

УДК 539.376 + 532.135

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВЯЗКОУПРУГИХ
ОСНОВАНИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ СТАРЕНИЮ, С СИСТЕМАМИ
НЕОДНОВРЕМЕННО ПРИКЛАДЫВАЕМЫХ ШТАМПОВ**

Манжиров А. В.

Исследуются плоские контактные задачи о взаимодействии неоднородных стареющих вязкоупругих оснований с произвольными конечными системами неодновременно прикладываемых и снимаемых жестких штампов. Даются постановки задач. Выводятся системы разрешающих двумерных интегральных уравнений и предлагаются методы их решения. Приводятся числовые расчеты для разных типов старения при взаимодействии бетонного основания с двумя неодинаковыми, неодновременно прикладываемыми штампами. Обсуждаются качественные эффекты.

1. Рассмотрим задачи о действии произвольной системы жестких штампов на основания, обладающие свойствами неоднородности, ползучести и старения [1—3], в условиях плоской деформации. Моменты приложения и снятия штампов системы различны. Основания состоят из двух слоев. Нижний слой толщины H контактирует без трения или сцеплен с жестким основанием, верхний слой лежит без трения на нижнем. Каждый i -й штамп контактирует с участком $a_i \leq x \leq b_i$ верхнего слоя толщины h , где x — горизонтальная координата. Предполагается, что все штампы гладкие и верхний слой тонкий, т. е. $b_i - a_i \gg h$ [4]. Момент приложения i -го штампа обозначим τ_i , а момент снятия τ_i° ($\tau_i < \tau_i^\circ$; $i = 1, 2, \dots, n$), силу и момент, действующие на него, $P_i(t)$ и $M_i(t)$ соответственно, где t — время.

Запишем уравнения состояния линейного неоднородного стареющего вязкоупругого тела в самом общем виде [3]

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad e_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \frac{s_{ij}(\mathbf{x}, t)}{2G(t + \kappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})} - \int_{\tau_1}^t \frac{s_{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{2G(\tau + \kappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})} \times \\
 &\times Q_1(t + \kappa(\mathbf{x}), \tau + \kappa(\mathbf{x}), \mathbf{x}) d\tau \\
 \varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t)}{E^*(t + \kappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})} - \int_{\tau_1}^t \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{x}, \tau)}{E^*(\tau + \kappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})} \times \\
 &\times Q_2(t + \kappa(\mathbf{x}), \tau + \kappa(\mathbf{x}), \mathbf{x}) d\tau \\
 Q_1(t, \tau) &= G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right] \\
 Q_2(t, \tau) &= E^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E^*(\tau)} + C^*(t, \tau) \right] \\
 E^*(t) &= E(t) [1 - 2\nu_1(t)]^{-1}, \quad C^*(t, \tau) = [1 - 2\nu_2(t, \tau)] C(t, \tau) \\
 K(t, \tau) &= E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]
 \end{aligned}$$

Здесь $e_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $s_{ij}(\mathbf{x}, t)$ и $\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t)$, $\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t)$ — девиаторы и шаровые части тензоров деформации и напряжений; $Q_1(t, \tau)$, $Q_2(t, \tau)$, $\omega(t, \tau)$, $C^*(t, \tau)$ и $G(t)$, $E^*(t)$ — ядра ползучести, меры ползучести и упругомгновенные модули деформации при чистом сдвиге и всестороннем сжатии; $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t, \tau)$ — коэффициенты Пуассона для упругомгновенной деформации и деформации ползучести; $C(t, \tau)$ и $E(t)$ — мера ползучести и упру-

момгновенный модуль деформации при растяжении; $\kappa(x)$ — функция неоднородного старения; x — радиус-вектор точки тела; τ_1 — момент приложения нагрузки.

Будем считать, что верхний слой неоднороден и стареет по глубине, т. е. в упругих и реологических характеристиках $x \equiv y$, где y — вертикальная координата. Нижний слой стареет однородно и характеризуется моментом его изготовления τ_0 .

