$$
\begin{aligned}
f_2 &= b_1\zeta^3 f_0'^2 + b_2\zeta^2 f_0 f_0' + b_3\zeta f_0^2 + b_4\zeta f_0'^3 + b_5 f_0 f_0'^2 + b_6\zeta f_0 f_0' f_0'' + \\
&+ b_7 f_0'^3 f_0'' + b_8 f_0^2 f_0'' \quad (\omega = 0) \\
b_1 &= n^2 D/2 + (-10n + 9)n^3 C/(2H) \\
b_2 &= (-6n + 4)b_1/n, \quad b_3 = (3n - 2)^2 b_1/n^2 \\
b_4 &= 11n\,(n - 1)A^2/2 - nAB + D/6 + (29n - 24)nC/(6H) \\
b_5 &= (5n - 4)AB + 5\,(3n - 2)(-n + 1)A^2/2 + B^2 + (3n - 2)(-3n + \\
&+ 3)C/(2H) \\
b_6 &= 2a_1a_2, \; b_7 = 2A^2, \; b_8 = a_1^2/2 \\
H &= (7n - 6)(4n - 3)
\end{aligned}
$$

Метод разложения решения уравнения (1) в ряд по автомодельным составляющим широко применяется, начиная с [8], однако вид поправок f_1, f_2 был найден только для частных значений показателя n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cole J. D., Messiter A. F.* Expansion procedures and similarity laws for transonic flow // Z. angew. Math. Phys. 1957. B. 8. H. 1. S. 1—25.
2. *Karman Th.* The similarity law of transonic flow // J. Math. and Phys. 1947. V. 26. No. 3. P. 182—190 = Закон подобия для трансзвукового потока // Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит. 1950. С. 173—182.
3. *Фалькович С. В.* К теории сопла Лаваля // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 503—512.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. *Hayes W. D.* La seconde approximation pour les écoulements transsoniques non visqueux // J. Méc. 1966. V. 5. No. 2. P. 163—206.
6. *Чернов И. А.* Высшие приближения в трансзвуковом разложении решения уравнения Чаплыгина // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 169—171.
7. *Chernov I. A.* Solution of Tricomi equation and transonic expansions in gas dynamics // Mixed type equations, Teubner Texte zur Math. B. 90. Leipzig: 1986. S. 64—83.
8. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит. 1960. 421 с.

Саратов

Поступила в редакцию
24.XI.1986

УДК 533:538

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Желнорович В. А.

Рассматривается система уравнений, описывающая модели магнитных жидкостей (МЖ) с внутренним моментом количества движения в магнитном поле. Приводятся линеаризованные уравнения и их решения в виде спиновых волн и магнитозвуковых. Вычислен тензор высокочастотной магнитной восприимчивости жидкости и определены частоты однородного магнитного резонанса. Связь между спиновыми и акустическими волнами в МЖ обусловлена наличием во внутренней энергии жидкости членов с вектором вихря скорости и тензором скоростей деформации (определяющих, в частности, гиромагнитную энергию). Обсуждаются различные известные модели, применяемые для описания ферромагнитных жидкостей (ФМЖ). Рассматриваются релаксационные модели МЖ, в рамках которых даются решения задач о плоском течении Куэтта и цилиндрическом течении Пуазейля. Получено новое выражение для величины эффективной вязкости МЖ.

Известно несколько различных моделей МЖ. Наиболее простая из них [1] хорошо описывает парамагнитные жидкости и некоторые виды ФМЖ в квазистационарных магнитных полях. Однако в ряде важных случаев эта модель неприменима (например, при высоких частотах магнитного поля, для ФМЖ при большой объемной концентрации ферромагнитных частиц с достаточно большой энергией магнитной анизотропии). Поэтому получили распространение также модели МЖ, связанные с учетом процессов релаксации намагниченности и с учетом внутренних моментов количества движения [2—9].

1. Уравнения для МЖ. Модели жидкостей, учитывающие внутренний момент количества движения, естественным образом вводятся на основе континуума Коссера. Рассмотрим следующую систему уравнений, записанную в переменных инерциальной системы координат наблюдателя:

$$\rho \frac{d}{dt}\frac{1}{\rho} g^{\alpha}_{(m)} = \nabla_{\beta} P^{\alpha\beta}_{(m)} + \frac{1}{2}(M_{\lambda}\nabla^{\alpha}H^{\lambda} - H^{\lambda}\nabla^{\alpha}M_{\lambda}) + Q^{\alpha} \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{g\rho}\overline{M}^{\alpha} + I\Omega^{\alpha}\right) + \nabla_{\beta}A^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\lambda}M_{\beta}\left(B_{\lambda} - \rho\frac{\partial U_m}{\partial M^{\lambda}} - L_{\lambda}\right) + R^{\alpha}$$

$$B_{\alpha} - \rho\partial U_m/\partial M^{\alpha} + g^{-1}\Omega_{\alpha} = L_{\alpha}, \quad T = \partial U_m/\partial s$$

$$\operatorname{div}(H + 4\pi M) = 0, \ \operatorname{rot} H = 0, \ d\rho/dt + \rho \operatorname{div} v = 0$$

$$\rho T\frac{ds}{dt} = -\partial_{\alpha}q^{\alpha} + \tau^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} + L^{\alpha}\left(\rho\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho}M_{\alpha} - [\omega, M]_{\alpha}\right) -$$

$$- R^{\alpha}(\Omega_{\alpha} - \omega_{\alpha}) - A^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}\Omega_{\alpha}$$

(уравнения Максвелла записаны без учета токов проводимости и токов смещения, т. е. в магнитостатическом приближении). Компоненты вектора объемной плотности импульса жидкости $g^{\alpha}_{(m)}$ и тензора напряжений $P^{\alpha\beta}_{(m)}$ в уравнениях (1.1) определяются соотношениями

$$g^{\alpha}_{(m)} = \rho v^{\alpha} + \nabla_{\beta}\frac{\partial\rho U_m}{\partial\nabla_{\beta}v_{\alpha}} \tag{1.2}$$

$$P^{\alpha\beta}_{(m)} = -pg^{\alpha\beta} - \rho\frac{\partial U_m}{\partial\nabla_{\beta}v_{\lambda}}\nabla^{\alpha}v_{\lambda} + \tau^{\alpha\beta} \mp \frac{1}{2}(-\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}R_{\lambda} + M^{\alpha}L^{\beta} - M^{\beta}L^{\alpha})$$

$$p = \rho^2\frac{\partial U_m}{\partial\rho} + \rho M^{\alpha}\frac{\partial U_m}{\partial M^{\alpha}} - \frac{1}{2}M^{\alpha}B_{\alpha}$$

В уравнениях (1.1), (1.2) Q^{α} — компоненты вектора внешних массовых сил, действующих на жидкость (например, сил тяжести), B_{α} — компоненты вектора магнитной индукции, v^{α} — компоненты вектора скорости индивидуальных точек жидкости, ρ — массовая плотность жидкости, d/dt — символ полной производной по времени t, ∇_{β} — символ ковариантной производной, вычисляемой относительно инерциальной системы координат наблюдателя с переменными x^{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) и метрическим тензором, определяемым контравариантными компонентами $g^{\alpha\beta}$, Ω_{α} — компоненты вектора внутреннего вращения (вектора угловой скорости ортонормированных базисов континуума Коссера), ω_{α} — компоненты вектора вихря скорости, $e_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора скоростей деформации, s — удельная плотность энтропии, T — температура, g, I — задаваемые постоянные коэффициенты, $\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}$ — компоненты псевдотензора Леви-Чивиты, U_m — задаваемая дифференцируемая функция от параметров ρ, s, M_{α}, $\nabla_{\beta}v_{\alpha}$ (представляющая собой часть внутренней энергии жидкости). В случае, когда функция U_m не зависит от градиентов скорости, рассматриваемые здесь уравнения получены при помощи вариационного уравнения в [3]. Лагранжиан Λ, соответствующий уравнениям (1.1), (1.2), имеет вид

$$\Lambda = \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{8\pi}B^2 + B_{\alpha}M^{\alpha} + \frac{1}{g}M^{\alpha}\Omega_{\alpha} + \frac{1}{2}\rho I\Omega^2 - \rho U_m(\rho, s, M_{\alpha}, \nabla_{\beta}v_{\alpha})$$

