ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W., Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. V. 1. Cambridge: Univ. Press, 1879. 508 p.
2. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.— Успехи мат. наук, 1982, т. 37, № 5, с. 3—49.
3. *Conley C. C., Zehnder E.* The Birkhoff — Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold.— Invent Math., 1983, 73, No. 1, p. 33—49.
4. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.

Москва

Поступила в редакцию 13.I.1986

УДК 533.6.011

О ТРАНСЗВУКОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

Брежнев А. Л., Чернов И. А.

Обсуждается вопрос о нахождении частных решений неоднородных линеаризованных трансзвуковых уравнений, возникающих при трансзвуковых разложениях, выраженных в явном виде через основное решение уравнения Кармана—Фальковича (КФ-уравнения).

При использовании процедуры трансзвукового разложения, например в теории тонкого тела [1], решения уравнений газовой динамики представляются в виде рядов по степеням малого параметра, характеризующего меру отклонения изучаемого потока от однородного звукового или близкого к звуковому. В первом приближении нужно решить нелинейное КФ-уравнение [2, 3], для приближений высших порядков получаются неоднородные линеаризованные КФ-уравнения, правые части которых зависят от предшествующих слагаемых. Удобно иметь явное выражение для частных решений, записанное через основное решение. Так, приведены [4] два примера нахождения первой поправки в теории малых возмущений для осесимметричных течений сжимаемой жидкости, когда поправка выражена через основное решение без учета его конкретной структуры, и отмечена уникальность таких результатов. В [5] удалось найти первую поправку к решению КФ-уравнения.

Для плоскопараллельного течения КФ-уравнение сводится на плоскости годографа к линейному уравнению Трикоми, а процедура трансзвукового разложения допускает, как это было показано в [6, 7], нахождение частных решений для любого приближения. Отсюда следует, что при использовании трансзвуковых разложений непосредственно на физической плоскости можно получить частные решения общего вида для i-го приближения. В данной заметке не демонстрируется процедура перехода от годографических разложений к разложениям на физической плоскости, а сразу выписывается результат: первая поправка, которая совпадает с найденной в [5], и вторая поправка. Интересен факт появления во второй поправке криволинейных интегралов, тогда как в первой их нет.

Для осесимметричного течения первая поправка к решению КФ-уравнения имеет тот же вид, что и для плоскопараллельного. Однако найти в общем виде вторую поправку, используя аналогию с плоскопараллельным случаем, не удалось. Здесь указывается замена переменной, которая существенно упрощает дифференциальное уравнение для ее нахождения.

Плоскопараллельные и осесимметричные безвихревые течения невязкого газа описываются уравнением

$$(1)\qquad -(\gamma+1)\varphi_x\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\omega\varphi_y/y=[(\gamma+1)\varphi_x^2/2+(\gamma-1)\varphi_y^2/2]\varphi_{xx}+ \\ +2(1+\varphi_x)\varphi_y\varphi_{xy}+[(\gamma+1)\varphi_y^2/2+(\gamma-1)(\varphi_x+\varphi_x^2/2)]\varphi_{yy}+ \\ +\omega(\gamma-1)(2\varphi_x+\varphi_x^2+\varphi_y^2)\varphi_y/(2y)$$

где x, y — декартовы или цилиндрические координаты, φ — потенциал возмущений звукового потока, ω — параметр, равный нулю или единице соответственно для плоского или осесимметричного течения, γ — отношение удельных теплоемкостей газа.

В околозвуковом диапазоне скоростей уравнение (1) заменяется КФ-уравнением

(2) $$-(\gamma+1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx}+\varphi_{0yy}+\omega\varphi_{0y}/y=0$$

Пусть решение φ_0 уравнения (2) известно. Построим решение φ уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра ε с главным членом-функцией φ_0

(3) $$\varphi=\varepsilon^3\varphi_0(\bar{x},\bar{y})+\varepsilon^5\varphi_1(\bar{x},\bar{y})+\varepsilon^7\varphi_2(\bar{x},\bar{y})+\ldots$$
$$\bar{x}=x/\varepsilon,\quad \bar{y}=y$$

Далее черточки будут опущены. Поправки $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ удовлетворяют линейным неоднородным уравнениям, которые получаются при подстановке (3) в (1):