Известно, что большинство вязкоупругих материалов проявляют при всестороннем сжатии почти упругое поведение. В этом случае в (1.1) следует положить $Q_2 \equiv 0$, $E^* \equiv \text{const}$. Тогда на основании [4, 5] и принципа Вольтерры [6] для слоев, удовлетворяющих этим свойствам, получим систему интегральных уравнений для n штампов

$$(1.2) \quad \int_0^h \frac{1 - [\nu_1^*(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y), y)]^2}{E_1^*(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y), y)} dy q_i(x, t) + \\ + 2 \frac{1 - [\nu_2^*(t - \tau_0, \tau - \tau_0)]^2}{\pi E_2^*(t - \tau_0, \tau - \tau_0)} \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} q_j(\xi, t) k\left(\frac{x - \xi}{H}\right) d\xi = \\ = \delta_i(t) + \alpha_i(t) \left(x - \frac{a_i + b_i}{2}\right) - g_i\left(x - \frac{a_i + b_i}{2}\right) \\ (a_i \leq x \leq b_i, i = 1, \dots, n)$$

Дополнительные условия примут вид

$$(1.3) \quad \int_{a_i}^{b_i} q_i(x, t) dx = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} \left(x - \frac{a_i + b_i}{2}\right) q_i(x, t) dx = M_i(t)$$

При этом в (1.2), (1.3) $q_i(x, t) \equiv 0$, когда $\tau_i^0 < t < \tau_i$.

Здесь ν_k^* и E_k^* — интегральные операторы, описывающие материалы верхнего ($k = 1$) и нижнего ($k = 2$) слоев; $q_i(x, t)$ — контактные напряжения под i -м штампом, а $\delta_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $g_i(x - (a_i + b_i)/2)$ — осадка, поворот и форма основания этого штампа; $k((x - \xi)/H)$ — ядро контактной задачи при условии, что однородный слой лежит без трения на жестком основании [5]. Вид ν_k^* и E_k^* ($k = 1, 2$), методы расшифровки и обращения содержащих их выражений известны [7], поэтому отметим только, что все операторы по времени относятся к операторам Вольтерры.

Ряд материалов, в том числе бетон, хорошо описывается уравнениями (1.1) при условии $\nu_1(t) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const}$ [8, 9]. Тогда для основания, состоящего из слоев с коэффициентами Пуассона, не зависящими от времени, где ν_k и $E_k(t)$ — коэффициенты Пуассона и упругомгновенные модули деформации при растяжении верхнего ($k = 1$) и нижнего ($k = 2$) слоев, будем иметь [4, 5, 8]

$$(1.4) \quad (1 - \nu_1^2) \int_0^h \left[\frac{q_i(x, t)}{E_1(t + \kappa(y), y)} - \int_{\tau_i}^t \frac{q_i(x, \tau)}{E_1(\tau + \kappa(y), y)} \times \right. \\ \left. \times K_1(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y), y) d\tau \right] dy + \\ + 2 \frac{1 - \nu_2^2}{\pi} \sum_{j=1}^n \left[\int_{a_j}^{b_j} \frac{q_j(\xi, t)}{E_2(t - \tau_0)} k\left(\frac{x - \xi}{H}\right) d\xi - \right. \\ \left. - \int_{\tau_1}^t \int_{a_j}^{b_j} \frac{q_j(\xi, \tau)}{E_2(\tau - \tau_0)} k\left(\frac{x - \xi}{H}\right) d\xi K_2(t - \tau_0, \tau - \tau_0) d\tau \right] =$$

$$= \delta_i(t) + \alpha_i(t) \left(x - \frac{a_i + b_i}{2} \right) - g_i \left(x - \frac{a_i + b_i}{2} \right)$$

$$q_i(x, t) \equiv 0, \tau_i^0 < t < \tau_i \quad (a_i \leq x \leq b_i, i = 1, \dots, n)$$

Дополнительные условия сохраняют вид (1.3). Можно рассмотреть основания еще двух типов, когда верхний слой проявляет почти упругое поведение, а нижний имеет постоянный коэффициент Пуассона, и наоборот. Системы интегральных уравнений контактных задач для таких оснований можно получить, поменяв местами в (1.2), (1.4) внеинтегральные по координате члены. Следует помнить, что при $Q_2 \equiv 0$, $E^* \equiv \text{const}$ для однородного слоя на его нижней грани всегда предполагается гладкий контакт, ибо только тогда ядро $k((x - \xi) / H)$ от времени не зависит и вид его известен [5]. Если для нижнего однородного слоя $\nu_2 = \text{const}$, то он может быть и сцеплен с недеформируемым основанием. При этом ядро контактной задачи по-прежнему не зависит от времени.