Релаксационный член R^{α} уравнения моментов количества движения в (1.1), релаксационный член L^{α} уравнения для намагниченности, компоненты тензора вязких напряжений $\tau^{\alpha\beta}$, компоненты тензора моментных напряжений $A^{\alpha\beta}$ и компоненты вектора потока тепла q^{α}, определяющие диссипативные процессы в жидкости, можно (по Онзагеру) определить равенствами

$$\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta\lambda\theta}e_{\lambda\theta}, \quad q^{\alpha} = -\varkappa^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}T, \quad A^{\alpha\beta} = -a^{\alpha\beta\lambda\theta}\nabla_{\lambda}\Omega_{\theta} \tag{1.3}$$

$$L^{\alpha} = \theta^{\alpha\beta}\left(\rho\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho}M_{\beta} - [\omega, M]_{\beta}\right), \quad R^{\alpha} = -r^{\alpha\beta}(\Omega_{\beta} - \omega_{\beta})$$

в которых коэффициенты $\tau^{\alpha\beta\lambda\theta}$, $a^{\alpha\beta\lambda\theta}$, $\varkappa^{\alpha\beta}$, $r^{\alpha\beta}$, $\theta^{\alpha\beta}$ выбираются таким образом, чтобы обеспечить условие неотрицательности внутреннего производства энтропии; все эти коэффициенты могут быть функциями от определяющих параметров жидкости и поля. В частности, в изотропном случае для величин $\theta^{\alpha\beta}$, $r^{\alpha\beta}$ можно принять

(1.4)
$$\theta^{\alpha\beta}=\theta\,(g^{\alpha\beta}-n^\alpha n^\beta)+\theta_\parallel n^\alpha n^\beta+\theta_*\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}n_\lambda$$
$$r^{\alpha\beta}=\frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{\tau}\,(g^{\alpha\beta}-n^\alpha n^\beta)+\frac{1}{\tau_\parallel}n^\alpha n^\beta+\frac{1}{\tau_*}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}n_\lambda\right]$$

где θ, $\theta_\parallel$, θ_*, τ, $\tau_\parallel$, τ_* — скалярные коэффициенты с размерностью времени (времена релаксации), $n^\alpha = M^\alpha/\,|\,M\,|$ — компоненты единичного вектора, направленного по вектору намагниченности жидкости.

Если $1/g \neq 0$ и коэффициенты $\theta^{\alpha\beta}$ не зависят от Ω, то третье уравнение в (1.1) позволяет исключить из остальных уравнений вектор внутреннего вращения. В частности, уравнение моментов количества движения после исключения Ω принимает вид

(1.5)
$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}M^\alpha-Ig^2\,H^{*\alpha}\right)+\nabla_\beta\left(g^2a^{\alpha\beta\lambda\theta}\nabla_\lambda H_\theta{}^*\right)=g\,[M,\,H^*]^\alpha+$$
$$+\,g^2r^{\alpha\beta}\,(H_\beta{}^*+g^{-1}\omega_\beta)$$

где $H^{*\alpha}$ — компоненты вектора эффективного магнитного поля

$$H^{*\alpha}=B^\alpha-\rho\,\frac{\partial U_m}{\partial M_\alpha}-\theta^{\alpha\beta}\left(\rho\,\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\rho}\,M_\beta-[\omega,M]_\beta\right)$$

В некоторых теориях для величин R^α, L^α вместо (1.3) использовались соотношения Онзагера следующего вида:

(1.6)
$$L^\alpha=\theta^{\alpha\beta}\left(\rho\,\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\rho}\,M_\beta-[\Omega,M]_\beta\right)$$
$$R^\alpha-\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}M_\beta L_\lambda=-\,r^{\alpha\beta}\,(\Omega_\beta-\omega_\beta)$$

Если величина $\partial U_m/\partial M_\alpha$ пропорциональна M^α, то величины L^α можно определить также соотношением (не меняя внутреннее производство энтропии)

(1.7)
$$L^\alpha=\theta^{\alpha\beta}\left(\rho\,\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\rho}\,M_\beta-g\,[M,H]_\beta\right)$$

Основное отличие рассматриваемых здесь уравнений от соответствующих уравнений для изотропных жидкостей в [9, 10] связано именно с использованием для термодинамических потоков R^α, L^α выражений (1.3) вместо выражений (1.6), (1.7), а для термодинамических сил — выражений dM/dt — $[\omega,\,M]$ вместо dM/dt — $[\Omega,\,M]$ в [10] или dM/dt — $g\,[M,\,H]$ в [9].

Уравнения (1.1)—(1.3) описывают модели намагничивающихся вязких сжимаемых жидкостей, обладающих внутренним моментом количества движения

$$K^\alpha=g^{-1}M^\alpha+\rho I\Omega^\alpha$$

В реальных ФМЖ внутренний момент количества движения определяется диспергированными в них однодоменными ферромагнитными частицами, которые имеют собственный момент количества движения K_s спинового происхождения (связанный с магнитным моментом частиц) и моментом K_Ω, обусловленным механическим вращением этих частиц. Как показано в [11], момент количества движения K_Ω, определяемый вращением доменов, на несколько порядков меньше спинового момента доменов в ФМЖ. ($K_\Omega = 10^{-6}\ K_s$ для доменов диаметром $\sim 10^{-6}$ см даже при большой угловой скорости доменов $\Omega_0 \sim 10^2$ с$^{-1}$).

Уравнения (1.1)—(1.3), рассматриваемые здесь, применимы для описания ФМЖ в высокочастотных магнитных полях и уточняют уравнения Нойрингера—Розенцвейга [1] в квазистатических полях в связи с учетом процессов релаксации намагниченности ФМЖ.

В общем случае вектор внутреннего вращения Ω в уравнениях (1.1)—(1.3) при наличии спинового момента $g^{-1}M$ нельзя связывать с какими-либо реальными вращениями в среде (в том числе и в ФМЖ). Действительно, например, уравнения (1.1)—(1.3) при $I = 0$ можно применять для описания пара- или диамагнитных жидкостей. Вместе с тем очевидно, что в таких жидкостях вектор Ω отличен от нуля, но он не описывает какие-либо реальные вращения в этих средах.

Если определять вектор Ω применительно к теории ФМЖ со спином как результат осреднения векторов угловой скорости частиц в ФМЖ, как это делается в [9, 10], то предельный переход в уравнениях [10] для изотропных ФМЖ, соответствующий вмороженности частиц в жидкость (при $\tau_s \to 0$ в уравнениях (2.33) или (2.36) в обозначениях [10]), дает для вектора спинового момента количества движения $g^{-1}M$ не уравнение прецессии (уравнение Ландау—Лифшица), как это должно быть, а некоторое специальное релаксационное уравнение. Это показывает, что обсуждаемые уравнения для изотропных ФМЖ со спином, предлагаемые в [10], основанные на указанном выше смысле Ω, с физической точки зрения некорректны.