(4) $$K(\varphi_1)=(2\gamma-1)(\gamma+1)\varphi_{0x}^2\varphi_{0xx}/2+2\varphi_{0y}\varphi_{0xy}$$

(5) $$K(\varphi_2)=(\gamma+1)\varphi_{1x}\varphi_{1xx}+(\gamma-{}^1/_2)(\gamma+1)(\varphi_{0x}^2\varphi_{1x})_x+2(\varphi_{0y}\varphi_{1y})_x+$$
$$+[({}^1/_2)(\gamma-1)\varphi_{0y}^2+(\gamma^3-\gamma)\varphi_{0x}^3]\varphi_{0xx}+2\gamma\varphi_{0x}\varphi_{0y}\varphi_{0xy}$$
$$K(\Phi)\equiv-(\gamma+1)\varphi_{0x}\Phi_{xx}-(\gamma+1)\varphi_{0xx}\Phi_x+\Phi_{yy}+\omega\Phi_y/y$$

Попытаемся найти частные решения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ уравнений (4), (5) в общем виде, выразив их через функцию φ_0, ее производные и интегралы. Тогда формула (3) будет представлять собой оператор перехода от решения приближенного КФ-уравнения (2) к решению точного уравнения (1).

Частный интеграл уравнения (4) имеет вид [5]

(6) $$\varphi_1=Ay\varphi_{0x}\varphi_{0y}+B\varphi_0\varphi_{0x}$$
$$A=(2\gamma+5)/10,\ B=(-2\gamma+5)/10,\ \omega=0$$
$$A=(2\gamma+5)/4,\ B=1,\ \omega=1$$

Подставим функцию φ_1, определяемую формулой (6), в правую часть уравнения (5). Тогда получим для φ_2 неоднородное уравнение с правой частью, состоящей из 24 слагаемых

(7) $$K(\varphi_2)=A^2(\gamma+1)y^2\varphi_{0x}\varphi_{0y}\varphi_{0xx}\varphi_{0xxy}+\ldots$$

где точками обозначены остальные 23 одночлена в правой части.

Представим частное решение уравнения (7) в виде

(8) $$\varphi_2=[\varphi_1^2/(2\varphi_{0x})+({}^1/_8)(\gamma+1)A^2y^2\varphi_{0x}^4]_x+\varphi_2^*(x,y)$$

Подставив (8) в (7), получим для φ_2^* неоднородное уравнение с более простой правой частью, состоящей из трех слагаемых

(9) $$K(\varphi_2^*)=E_1\varphi_{0x}^3\varphi_{0xx}+E_2\varphi_{0y}^2\varphi_{0xx}+E_3\varphi_{0x}\varphi_{0y}\varphi_{0xy}$$
$$E_1=(\gamma+1)(8\gamma^2+5)/20,\ E_2=(\gamma+1)/2,\ E_3=2(\gamma+1);\ \omega=0$$
$$E_1=(\gamma+1)(4\gamma^2+4\gamma+7)/8,\ E_2=(3\gamma+6)/2,\ E_3=4\gamma+7;\ \omega=1$$

В случае $\omega=0$ частное решение уравнения (9) имеет вид

(10) $$\varphi_2^*=Cx\left(\frac{\varphi_{0x}^3}{6}+\frac{\varphi_{0y}^2}{2(\gamma+1)}\right)+D(-\varphi_{0y}I_1+I_2)$$
$$C=-(24\gamma^2+70\gamma+85)/140,\ D=(-24\gamma^2+70\gamma+55)/140$$
$$I_1=\int\left(\frac{\varphi_{0y}}{\gamma+1}dx+\frac{\varphi_{0x}^2}{2}dy\right)$$
$$I_2=\int\left[\left(\frac{\varphi_{0x}^3}{6}+\frac{\varphi_{0y}^2}{2(\gamma+1)}\right)dx+\frac{\varphi_{0x}^2\varphi_{0y}}{2}dy\right]$$

Здесь используется криволинейный интеграл второго рода, не зависящий от пути интегрирования между точками (0, 0) и (x, y).

