// J. méc. 1969. V. 8. No. 2. P. 323—334.
6. *Бюшгенс Г. С.*, *Студнев Р. В.* Динамика пространственного движения самолета. М.: Машиностроение. 1967. 226 с.
7. *Аминов А. Б.*, *Сиразетдинов Т. К.* Функции Ляпунова для исследования устойчивости в целом нелинейных систем // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 883—893.

Казань

Поступила в редакцию
15.IX.1986