2. Линеаризованные уравнения. Рассмотрим изэнтропические движения жидкости, описываемой уравнениями (1.1) — (1.3), соответствующими функции U_m вида

$$\rho U_m = \rho U_m{}^0(\rho, M) + 2\pi M^2 + \gamma M^\alpha \omega_\alpha + {}^1/_2\, \nu_1 M^\alpha M^\beta e_{\alpha\beta} + {}^1/_2 \nu_2 M^2 e_\alpha{}^\alpha \tag{2.1}$$

где $M = (M_\alpha M^\alpha)^{1/2}$ — модуль вектора намагниченности, ν_1, ν_2, γ — задаваемые постоянные. Коэффициенты $\theta^{\alpha\beta}$, $r^{\alpha\beta}$ в (1.3) определим равенствами (1.4), в которых $\tau_*^{-1} = \theta_* = 0$, а для $\tau^{\alpha\beta\lambda\theta}$, $a^{\alpha\beta\lambda\theta}$ примем

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha\beta\lambda\theta} &= \mu\,(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\theta} + g^{\alpha\theta}g^{\beta\lambda}) + \lambda g^{\alpha\beta}g^{\lambda\theta} \\ a^{\alpha\beta\lambda\theta} &= Dg^{-2}g^{\alpha\beta}g^{\lambda\theta} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где λ, μ — коэффициенты вязкости, D — постоянная. В рассматриваемом случае компоненты вектора плотности импульса $g^\alpha_{(m)}$, компоненты тензора напряжений $P^{\alpha\beta}_{(m)}$ и компоненты вектора эффективного магнитного поля $H^{*\alpha}$ в уравнениях (1.1), (1.6) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} H^{*\alpha} &= H^\alpha - \chi^{-1}M^\alpha - \gamma\omega^\alpha - \nu_1 e^{\alpha\beta}M_\beta - \nu_2 M^\alpha e_\lambda{}^\lambda - \\ &- \theta^{\alpha\beta}\,(dM_\beta/dt - [\omega, M]_\beta + M_\beta e_\lambda{}^\lambda) \\ g^\alpha_{(m)} &= \rho v^\alpha - {}^1/_2\,\gamma \operatorname{rot}^\alpha M + {}^1/_2\, \nabla_\lambda\,(\nu_1 M^\alpha M^\lambda + \nu_2 M^2 g^{\alpha\lambda}) \\ P^{\alpha\beta}_{(m)} &= -\,pg^{\alpha\beta} + {}^1/_2\,\gamma\varepsilon^{\beta\lambda\mu}M_\lambda\nabla^\alpha v_\mu - {}^1/_2\,\nu_1 M^\beta M^\lambda \nabla^\alpha v_\lambda - {}^1/_2\,\nu_2 M^2\nabla^\alpha v^\beta + \\ &+ \mu\,(\nabla^\alpha v^\beta + \nabla^\beta v^\alpha) + \lambda g^{\alpha\beta}\nabla_\lambda v^\lambda + {}^1/_2\,(-\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}R_\lambda + M^\alpha L^\beta - M^\beta L^\alpha) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для магнитной восприимчивости χ и давления p в определениях (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \chi &= \left(\frac{\rho}{M}\frac{\partial U_m{}^\circ}{\partial M}\right)^{-1}, \quad p = \rho^2\frac{\partial U_m{}^\circ}{\partial\rho} + \rho M\frac{\partial U_m{}^\circ}{\partial M} + {}^1/_2\,\nu_1 M^\alpha M^\beta e_{\alpha\beta} + \\ &+ {}^1/_2\,\nu_2 M^2 e_\lambda{}^\lambda - {}^1/_2\, M^\alpha H_\alpha \end{aligned} \tag{2.4}$$

Будем считать далее, что система координат наблюдателя с переменными x^α декартова. Пусть M_0, H_0, ρ_0, $v_0 = 0$ — постоянные значения параметров жидкости в равновесном состоянии. Полагая, что функции $M\,(x^\alpha, t)$, $H\,(x^\alpha, t)$, $\rho\,(x^\alpha, t)$, $v\,(x^\alpha, t)$ мало меняются относительно равновесных значений

$$M = M_0 + \mu,\ H = H_0 + h,\ \rho = \rho_0 + \rho_1$$

для функции $U_m{}^\circ$ с точностью до малых второго порядка найдем

$$\rho U_m{}^\circ = {}^1/_2\,\rho_0{}^{-1}a_*{}^2\rho_1{}^2 + {}^1/_2\,\beta^{\alpha\beta}\mu_\alpha\mu_\beta + bn^\alpha\mu_\alpha\rho_1 + \beta_1 n^\alpha\mu_\alpha + A\rho_1 + \mathrm{const} \tag{2.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\beta^{\alpha\beta} = \beta_1\delta^{\alpha\beta} + \beta_2 n^\alpha n^\beta, \quad b = \left(\frac{\partial U_m{}^\circ}{\partial M} + \rho\frac{\partial^2 U_m{}^\circ}{\partial\rho\partial M}\right)_0 \\ &\beta_1 = \left(\frac{\rho}{M}\frac{\partial U_m{}^\circ}{\partial M}\right)_0, \quad \beta_2 = \left(\rho\frac{\partial^2 U_m{}^\circ}{\partial M^2} - \frac{\rho}{M}\frac{\partial U_m{}^\circ}{\partial M}\right)_0 \\ &n^\alpha = \frac{M_0{}^\alpha}{M_0}, \quad a_*{}^2 = \left(\rho\frac{\partial^2\rho U_m}{\partial\rho^2}\right)_0, \quad A = \left(U_m + \rho\frac{\partial U_m}{\partial\rho}\right)_0 \end{aligned}$$

Символ $(\ )_0$ означает, что выражения в скобках берутся при равновесных значениях параметров.

Учитывая соотношения (2.1)—(2.5), линеаризуем уравнения (1.1), (1.6), в которых исключена функция $\Omega\,(x^\alpha, t)$ при помощи уравнения для намагниченности в (1.1)

$$\begin{aligned} &\partial\,(\mu^\alpha - \rho_0 I g^2 h^{*\alpha})/\partial t + D\Delta h^{*\alpha} + M_0{}^\alpha\partial_\lambda v^\lambda = g\,[M_0, h^*]^\alpha + g^2 r^{\alpha\beta}(h_\beta{}^* + g^{-1}\omega_\beta) \\ &(\partial/\partial t)\,\{\rho_0 v^\alpha - {}^1/_2\,\gamma \operatorname{rot}^\alpha\mu + \partial_\lambda\,[{}^1/_2\nu_1(M_0{}^\lambda\mu^\alpha + M_0{}^\alpha\mu^\lambda) + \nu_2 M_0{}^\beta\mu_\beta\delta^{\alpha\lambda}]\} = \\ &= -\,\partial^\alpha p_* + \mu\Delta v^\alpha + (\lambda + \mu)\,\partial^\alpha\partial_\beta v^\beta + M_0{}^\lambda\partial^\alpha h_\lambda + {}^1/_2\partial_\beta\,[\theta M_0{}^\alpha(\partial\mu^\beta/\partial t - \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$-[\omega, M_0]^\beta) - \theta M_0{}^\beta\,(\partial\mu^\alpha/\partial t - [\omega, M_0]^\alpha) - g^{-1}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda} r_{\lambda\theta}\,(h^{*\theta} + g^{-1}\omega^\theta)$$

$$\operatorname{rot} h = 0, \ \operatorname{div}(h + 4\pi\mu) = 0, \ \partial\rho_1/\partial t + \rho_0 \operatorname{div} v = 0$$

Здесь

$$h^{*\alpha} = h^\alpha - \beta^{\alpha\beta}\mu_\beta - \gamma\omega^\alpha - \nu_1 M_\lambda{}^\circ e^{\alpha\lambda} - \nu_2 M_0{}^\alpha\,\partial_\lambda v^\lambda - bn^\alpha\rho_1 -$$

$$-[\theta(\delta^{\alpha\lambda} - n^\alpha n^\lambda) + \theta_\parallel n^\alpha n^\lambda](\partial\mu_\lambda/\partial t - [\omega, M_0]_\lambda + M_\lambda{}^\circ\,\partial_b v^\beta)$$

$$p_* = (a_*{}^2 + bM_0)\rho_1 + [\rho_0 b + M_0(\beta_1 + \beta_2)]\,n^\alpha\mu_\alpha + \gamma M_0{}^\alpha\omega_\alpha +$$

$$+ \nu_1 M_0{}^\alpha M_0{}^\beta e_{\alpha\beta} + \nu_2 M_0{}^2\,\partial_\alpha v^\alpha$$