Следует отметить, что к аналогичным системам уравнений приводят задачи о шероховатых вязкоупругих основаниях, об основаниях, содержащих стержневой слой [10, 11], контактные задачи износа упругих и вязкоупругих оснований системой штампов при неодновременном их приложении.

Системы уравнений поставленных и отмеченных задач можно записать в едином виде, содержащем операторы Вольтерры по времени и вполне непрерывные, самосопряженные и положительно-определенные операторы по координате.

Для определенности рассмотрим систему уравнений (1.4) с дополнительными условиями (1.3) и приведем ее к общему виду. Сделаем замену переменных

$$(1.5) \quad x^* = \frac{2x - a_i - b_i}{b_i - a_i}, \quad \xi^* = \frac{2\xi - a_i - b_i}{b_i - a_i} \quad (a_i \leq x, \xi \leq b_i)$$

$$\frac{2H}{b_1 - a_1} = \lambda, \quad \frac{a_j + b_j}{b_1 - a_1} = \eta_j, \quad \frac{b_j - a_j}{b_1 - a_1} = \zeta_j$$

$$k_{ij}(x^*, \xi^*) = \pi^{-1} k \left(\frac{\zeta_i x^* + \eta_i - \zeta_j \xi^* - \eta_j}{\lambda} \right) = \pi^{-1} k \left(\frac{x - \xi}{H} \right)$$

$$q_i^*(x^*, t^*) = \frac{2q_i(x, t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_0)}, \quad g_i^*(x^*) = \frac{2g_i(x - (a_i + b_i)/2)}{b_1 - a_1}$$

$$\delta_i^*(t^*) = \frac{2\delta_i(t)}{b_1 - a_1}, \quad \zeta_i x^* = \frac{2x - a_i - b_i}{b_1 - a_1}$$

$$t^* = t\tau_1^{-1}, \quad \tau^* = \tau\tau_1^{-1}, \quad \tau_i^* = \tau_i\tau_1^{-1}, \quad \tau_0^* = \tau_0\tau_1^{-1}, \quad (\tau_i^0)^* = \tau_i^0\tau_1^{-1}$$

$$c^*(t^*) = \frac{(1 - \nu_1^2) E_2(t - \tau_0) h}{(1 - \nu_2^2) E_1^0(t) (b_1 - a_1)}$$

$$K_1^*(t^*, \tau^*) = \frac{E_1^0(t) E_2(\tau - \tau_0)}{E_1^0(\tau) E_2(t - \tau_0)} K_1^0(t, \tau) \tau_1$$

$$M_i^*(t^*) = \frac{8M_i(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_0)(b_i - a_i)^2}, \quad P_i^*(t^*) = \frac{4P_i(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_0)(b_i - a_i)}$$

$$\frac{1}{E_1^0(t)} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{dy}{E_1(t + \kappa(y), y)}$$

$$K_1^0(t, \tau) = \frac{E_1^0(\tau)}{h} \int_0^h \frac{K_1(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y), y)}{E_1(\tau + \kappa(y), y)} dy$$

$$K_2^*(t^*, \tau^*) = K_2(t - \tau_0, \tau - \tau_0) \tau_1, \quad -1 \leq x^*, \xi^* \leq 1$$

опуская в (1.5) звездочки и полагая

$$L_k^*(\tau_i, t) w(t) = \int_{\tau_i}^t w(\tau) K_k(t, \tau) d\tau$$

$$A_{ij}^* v(x) = \int_{-1}^1 k_{ij}(x, \xi) v(\xi) d\xi \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad k = 1, 2)$$

получим (I^* — тождественный оператор)

$$(1.6) \quad c(t) (I^* - L_1^*(\tau_i, t)) q_i(x, t) + (I^* - L_2^*(1, t)) \sum_{j=1}^n A_{ij}^* q_j(x, t) = \\ = \delta_i(t) + \alpha_i(t) \zeta_i x - g_i(x) \\ q_i(x, t) \equiv 0, \quad \tau_i^0 < t < \tau_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$(1.7) \quad \int_{-1}^1 q_i(x, t) dx = P_i(t), \quad \int_{-1}^1 q_i(x, t) x dx = M_i(t)$$

Соотношения (1.6), (1.7) задают пошаговый процесс получения систем разрешающих уравнений задачи, где в момент взаимодействия с основанием k штампов имеем k уравнений с k неизвестными и при этом учитывается вся история загрузки основания. Получение систем уравнений на каждом шаге для конкретной задачи проводится индивидуально.

