Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 531.01

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

Болотин С. В.

Доказывается оценка снизу числа периодических решений уравнений движения материальной точки в n-мерном евклидовом пространстве под действием потенциальных и гироскопических сил.

Рассмотрим систему с гироскопическими силами [1]

$$(A(t)x^{\cdot})^{\cdot} = \Gamma x + U_x(x,t), \quad x \in R^n \tag{1}$$

где $A(t)$ — симметрическая положительно-определенная матрица, 2π-периодически непрерывно зависящая от времени, Γ — постоянная кососимметрическая матрица гироскопических сил, а потенциал U непрерывно 2π-периодически зависит от времени, имеет непрерывные вторые производные по пространственным переменным и периодичен по ним, например

$$U(x+k,t) \equiv U(x,t) \tag{2}$$

для всех целочисленных векторов $k \in Z \subset R^n$.

Теорема. Если система

$$(A(t)x^{\cdot})^{\cdot} = \Gamma x^{\cdot} \tag{3}$$

не имеет непостоянных 2π-периодических решений, то система (1) имеет не меньше $n+1$ различных 2π-периодических решений, а при учете кратности — не меньше 2^n. При этом решения, отличающиеся сдвигом на период потенциала, считаются одинаковыми.

Условие теоремы означает, что система $A(t)x^{\cdot} = \Gamma x$ не имеет мультипликаторов Флоке, равных единице. Если потенциал U мал, то утверждение теоремы может быть получено методами теории возмущений Пуанкаре.

Система (1) лагранжева с функцией Лагранжа

$$L(x, x^{\cdot}, t) = {}^1/_2 (A(t)x^{\cdot}, x^{\cdot}) + {}^1/_2 (\Gamma x^{\cdot}, x) + U(x,t) \tag{4}$$

Будем искать 2π-периодические решения системы (1) как критические точки функционала действия Гамильтона

$$F(x) = \int_0^{2\pi} L(x(t), x^{\cdot}(t), t)\, dt \tag{5}$$

на множестве 2π-периодических кривых $t \mapsto x(t) \in R^n$. Область определения функционала (5) будет уточнена в дальнейшем.

Если гироскопических сил нет, то функция (4) периодична по пространственным переменным, функционал (5) определен на множестве кривых на n-мерном торе $T^n = R^n/Z^n$ и утверждение теоремы вытекает из результатов вариационного исчисления (теории Морса). В общем случае функционал (5) не ограничен снизу, так что обычная теория Морса неприменима. Для неограниченных и многозначных функционалов разработан аналог теории Морса [2], однако в данном случае результаты [2] неприменимы, поскольку постоянные кривые не являются точками локального минимума функционала (5). Доказательство теоремы основано на идеях работы [3].

Пусть H — гильбертово пространство 2π-периодических функций $t \mapsto x(t) \in R^n$ с компонентами класса L^2 и скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} (x(t), y(t))\, dt$$

Пусть $X \subset H$ — область определения линейного самосопряженного оператора A, соответствующего системе (3):

$$(Ax)(t) = -(A(t)\, x^{\cdot}(t))^{\cdot} + \Gamma x^{\cdot}(t) \tag{6}$$

т. е. множество $x \in H$ таких, что $Ax \in H$. Множество X имеет структуру гильбертова пространства, плотно в H, вложение $X \subset H$ вполне непрерывно, а формула (5) определяет функционал класса C^2

$$F(x) = {}^1/_2\langle Ax, x\rangle + \bar{U}(x) \tag{7}$$

на X, где

$$\bar{U}(x) = \int_0^{2\pi} U(x(t), t)\, dt \tag{8}$$

— функционал класса C^2 на H. Критические точки функционала (7) находятся во взаимно однозначном соответствии с 2π-периодическими решениями системы (1).

Представим аргумент $x \in X$ функционала (7) в виде $x = \bar{x} + \xi$, где $\bar{x} \in R^n$ — среднее значение x, а ξ — элемент множества $X_0 \subset X$ функций с нулевым средним. В новых переменных $\bar{x}$, ξ

$$F(x) = F(\bar{x}, \xi) = {}^1/_2\langle A\xi, \xi\rangle + \bar{U}(\bar{x} + \xi) \tag{9}$$

В силу (2), (8) и (9) имеем

$$F(\bar{x} + k, \xi) \equiv F(\bar{x}, \xi) \tag{10}$$

для всех $k \in Z^n$. Поэтому формула (9) определяет функционал класса C^2 на $T^n \times X_0$, где $T^n = R^n/Z^n$ — n-мерный тор. По условию теоремы, ядро оператора (6) состоит из множества $R^n \subset X$ постоянных функций, так что квадратичная форма в формуле (9) невырождена.