3. Спиновые волны. Рассмотрим спиновые волны в МЖ в линеаризованной постановке, т. е. малые адиабатические колебания намагниченности жидкости, в пренебрежении акустическими волнами. В соответствии с постановкой задачи исходные уравнения записываются в виде

(3.1) $$\operatorname{rot} h = 0, \quad \operatorname{div}(h + 4\pi\mu) = 0$$

$$\partial(\mu^\alpha - \rho_0 I g^2 h^{*\alpha})/\partial t + D\Delta h^{*\alpha} = g\,[M^0, h^*]^\alpha + [\tau^{-1}(\delta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta) +$$

$$+ \tau_\parallel^{-1} n^\alpha n^\beta]\,h_\beta{}^*$$

$$h^{*\alpha} = h^\alpha - \beta^{\alpha\beta}\mu_\beta - [\theta(\delta^{\alpha\lambda} - n^\alpha n^\lambda) + \theta_\parallel n^\alpha n^\lambda]\,\partial\mu_\lambda/\partial t$$

Полагая

$$\mu = \mu_* \exp[i(-\omega t + k_\alpha x^\alpha)], \quad h = h_* \exp[i(-\omega t + k_\alpha x^\alpha)]$$

где ω — частота волны, k_α — компоненты волнового вектора, из (3.1) находим

(3.2) $$\mu^\alpha = \chi^{\alpha\beta} h_\beta, \quad h^\alpha = -4\pi k^{-2} k^\alpha k_\beta \mu^\beta$$

Компоненты тензора высокочастотной магнитной восприимчивости $\chi^{\alpha\beta}$ определяются соотношением

(3.3) $$\chi^{\alpha\beta} = \chi_1\delta^{\alpha\beta} + \chi_2 n^\alpha n^\beta + i\chi_3 n_\lambda \varepsilon^{\alpha\beta\lambda}$$

(3.4) $$\chi_1 = X_- + X_+, \ \chi_3 = X_- - X_+$$

$$X_\pm = {}^1/_2\,[\beta_1 - i\omega\theta + \omega\,(i/\tau - iDk^2 \pm gM_0 + \omega\rho_0 I g^2)^{-1}]^{-1}$$

$$\chi_2 = -\chi_1 + [\beta_1 + \beta_2 - i\omega\theta_\parallel + \omega\,(i/\tau_\parallel - iDk^2 + \omega\rho_0 I g^2)^{-1}]^{-1}$$

Из уравнений (3.1) следует дисперсионное уравнение для спиновых волн

(3.5) $$k^2 + 4\pi\chi^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0, \text{ или } k^2 + 4\pi\,[\chi_1 k^2 + \chi_2 (k_\alpha n^\alpha)^2] = 0$$

В бездиссипативном приближении (при $\theta = \theta_\parallel = D = \tau_\parallel^{-1} = \tau^{-1} = 0$) дисперсионное уравнение (3.5) дает следующее выражение для частоты спиновой волны (которая зависит только от направления волнового вектора и не зависит от его модуля):

(3.6) $$\omega = \pm \frac{gM_0}{1 + \eta\beta_1}\left[\beta_1{}^2 + \frac{4\pi\beta_1 \sin^2\psi}{1 + \eta(4\pi + \beta_1) - 4\pi\eta^2\cos^2\psi\,[1 + \eta(\beta_1 + \beta_2)]^{-1}\beta_2}\right]^{1/2}$$

Здесь ψ — угол между волновым вектором и вектором M_0, $\eta = \rho_0 I g^2$.

Рассмотрим теперь конечный объем МЖ, ограниченный эллипсоидальной поверхностью, во внешнем (стороннем) переменном магнитном поле, меняющемся во времени по закону $e^{-i\omega t}$. Будем считать, что длина волны стороннего поля много больше характерного размера l жидкого эллипсоида, так что поле можно считать однородным на расстоянии порядка l. В этом случае в жидкости генерируется однородное магнитное поле, а частоты магнитного резонанса определяются уравнением

(3.7) $$\det(1 + 4\pi N\chi) = 0$$

где 1 — единичная трехмерная матрица, N — матрица компонент тензора размагничивающих коэффициентов, χ — матрица компонент тензора высокочастотной магнитной восприимчивости, вычисляемых в отсутствие диссипации: $\theta = \theta_\parallel = D = \tau^{-1} = \tau_\parallel{}^{-1} = 0$.

Полагая, что главные оси жидкого эллипсоида направлены по осям системы координат ($N = \operatorname{diag}(N_1, N_2, N_3)$), из уравнения (3.7) найдем выражение для резонансной частоты

(3.8) $$\omega_* = gM_0(\xi_1\xi_2)^{1/2}, \quad \xi_k = \frac{\beta_1 + 4\pi N_k}{1 + \rho_0 I g^2(\beta_1 + 4\pi N_k)}$$

Если $N_1 = N_2 = N$ (например, для сферы $N = 1/3$, для цилиндра $N = 1/2$), то $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ и формула для ω_* упрощается:

(3.9) $$\omega_* = gM_0\xi$$

Как видно из определения (3.8), частота однородного магнитного резонанса зависит от коэффициента I, определяющего энергию внутреннего вращения. Оценка величины ω_* для ФМЖ показывает, что учет энергии внутреннего вращения может значительно уменьшить резонансную частоту ω_* сравнительно с ее величиной в соответствующих твердых ферромагнетиках. Этот вывод качественно согласуется с опытными данными [12].

4. Магнитоакустические волны. Рассмотрим уравнения (2.7), (2.8) в бездиссипативном приближении, т. е. при $\theta^{\alpha\beta} = r^{\alpha\beta} = D = \lambda = \mu = 0$. Будем искать решение этих уравнений в виде гармонической волны, распространяющейся вдоль вектора постоянной намагниченности жидкости $k^\alpha = kn^\alpha$. В этом случае из уравнений (2.7) следует

(4.1) $$\mu^\alpha = \chi^{\alpha\beta}h_\beta + \zeta^{\alpha\beta}v_\beta, \quad h^\alpha = -4\pi n^\alpha \; n_\lambda\mu^\lambda, \quad \rho_1 = \rho_0\omega^{-1}k_\alpha v^\alpha$$
$$\{-i\omega\rho_0\delta^{\alpha\beta} + k^2 n^\alpha n^\beta\,[i\rho_0\,(a_0{}^2 + M_0 b)\,\omega^{-1} - M_0{}^2\,(\nu_1 + \nu_2)]\}\,v_\beta +$$
$$+ \{{}^1\!/_2\,M_0\nu_1 k\omega\delta^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta k M_0\cdot[({}^1\!/_2\,\nu_1 + \nu_2)\,\omega + i\,(\rho_0 b M_0^{-1} + 4\pi + \beta_1 + \beta_2)] +$$
$$+ {}^1\!/_2\,k\gamma\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}n_\lambda\}\,\mu_\beta = 0$$