Рассмотрим, например, последовательное присоединение единичных штампов, тогда (1.6) для $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$ примет вид

$$(1.8) \quad c(t) (I^* - L_1^*(\tau_k, t)) q_i(x, t) + (I^* - L_2^*(\tau_k, t)) \sum_{j=1}^k A_{ij}^* q_j(x, t) = \\ = \delta_i(t) + \alpha_i(t) \zeta_i x - g_i(x) + c(t) L_1^*(\tau_i, \tau_k) q_i(x, t) + \\ + \sum_{j=1}^{k-1} L_2(\tau_j, \tau_k) A_{ij}^* q_j(x, t) \quad (i = 1, \dots, k)$$

где слагаемые в правой части (1.8), содержащие $q_m(x, t)$, находятся из решения задачи на предыдущем шаге и зависят от x и t . Они определяют искажение поверхности вязкоупругого основания за счет ползучести материала. Фактически решение (1.8) эквивалентно решению задачи о присоединении к деформируемому основанию в момент τ_k одновременно k штампов с формами подошв, определяемых тремя последними членами в правой части (1.8).

Итак, для исследования произвольного процесса присоединения или снятия штампов необходимо на каждом шаге решать систему уравнений следующего вида:

$$(1.9) \quad c(t) (I^* - L_1^*) q^i(x, t) + (I^* - L_2^*) \sum_{j=1}^n A_{ij}^* q^j(x, t) = \\ = \delta^i(t) + \alpha^i(t) x - g^i(x, t), \quad L_m^* = L_m^*(\tau_k, t) \\ (i = 1, \dots, n; \quad m = 1, 2)$$

Дополнительными условиями для (1.9) служат условия (1.7) с поднятым индексом i .

В дальнейшем остановимся на решении системы уравнений (1.9). Будем обозначать операторы, тензоры и векторы полужирным шрифтом соответственно большими буквами со звездочкой, большими и малыми буквами. Также будем пользоваться символикой тензорного анализа из [12].

2. Рассмотрим вектор-функции $a(x) = a^i(x) i^i$ и тензор-функции двух переменных $K(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi) i^i i^j$, где i^k — ортонормирован-

ный алгебраический векторный базис N -мерного евклидова пространства V . Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам ведется суммирование, а сами верхние индексы принимают натуральные значения от 1 до N .

Введем полное гильбертово пространство $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функций со следующими глобальным скалярным произведением и нормой [13, 14]:

$$\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x) \in L_2([-1, 1], V) : (\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x)) = \int_{-1}^1 \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx$$

$$\|\mathbf{a}(x)\| = (\mathbf{a}(x), \mathbf{a}(x))^{1/2} < \infty, \quad \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) = a^k(x) b^k(x)$$

Аналогично введем полное гильбертово пространство тензор-функций двух переменных

$$\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{M}(x, \xi) \in L_2([-1, 1], V) : [\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{M}(x, \xi)] =$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \cdot \mathbf{M}(x, \xi) d\xi dx, \quad |\mathbf{K}(x, \xi)| = [\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{K}(x, \xi)]^{1/2}$$

$$\mathbf{K}(x, \xi) \cdot \cdot \mathbf{K}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi) k^{ij}(x, \xi)$$

Напомним, что [13]

$$\int_a^b \mathbf{a}(x) dx = \int_a^b a^k(x) dx \mathbf{i}^k, \quad \frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathbf{a}(x) = \frac{\partial^n a^k(x)}{\partial x^n} \mathbf{i}^k, \quad \mathbf{a}(x) f(x) =$$

$$= [a^k(x) f(x)] \mathbf{i}^k$$

и вектор-функция непрерывна по x тогда и только тогда, когда непрерывны по x все ее компоненты.