Методом Ляпунова — Шмидта сведем поиск критических точек функционала (9) к исследованию функции конечного числа переменных. Выберем

$$a > \max_{x,\, t} \| U_{xx}(x, t) \| \tag{11}$$

Согласно теории Штурма — Лиувилля [4], самосопряженный оператор A имеет компактную резольвенту, а его вещественный чисто точечный спектр не имеет точек накопления, кроме $+\infty$. Пусть y — ортогональная проекция вектора $x \in H$ на подпространство $Y \subset H$, соответствующее части спектра оператора A, лежащей в $[a, +\infty)$, а z — проекция на дополнительное подпространство $Z \subset H$. Подпространства Y и Z инварианты относительно A, причем Z конечномерно. Оператор $A \mid Y$ имеет компактный обратный A^{-1}: $Y \to X \in H$, причем $\| A^{-1}y \| \leqslant a^{-1} \| y \|$ для всех $y \in Y$. В новых переменных y, z формула (7) примет вид

$$F(x) = F(y + z) = {}^1/_2\langle Ay, y\rangle + {}^1/_2\langle Az, z\rangle + \bar{U}(y + z) \tag{12}$$

Критические точки функционала F определяются из уравнений

$$\nabla_y F(y + z) = 0, \quad \nabla_z F(y + z) = 0 \tag{13}$$

Первое из уравнений (13) эквивалентно уравнению

$$y + A^{-1} \quad \nabla_y \bar{U}(y + z) = 0 \tag{14}$$

В силу (11) из теоремы о неявной функции или принципа сжатых отображений следует, что уравнение (14) имеет единственное решение $y = h(z)$, где h: $Z \to X$ — функция класса C^1. Положим $f(z) = F(h(z) + z)$. По построению, f— функция класса C^2 на конечномерном пространстве Z, а ее критические точки находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками функционала F.

В силу (10) функция f определяет функцию класса C^2 на $T^n \times Z_0$, где Z_0 — множество функций из Z с нулевым средним. Согласно (12), полагая $z = \bar{z} + \zeta$, имеем

$$f(\bar{z}, \zeta) = {}^1/_2\langle A\zeta, \zeta\rangle + g(\bar{z}, \zeta); \quad \bar{z} \in T^n, \quad \zeta \in Z_0$$

где $\langle A\zeta, \zeta\rangle$ — невырожденная квадратичная форма на $Z_0 = R^N$, а частные производные функции g ограничены при $\| \zeta \| \to \infty$. Отсюда и из результатов [3] вытекает утверждение теоремы.

Теорема обобщается на случай, когда потенциал U инвариантен относительно любой кристаллографической группы G преобразований пространства R^n. В этом случае в доказательстве надо заменить Z^n на G, а нижней оценкой числа периодических решений будет служить категория Люстерника—Шнирельмана пространства R^n/G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W., Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. V. 1. Cambridge: Univ. Press, 1879. 508 p.
2. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.— Успехи мат. наук, 1982, т. 37, № 5, с. 3—49.
3. *Conley C. C., Zehnder E.* The Birkhoff — Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold.— Invent Math., 1983, 73, No. 1, p. 33—49.
4. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.

Москва

Поступила в редакцию 13.I.1986

УДК 533.6.011

О ТРАНСЗВУКОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

Брежнев А. Л., Чернов И. А.

Обсуждается вопрос о нахождении частных решений неоднородных линеаризованных трансзвуковых уравнений, возникающих при трансзвуковых разложениях, выраженных в явном виде через основное решение уравнения Кармана—Фальковича (КФ-уравнения).

При использовании процедуры трансзвукового разложения, например в теории тонкого тела [1], решения уравнений газовой динамики представляются в виде рядов по степеням малого параметра, характеризующего меру отклонения изучаемого потока от однородного звукового или близкого к звуковому. В первом приближении нужно решить нелинейное КФ-уравнение [2, 3], для приближений высших порядков получаются неоднородные линеаризованные КФ-уравнения, правые части которых зависят от предшествующих слагаемых. Удобно иметь явное выражение для частных решений, записанное через основное решение. Так, приведены [4] два примера нахождения первой поправки в теории малых возмущений для осесимметричных течений сжимаемой жидкости, когда поправка выражена через основное решение без учета его конкретной структуры, и отмечена уникальность таких результатов. В [5] удалось найти первую поправку к решению КФ-уравнения.

Для плоскопараллельного течения КФ-уравнение сводится на плоскости годографа к линейному уравнению Трикоми, а процедура трансзвукового разложения допускает, как это было показано в [6, 7], нахождение частных решений для любого приближения. Отсюда следует, что при использовании трансзвуковых разложений непосредственно на физической плоскости можно получить частные решения общего вида для i-го приближения. В данной заметке не демонстрируется процедура перехода от годографических разложений к разложениям на физической плоскости, а сразу выписывается результат: первая поправка, которая совпадает с найденной в [5], и вторая поправка. Интересен факт появления во второй поправке криволинейных интегралов, тогда как в первой их нет.

Для осесимметричного течения первая поправка к решению КФ-уравнения имеет тот же вид, что и для плоскопараллельного. Однако найти в общем виде вторую поправку, используя аналогию с плоскопараллельным случаем, не удалось. Здесь указывается замена переменной, которая существенно упрощает дифференциальное уравнение для ее нахождения.

Плоскопараллельные и осесимметричные безвихревые течения невязкого газа описываются уравнением

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad -(\gamma+1)\,\varphi_x\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\omega\varphi_y/y &= [(\gamma+1)\,\varphi_x^2/2+(\gamma-1)\,\varphi_y^2/2]\,\varphi_{xx}+\\
&+2\,(1+\varphi_x)\,\varphi_y\varphi_{xy}+[(\gamma+1)\,\varphi_y^2/2+(\gamma-1)\,(\varphi_x+\varphi_x^2/2)]\,\varphi_{yy}+\\
&+\omega\,(\gamma-1)\,(2\varphi_x+\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,\varphi_y/(2y)
\end{aligned}
$$

где x, y — декартовы или цилиндрические координаты, φ — потенциал возмущений звукового потока, ω — параметр, равный нулю или единице соответственно для плоского или осесимметричного течения, γ — отношение удельных теплоемкостей газа.