где компоненты $\chi^{\alpha\beta}$ определены равенствами (3.3), в которых следует положить $\theta = \theta_\parallel = D = \tau^{-1} = \tau_\parallel{}^{-1} = 0$, а для $\zeta^{\alpha\beta}$ имеем

$$\zeta^{\alpha\beta} = \zeta_1\delta^{\alpha\beta} + \zeta_2 n^\alpha n^\beta + i\zeta_3\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}n_\lambda$$
$$\zeta_1 = {}^1\!/_2 k\,(-iM_0\nu_1\chi_1 + \gamma\chi_3), \quad \zeta_3 = {}^1\!/_2 k\,(-iM_0\nu_1\chi_3 + \gamma\chi_1)$$
$$\zeta_2 = -\zeta_1 - k\,(\chi_1 + \chi_2)[iM_0\,(\nu_1 + \nu_2) + \omega^{-1}\,(\rho_0 b - M_0/(\rho_0 I g^2))]$$

Из уравнений (4.1) следуют дисперсионные уравнения для поперечных волн

(4.2) $$\omega = \mp M_0 g\,\frac{\rho_0\beta_1 + {}^1\!/_4\,(\gamma^2 + \nu_1 M_0{}^2)\,k^2}{\rho_0 + \rho_0 I g^2\,[\rho_0\beta_1 + {}^1\!/_4\,(\gamma^2 + \nu_1 M_0{}^2)\,k^2]}$$

Для поперечных волн, описываемых дисперсионными уравнениями (4.2), имеем (полагая $n^\alpha = (0, 0, 1)$)

$$\rho_1 = 0, \; \mu^\alpha = (\mu^1, \mu^2, 0), \; v^\alpha = (v^1, v^2, 0), \; h^\alpha = 0$$

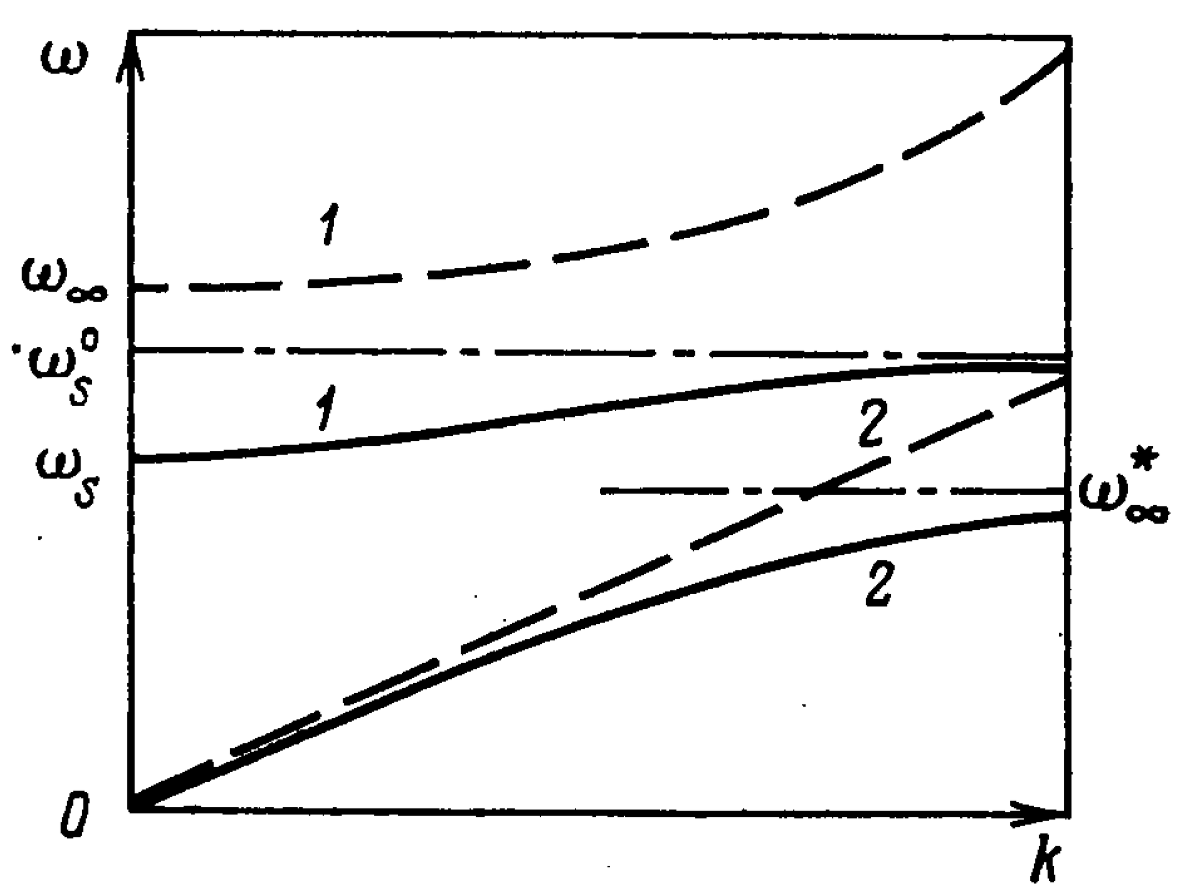
причем величины μ, v связаны соотношениями

(4.3) $$v^1 \pm iv^2 = 0, \; \mu^1 \pm i\mu^2 = 0$$
$$v^1 \mp iv^2 = {}^1\!/_2 ik\rho_0{}^{-1}\,(\nu_1 M_0 \pm i\gamma)(\mu^1 \mp i\mu^2)$$

Знаки в уравнениях (4.2), (4.3) согласованы. Если $\nu_1 = \gamma = 0$, то дисперсионное уравнение (4.2) определяет частоту спиновой волны

(4.4) $$\omega_s = \mp M_0 g\beta_1\,(1 + \rho_0 I g^2\beta_1)^{-1}$$

для которой $v^1 = v^2 = v^3 = 0$. Таким образом, распространение в жидкости поперечных акустических волн обусловлено наличием в энергии U_m перекрестных членов с M_α, ω_α, $e_{\alpha\beta}$, в частности гиромагнитной энергии $\gamma M^\alpha\omega_\alpha$.



Схематический график дисперсионной кривой поперечных волн изображен на фигуре сплошной линией *1*. Штриховой линией *1* показан график дисперсионной кривой при $I = 0$, причем $\omega_s{}^\circ = -M_0 g\beta_1$, $\omega_\infty = -M_0/(\rho_0 I g)$.

Из уравнений (4.1) следует также дисперсионное уравнение для продольной волны

(4.5) $$\omega^2 = a^2k^2\,(1 + e^2k^2)^{-1}, \; e^2 = Ig^2M_0{}^2\,(\nu_1 + \nu_2)^2\,\lambda$$
$$a^2 = a_0{}^2 + M_0 b + \rho_0{}^{-1}\,(M_0 - \rho_0{}^2 I g^2 b)[\rho_0 b + M_0\,(4\pi + \beta_1 + \beta_2)]\,\lambda$$
$$\lambda = [1 + \rho_0 I g^2\,(4\pi + \beta_1 + \beta_2)]^{-1}$$

Если $n^{\alpha} = (0, 0, 1)$, то для продольной волны выполняются соотношения

$$v^{\alpha} = (0, 0, v), \; \mu^{\alpha} = (0, 0, \mu), \; h^{\alpha} = (0, 0, -4\pi\mu)$$
$$\mu = k\omega^{-1}v\lambda \{M_0 - \rho_0 I g^2 [\rho_0 b + iM_0 (\nu_1 + \nu_2) \omega]\}$$

График дисперсионной кривой продольной волны изображен на фигуре сплошной линией *2* (штриховая линия *2* — при $I = 0$, $\omega_{\infty}{}^* = a/e$, расположение ω^* на графике условно).

Из уравнения (4.5) видно, что скорость продольной волны в общем случае зависит от частоты волны (т. е. имеется дисперсия скорости звука).