Если φ_0 — автомодельное решение, то φ_i также имеют автомодельный вид, при этом разложение (3) записывается в форме (n — показатель автомодельности, $\zeta=xy^{-n}(\gamma+1)^{-1/3}$ — автомодельная переменная)

$$\varphi=y^{3n-2}f_0(\zeta)+y^{5n-4}(\gamma+1)^{-1/3}f_1(\zeta)+y^{7n-6}(\gamma+1)^{-2/3}f_2(\zeta)+\ldots$$

Используя (6), (8), (10), получим вид f_1, f_2 (штрих означает производную по ζ)

$$f_1=a_1f_0f_0'+a_2\zeta f_0'^2\quad(\omega=0,\ \omega=1)$$
$$a_1=A(3n-2)+B,\quad a_2=-nA$$

$$f_2 = b_1\zeta^3 f_0'^2 + b_2\zeta^2 f_0 f_0' + b_3\zeta f_0^2 + b_4\zeta f_0'^3 + b_5 f_0 f_0'^2 + b_6\zeta f_0 f_0' f_0'' +$$
$$+ b_7 f_0'^3 f_0'' + b_8 f_0^2 f_0'' \quad (\omega = 0)$$
$$b_1 = n^2 D/2 + (-10n + 9)n^3 C/(2H)$$
$$b_2 = (-6n + 4)b_1/n, \quad b_3 = (3n - 2)^2 b_1/n^2$$
$$b_4 = 11n\,(n - 1)A^2/2 - nAB + D/6 + (29n - 24)nC/(6H)$$
$$b_5 = (5n - 4)AB + 5\,(3n - 2)(-n + 1)A^2/2 + B^2 + (3n - 2)(-3n +$$
$$+ 3)C/(2H)$$
$$b_6 = 2a_1a_2, \; b_7 = 2A^2, \; b_8 = a_1^2/2$$
$$H = (7n - 6)(4n - 3)$$

Метод разложения решения уравнения (1) в ряд по автомодельным составляющим широко применяется, начиная с [8], однако вид поправок f_1, f_2 был найден только для частных значений показателя n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cole J. D., Messiter A. F.* Expansion procedures and similarity laws for transonic flow // Z. angew. Math. Phys. 1957. B. 8. H. 1. S. 1—25.
2. *Karman Th.* The similarity law of transonic flow // J. Math. and Phys. 1947. V. 26. No. 3. P. 182—190 = Закон подобия для трансзвукового потока // Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит. 1950. С. 173—182.
3. *Фалькович С. В.* К теории сопла Лаваля // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 503—512.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. *Hayes W. D.* La seconde approximation pour les écoulements transsoniques non visqueux // J. Méc. 1966. V. 5. No. 2. P. 163—206.
6. *Чернов И. А.* Высшие приближения в трансзвуковом разложении решения уравнения Чаплыгина // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 169—171.
7. *Chernov I. A.* Solution of Tricomi equation and transonic expansions in gas dynamics // Mixed type equations, Teubner Texte zur Math. B. 90. Leipzig: 1986. S. 64—83.
8. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит. 1960. 421 с.

Саратов

Поступила в редакцию
24.XI.1986

УДК 533:538

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Желнорович В. А.

Рассматривается система уравнений, описывающая модели магнитных жидкостей (МЖ) с внутренним моментом количества движения в магнитном поле. Приводятся линеаризованные уравнения и их решения в виде спиновых волн и магнитозвуковых. Вычислен тензор высокочастотной магнитной восприимчивости жидкости и определены частоты однородного магнитного резонанса. Связь между спиновыми и акустическими волнами в МЖ обусловлена наличием во внутренней энергии жидкости членов с вектором вихря скорости и тензором скоростей деформации (определяющих, в частности, гиромагнитную энергию). Обсуждаются различные известные модели, применяемые для описания ферромагнитных жидкостей (ФМЖ). Рассматриваются релаксационные модели МЖ, в рамках которых даются решения задач о плоском течении Куэтта и цилиндрическом течении Пуазейля. Получено новое выражение для величины эффективной вязкости МЖ.

Известно несколько различных моделей МЖ. Наиболее простая из них [1] хорошо описывает парамагнитные жидкости и некоторые виды ФМЖ в квазистационарных магнитных полях. Однако в ряде важных случаев эта модель неприменима (например, при высоких частотах магнитного поля, для ФМЖ при большой объемной концентрации ферромагнитных частиц с достаточно большой энергией магнитной анизотропии). Поэтому получили распространение также модели МЖ, связанные с учетом процессов релаксации намагниченности и с учетом внутренних моментов количества движения [2—9].