5. Об эффекте увеличения вязкости МЖ в магнитном поле. Ниже рассматриваются релаксационные модели МЖ, в рамках которых даются решения задач Куэтта и Пуазейля. Задачи о плоском течении Куэтта и Пуазейля в рамках модели МЖ с внутренним моментом количества движения, связанным с намагниченностью, рассматривались в [11]. Задача о плоском течении Куэтта в рамках теории ФМЖ с внутренним вращением рассматривалась в [8]. Как отмечено в [9, 10], приращение коэффициента вязкости жидкости в магнитном поле в этих задачах, описываемое в модели МЖ [11] применительно к ФМЖ, на несколько порядков отличается от данных в известной теории ФМЖ с внутренним вращением [7]. В связи с этим сразу отметим, что уравнения в [11, 7] описывают разные ФМЖ, поэтому нельзя сравнивать приращения коэффициентов вязкости в этих работах, как это делается в [9, 10].

Необходимо иметь в виду, что существуют разные типы ФМЖ, для которых эффект изменения вязкости в магнитном поле существенно различен. Для ФМЖ, диспергированные ферромагнитные частицы в которых обладают малой энергией магнитной анизотропии, когда ориентация частицы и направление ее магнитного момента практически не связаны («суперпарамагнетизм»), этот эффект пренебрежимо мал (изменение коэффициента вязкости составляет доли процента от полного коэффициента вязкости [13]). Как известно, такие ФМЖ в квазистационарных полях хорошо описываются уравнениями Нойрингера — Розенцвейга (НР) [1], которые вообще не учитывают изменение вязкости в магнитном поле. Модель ФМЖ в [11] является обобщением модели НР, связанным с учетом внутреннего момента количества движения спиновой природы, который в ФМЖ реально существует. Поэтому уравнения [11] описывают ФМЖ в квазистационарных полях, во всяком случае не менее точно, чем уравнения НР, и применимы для описания ФМЖ в высокочастотных магнитных полях, когда уравнения НР неприменимы.

ФМЖ, в которых диспергированные ферромагнитные частицы обладают достаточно большой энергией магнитной анизотропии и магнитные моменты «вморожены» в эти частицы, эффект изменения вязкости в магнитном поле более значителен, и его в некоторых случаях необходимо учитывать, что и делается в рамках уравнений, используемых в [8]. Однако и в рамках уравнений [8] максимальное приращение коэффициента вязкости в задаче Куэтта даже при оптимальных параметрах (в предельном магнитном поле, при ортогональности векторов магнитного поля и вихря скорости и при большой объемной концентрации частиц в жидкости $\varphi \sim 0{,}2$) мало и достигает $\sim$20—25% от полного коэффициента вязкости. Во многих случаях (хотя и не всегда) и такие ФМЖ с достаточной точностью можно описывать уравнениями [1] или [11]. Таким образом, суть дела состоит в том, что приращение коэффициента вязкости требуется учитывать только для некоторых типов ФМЖ в достаточно сильных магнитных полях.

Вместе с тем использование в [8] вектора внутреннего вращения Ω и связанного с ним внутреннего момента количества движения $I\Omega$ несущественно для описания эффекта увеличения вязкости ФМЖ в магнитном поле, а зависимость приращения коэффициента вязкости от коэффициента I в [8] обусловлена только обозначениями коэффициентов в других (релаксационных) членах уравнения моментов [5].

Более того, как известно [14], член с моментом количества движения $I\Omega$ в уравнении моментов в теории ФМЖ с внутренним вращением [7, 8] может быть сравним с остальными членами уравнения моментов лишь на очень высоких частотах магнитного поля, когда эти уравнения неприемлемы с физической точки зрения (хотя бы уже в силу необходимости учета значительно большего [11] спинового момента доменов в ФМЖ на гораздо более низких частотах). Поэтому использование момента $I\Omega$ в известных теориях [7, 8] ничем не обосновано, хотя эти теории и получили некоторое распространение.

Вопрос об учете внутреннего спинового (гиромагнитного) момента количества движения ФМЖ обсуждался в [10]. Основные утверждения авторов обзора [10, с. 157], касающиеся учета внутренних моментов, состоят в том, что уравнения в [11], учитывающие только спиновый момент количества движения, неприменимы для описания ФМЖ, поскольку члены со спиновым моментом малы по сравнению с другими членами уравнений, а попытка использовать эти уравнения для описания гидродинамического движения, как утверждается в [10], приводит к противоречию с известными экспериментальными данными по измерению вязкости ФМЖ. Оба эти утверждения неверны.

Действительно, в пренебрежении членами с магнетомеханическим отношением g уравнения с внутренним моментом $g^{-1}M$ (и без учета релаксации намагниченности M), обсуждаемые в [10], переходят в уравнения НР [1], которые, как известно и как отмечают и авторы [10], применимы и фактически применяются на практике для описания ФМЖ! Таким образом, из доказательства, которое приводят авторы [10], следует противоположное — уравнения [11] могут применяться для описания ФМЖ. Что касается утверждений авторов обзора [10] о противоречии результатов [11] с данными опытов по исследованию вязкости ФМЖ, то здесь следует отметить, что опыты, на которые ссылаются в [10], относятся к ФМЖ с частицами с «вмороженными» магнитными моментами и поэтому не имеют отношения к ФМЖ с «суперпарамагнетизмом», описываемым уравнениями [11].

Следует отметить также, что доказательство малости членов с внутренним спиновым моментом в уравнениях [11] у авторов [10] основано на использовании в приводимых оценках характерного времени $t \sim 1$ с и внутреннего вращения $\Omega \sim 1$ с$^{-1}$. Очевидно, однако, что в волновых процессах в ФМЖ (описываемых гидродинамическими уравнениями!) характерное время может быть и 10^{-1} и 10^{-2}, и 10^{-7} с и еще меньше, что игнорируется авторами [10], которые основывают свои выводы только на использовании условия $t \sim 1$ с. Утверждение же авторов [10], что они используют в своих оценках те же значения параметров, что и в [11], не соответствует действительности: в [11] для угловой скорости и доменов в ФМЖ принято значение 100 с$^{-1}$, а для времени t оценка вообще не используется. Именно благодаря учету членов с внутренним моментом $g^{-1}M$ (действительно малых при значениях параметров, употребленных в [10], но существенных в высокочастотных гидродинамических процессах) рассматриваемые в [11] уравнения описывают, например, хорошо известные спиновые волны.

Теория, учитывающая внутренние моменты количества движения в механике ФМЖ (в том числе и связанные с внутренним вращением), развита в [3], выше были рассмотрены высокочастотные волновые процессы в ФМЖ, в которых учет внутренних моментов существен. Однако во многих гидродинамических задачах влияние внутренних моментов несущественно, поэтому представляют интерес релаксационные модели МЖ, в которых не учитываются внутренние моменты количества движения, но учитываются процессы релаксации намагниченности жидкости. Ниже рассмотрим релаксационную модель МЖ, которая в инерциальной декартовой системе координат определяется следующей системой уравнений:

(5.1)
$$\rho\,(d/dt)\,(v^\alpha - {}^1\!/\!_2\,\gamma\rho^{-1}\operatorname{rot}^\alpha M) = \partial_\beta\,[-p\delta^{\alpha 3} + \tau^{\alpha\beta} + {}^1\!/\!_2\,(M^\alpha L^\beta - M^\beta L^\alpha)] -$$
$$- \gamma M^\lambda\,\partial^\alpha\omega_\lambda + {}^1\!/\!_2\,\gamma\,(\operatorname{rot}^\lambda M)\,\partial^\alpha v_\lambda + {}^1\!/\!_2\,(M^\lambda\partial^\alpha H_\lambda - H_\lambda\,\partial^\alpha M^\lambda) + Q^\alpha$$

$$\operatorname{rot} H = 0,\ \operatorname{div}\,(H + 4\pi M) = 0$$

$$H^\alpha - \frac{1}{\chi} M^\alpha - \gamma\omega^\alpha = L^\alpha, \qquad \frac{1}{\chi} = \frac{\rho}{M}\frac{\partial U}{\partial M}, \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$$

$$p = \rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho} + \rho M\,\frac{\partial U}{\partial M} - \frac{1}{2} M^\alpha H_\alpha, \qquad T = \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$T\,\frac{ds}{dt} = -\partial_\alpha q^\alpha + \tau^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} + L^\alpha\left(\rho\,\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\rho}\,M_\alpha - [\omega,\,M]_\alpha\right)$$

Здесь U — задаваемая дифференцируемая функция от параметров ρ, s и $M = (M_\alpha M^\alpha)^{1/2}$.

Система (5.1) получается из вариационного уравнения [15]

$$\delta\iint \Lambda\,dV_3\,dt + \delta W^* + \delta W = 0$$

с лагранжианом Λ и функционалом δW^* вида

$$\Lambda = \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{8\pi}H^2 - \gamma M^\alpha \omega_\alpha - \rho U(\rho, s, M)$$

$$\delta W^* = \iint \left(\rho T\delta s - \tau^{\alpha\beta}\partial_\beta \delta x_\alpha - \rho L^{\Lambda\alpha}\delta \frac{1}{\rho} M_\alpha{}^\Lambda\right) dV_3\, dt$$

и является частным случаем уравнений (1.1), (1.2). Система (5.1) получена при помощи вариационного уравнения в [3, 5], после чего вывод этих уравнений при помощи уравнения энергии при линейной зависимости термодинамических потоков q^α, $\tau^{\alpha\beta}$, L^α от термодинамических сил $\partial_\alpha T$, $e_{\alpha\beta}$, dM/dt — $[\omega, M]$ и при $\gamma = 0$ дан в обзоре [10].

Релаксационный член L^α уравнения для намагниченности, компоненты вектора потока тепла q^α и компоненты тензора вязких напряжений $\tau^{\alpha\beta}$ в уравнениях (5.1) можно определить при помощи функции диссипации σ, зависящей от термодинамических сил $e_{\alpha\beta}$, $\partial_\alpha T$, $\rho d(M/\rho)/dt$ — $[\omega, M]$ и, возможно, других определяющих параметров жидкости и поля

$$T\sigma = -\frac{1}{T}q^\alpha \partial_\alpha T + \tau^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} + L^\alpha\left(\rho\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho}M_\alpha - [\omega, M]_\alpha\right) \tag{5.2}$$

$$L^\alpha = \mu_1 \partial\sigma/\partial\left(\rho\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho}M_\alpha - [\omega, M]_\alpha\right)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \mu_2 \partial\sigma/\partial e_{\alpha\beta}, \quad q^\alpha = \mu_3\, \partial\sigma/\partial\partial_\alpha T$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — скалярные функции от определяющих параметров.

Если σ — квадратичная функция термодинамических сил, то уравнения (5.2) определяют соотношения Онзагера. В частности, в качестве соотношений Онзагера в простейшем случае можно принять соотношения (1.3), (1.4). Для $\tau^{\alpha\beta}$, L^α далее будут использоваться соотношения вида

$$\tau^{\alpha\beta} = 2\mu e^{\alpha\beta} + \lambda\delta^{\alpha\beta}e_\lambda{}^\lambda, \qquad L^\alpha = \theta^{\alpha\beta}\left(\rho\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho}M_\beta - [\omega, M]_\beta\right) \tag{5.3}$$

$$\theta^{\alpha\beta} = \theta_\perp(\delta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta) + \theta_\parallel n^\alpha n^\beta$$

в которых λ, μ — коэффициенты вязкости. Коэффициенты λ, μ, θ, $\theta_\parallel$ в общем случае могут задаваться как функции от определяющих параметров жидкости и поля.

Для несжимаемой жидкости давление p рассматривается как добавочная неизвестная функция, а уравнение для p в (5.1) в этом случае опускается. Уравнения (5.1) учитывают гиромагнитную энергию жидкости, процессы релаксации намагниченности, вязкость и теплопроводность жидкости.

Система уравнений (5.1), (5.3), как это следует из получаемого далее решения задач Куэтта и Пуазейля, описывает эффект увеличения вязкости жидкости в магнитном поле, причем при соответствующем выборе коэффициентов θ в (5.3) приращение коэффициента вязкости оказывается таким же, как и в теории ФМЖ с внутренним вращением [8].

6. Течение Куэтта. Рассмотрим стационарное течение жидкости между плоскостями $x^3 = 0$, $x^3 = d = \mathrm{const}$ в заданном постоянном внешнем поле с индукцией $B^\circ = (B_1{}^\circ, B_2{}^\circ, B_3{}^\circ)$. Плоскость $x^3 = 0$ закреплена, плоскость $x^3 = d$ движется с постоянной скоростью $v = (2\omega_0 d, 0, 0)$, $\omega_0 = \mathrm{const}$. Уравнения (5.1), (5.3) при $Q^\alpha = 0$ и граничные условия (условие прилипания жидкости и известные условия для магнитного поля) удовлетворяются, если в области $0 < x^3 < d$ положить $M^\alpha = \mathrm{const}$ и

$$v = (2\omega_0 x^3, 0, 0),\ H = (B_1{}^\circ, B_2{}^\circ, B_3{}^\circ - 4\pi M_3)$$

Уравнение для намагниченности в (5.1) в рассматриваемом случае переходит в алгебраическое уравнение, из которого в предположении малости безразмерного параметра $\omega_0\theta$ с точностью до членов первого порядка малости по $\omega_0\theta$ имеем

$$M^\alpha = \chi H^\alpha + \theta\chi^2[\omega, H]^\alpha - \chi\gamma\omega^\alpha.$$

Вычисление компоненты вектора силы f_1, действующей на плоскость $x^3 = 0$, дает $f^1 = 2\mu_e\omega_0$, где для эффективного коэффициента вязкости μ_e получается

$$\mu_e = \mu + {}^1/_4\chi^2 H^2\theta \sin^2\alpha \tag{6.1}$$

Здесь α — угол между вектором вихря скорости и вектором напряженности магнитного поля H.

7. Течение Пуазейля. Рассмотрим стационарное течение жидкости в цилиндрической трубе с круговым сечением радиуса R из немагнитного материала под действием перепада давления в постоянном магнитном поле H_0, направленном по оси трубы. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, связанную с трубой, и будем искать решение уравнений (1), (3) при $Q^\alpha = 0$ в виде разложений по безразмерному параметру $\varepsilon = -{}^1/_4\rho R^3\mu^{-2}\partial p/\partial z$ в предположении малости ε

(7.1) $$v = v_1\varepsilon + v_2\varepsilon^2 + \ldots, \quad M = M_0 + M_1\varepsilon + M_2\varepsilon^2 + \ldots$$

Учитывая члены второго порядка малости по ε, из (5.1), (5.3) получаем уравнения для определения функций v, M

(7.2) $$\mu \frac{d}{dr} v_1^z - \frac{1}{2} H_0 (1 + 4\pi\chi) M_1^r = -\frac{2\mu^2}{\rho R^3} r$$

$$\mu \left(\frac{d}{dr} v_2^\varphi - \frac{1}{r} v_2^\varphi\right) = \left(2\pi M_1^\varphi + \frac{1}{4} \gamma \frac{d}{dr} v_1^z\right) M_1^r,$$

$$M_1^\varphi = \frac{1}{2} \chi\gamma \frac{d}{dr} v_1^z$$

$$M_2^z \left(1 - H_0 \frac{\partial\chi}{\partial M_0}\right) = -\frac{\chi\gamma}{2} \left(\frac{\partial v_2^\varphi}{\partial r} + \frac{v_2^\varphi}{r}\right) + \frac{\chi\theta}{2} M_1^r \frac{dv_1^z}{dr} + {}$$
$$+ \frac{1}{2\chi} \frac{\partial\chi}{\partial M_0} [(M_1^r)^2 + (M_1^\varphi)^2]$$

$$\frac{1 + 4\pi\chi}{\chi} M_1^r + \frac{\theta}{2} M_0^z \frac{d}{dr} v_1^z = 0$$

Уравнения (7.1), (7.2) имеют следующее решение, удовлетворяющее условию прилипания жидкости на стенках трубы:

$$v^r = 0, \; v^z = \frac{1}{4\mu_e} (r^2 - R^2) \frac{\partial p}{\partial z}, \qquad v^\varphi = \frac{\gamma(\mu - \mu_e)}{16\mu\mu_e^2 H_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 r (r^2 - R^2)$$

$$M^\varphi = \frac{\chi\gamma}{4\mu_e} r \frac{\partial p}{\partial z}, \qquad M^r = -\frac{1}{H_0 (1 + 4\pi\chi)} \frac{\mu_e - \mu}{\mu_e} r \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$M^z = \chi H_0 + \frac{(\partial p/\partial z)^2}{1 - H_0 \partial\chi/\partial M_0} \left\{\frac{1}{2\chi} \frac{\partial\chi}{\partial M_0} \left(\frac{\chi^2\gamma^2}{16\mu_e^2} + \frac{(\mu_e - \mu)^2}{H_0^2 (1 + 4\pi\chi)^2 \mu_e^2}\right) r^2 + {}\right.$$
$$\left. + \frac{\chi(\mu - \mu_e)}{4H_0\mu_e^2} \left[\frac{\gamma^2}{4\mu} (-2r^2 + R^2) + \frac{\theta}{1 + 4\pi\chi} r^2\right]\right\}$$

Здесь $\mu_e = \mu + {}^1/_4\chi^2 H_0^2\theta$ — эффективный коэффициент вязкости (совпадающий с выражением (6.1), так как здесь с рассматриваемой степенью точности $\alpha = \pi/2$).

Из решения видно, что при учете гиромагнитной энергии (при $\gamma \neq 0$) намагниченная жидкость в трубе совершает винтовое движение. Для расхода жидкости получается обычное соотношение теории вязкой жидкости Навье — Стокса, в котором коэффициент вязкости μ заменяется на эффективный коэффициент μ_e.

Отметим, что оценка членов с коэффициентом γ в полученных выше решениях показывает, что эти члены для реальных жидкостей, вообще говоря, малы и их влиянием на рассмотренные здесь течения практически можно пренебречь. Однако эти решения с малыми членами с γ описывают эффекты (например, намагничивание жидкости, определяемое вихрем скорости), которые можно использовать для экспериментального определения величины γ. С другой стороны, очевидно, что существуют гидродинамические задачи (например, связанные с ультразвуковыми волнами), в которых члены с γ существенны.

Вид зависимости времени релаксации намагниченности θ в формуле (6.1) от определяющих параметров и, в частности, от магнитного поля должен выбираться на основе сравнения с опытной зависимостью $\mu_e = \mu_e(H)$. В частности, формула (6.1) применительно к ФМЖ уже при $\theta = \mathrm{const}$ описывает насыщение вязкости ФМЖ в сильных магнитных полях, величина которого точно соответствует опыту при надлежащем выборе постоянной θ (в ФМЖ время релаксации θ определяется характерным временем броуновской вращательной диффузии частиц] в ФМЖ и при их диаметре ~100 Å в жидкости с вязкостью $\sim 10^{-2}$ Пз равно по порядку величины $\sim 10^{-6}$ с). При малых магнитных полях формула (6.1) при $\theta = \mathrm{const}$ во всяком случае качественно правильно описывает известные опытные данные [16—18]. Количественное сравнение с этими экспериментами в области малых полей затруднительно ввиду отсутствия в [16—18] прямых опытных данных по зависимости намагниченности ФМЖ от поля. Отметим также, что формула в [8] для μ_e также получается из (6.1) при соответствующем выборе зависимости θ от поля; однако, согласно [17, 18], соотношение для μ_e в [8] плохо соответствует опыту (используемые в [8] концентрации частиц для получения правильных значений μ_e в области насыщения не соответствуют реальным концентрациям).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids. 1964. V. 7. No. 12. P. 1927—1937.
2. *Седов Л. И.* О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 4—17.
3. *Желнорович В. А.* Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами. М.: Изд-во МГУ. 1980. 174 с.
4. *Желнорович В. А.* О ньютонианских уравнениях для жидкостей с внутренним магнитным и механическим моментами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 155—158.
5. *Желнорович В. А.* О моделях намагничивающихся и поляризующихся сред с микроструктурой // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1979. Т. 249. № 2. С. 333—337.
6. *Maugin G. A.* A phenomenological theory of ferroliquids // Int. J. Eng. Sci. 1978. V. 16. No. 12. P. 1029—1044.
7. *Суязов В. М.* О несимметрической модели вязкой электромагнитной жидкости // ПМТФ. 1970. № 2. С. 12—20.
8. *Шлиомис М. И.* Эффективная вязкость магнитных суспензий // Журн. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1971. Т. 61. Вып. 6. С. 2411—2418.
9. *Кашевский Б. Э.* О моделях магнитной релаксации в феррогидродинамике // Магнитн. гидродинамика. 1978. № 5. С. 14—20.
10. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика намагничивающихся жидкостей // Итоги науки и техники: Механика жидкости и газа. Т. 16. М.: ВИНИТИ. 1981. С. 76—208.
11. *Желнорович В. А.* Течение Куэтта и течение Пуазейля вязкой намагничивающейся жидкости // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1978. Т. 238. №. 2. С. 289—292.
12. *Батяев И. М., Козлова А. Н.* Ферромагнитный резонанс в коллоидальной суспензии кобальта / Физические свойства и гидродинамика дисперсных ферромагнетиков. Свердловск: Изд-е УНЦ АН СССР. 1977. С. 58—61.
13. *Цеберс А. О.* Вязкость мелкодисперсной суспензии частиц кубической кристаллической симметрии в магнитном поле // Магнитн. гидродинамика. 1973. № 3. С. 33—40.
14. *Шлиомис М. И.* Магнитные жидкости // Успехи физ. наук (УФН). 1974. Т. 112. №. 3. С. 427—458.
15. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук (УМН). 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 121—180.
16. *McTaque J. P.* Magnetoviscosity of magnetic colloids // J. Chem. Phys. 1969. V. 51. No. 1. P. 133—136.
17. *Мозговой Е. Н., Блум Э. Я., Цеберс А. О.* Течение ферромагнитной жидкости в магнитном поле // Магнитн. гидродинамика. 1973. № 1. С. 61—67.
18. *Майоров М. М.* Измерение вязкости феррожидкости в магнитном поле // Магнитн. гидродинамика. 1980. № 4. С. 11—18.

Москва

Поступила в редакцию 1.II.1983

УДК 533:538

О СТАТЬЕ В. А. ЖЕЛНОРОВИЧА «О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ»

Гогосов В. В.

Работа В. А. Желноровича [1] состоит из двух частей. В первой части предлагаются уравнения для описания магнитных жидкостей (МЖ), которые не принципиально отличаются от известных уравнений [2—4]. Система линеаризуется и ищется решение о распространении монохроматических волн. Во второй части работы (п. 5) делается попытка ответить на критику, содержащуюся в обзоре [4] и работе [3], статьи В. А. Желноровича [5]. Далее, в п. 5 выписывается еще одна модель МЖ, отличающаяся от предлагаемой в п. 1 [1], с использованием которой решаются задачи Куэтта и Пуазейля. При этом в [1] не только повторяются ошибки, о которых уже говорилось в печати [3, 4], но и делаются новые, обсуждению которых и посвящена эта статья.