Глобальным скалярным произведением (справа) тензор-функции на вектор-функцию назовем выражение

$$(2.1) \quad (\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{a}(\xi)) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{a}(\xi) d\xi$$

Лемма 1°. Вектор-функция $\mathbf{a}(x) \in L_2([-1, 1], V)$ тогда и только тогда, когда ее компоненты $a^k(x) \in L_2[-1, 1]$, где $L_2[-1, 1]$ — пространство интегрируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$ функций [13].

2°. Тензор-функция $\mathbf{K}(x, \xi) \in L_2([-1, 1], V)$ тогда и только тогда, когда ее компоненты $k^{ij}(x, \xi) \in L_2[-1, 1]$, где $L_2[-1, 1]$ — пространство интегрируемых со своей второй степенью в квадрате $[-1, \leq x \leq \leq 1, -1 \leq \xi \leq 1]$ функций.

На основании леммы можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Оператор \mathbf{A}^* , образуемый глобальным скалярным произведением (2.1), т. е.

$$\mathbf{A}^* \mathbf{a}(x) = (\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{a}(\xi)), \quad \mathbf{K}(x, \xi) \in L_2([-1, 1], V)$$

вполне непрерывен из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$; если $\mathbf{K}(x, \xi) = = \mathbf{K}^T(\xi, x)$, то оператор \mathbf{A}^* самосопряженный.

Остановимся на вопросе разложения функций из $L_2([-1, 1], V)$ и $L_2([-1, 1], V)$ в ряды по функциональным векторным базисам. Пусть $\{P_k^*(x)\}$ — базис $L_2[-1, 1]$, тогда (см. лемму)

$$(2.2) \quad \mathbf{a}(x) = a^i(x) \mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i P_k^*(x) \mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i \mathbf{p}_k^i(x)$$

$$\mathbf{p}_k^i(x) = P_k^*(x) \mathbf{i}^i, \quad (\mathbf{p}_k^i(x), \mathbf{p}_n^j(x)) = \begin{cases} 1; & k = n, i = j \\ 0; & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где $\mathbf{p}_k^i(x)$ ($k = 0, \dots, \infty$) — базис $L_2([-1, 1], V)$.

Аналогично

$$(2.3) \quad \mathbf{K}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi) i^i i^j = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^{ij} P_m^*(x) P_n^*(\xi) i^i i^j = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^{ij} p_m^i(x) p_n^j(\xi)$$

причем, если $\mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{K}^T(\xi, x)$, то $r_{mn}^{ij} = r_{nm}^{ji}$.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$(2.4) \quad c(t)(\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^*) \mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) \mathbf{A}^* \mathbf{q}(x, t) = \\ = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x, t)$$

с дополнительными условиями

$$(2.5) \quad \int_{-1}^1 \mathbf{q}(x, t) dx = \mathbf{p}(t), \quad \int_{-1}^1 \mathbf{q}(x, t) x dx = \mathbf{m}(t)$$

где $c(t) > 0$ — непрерывная по t функция, $\mathbf{q}(x, t)$, $g(x, t)$ — непрерывные по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функции, $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{m}(t)$, $\delta(t)$ и $\alpha(t)$ — непрерывные по t вектор-функции со значениями из V , \mathbf{A}^* — самосопряженный, вполне непрерывный и положительно-определенный оператор из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$, ядра операторов Вольтерры \mathbf{L}_1^* и \mathbf{L}_2^* непрерывны в целом или имеют слабую особенность, причем $K_k(t, \tau) = A_k(t, \tau)(t - \tau)^{-m_k}$, где $A_k(t, \tau)$ — непрерывные функции, $0 \leq m_k < 1$ ($k = 1, 2$) [15].

Пусть в (2.4), (2.5) неизвестны только $\mathbf{q}(x, t)$, $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{m}(t)$. Далее считаем, что нижние индексы (если это не оговорено особо) изменяются от 0 до ∞ , а знак Σ означает суммирование по одному из повторяющихся нижних индексов, когда он пробегает все свои значения. Воспользовавшись классическим методом теории операторов в гильбертовых пространствах [16, 17], представим решение в виде (см. также [18])

$$(2.6) \quad \mathbf{q}(x, t) = \Sigma \omega_i(t) \varphi_i(x), \quad g(x, t) = \Sigma g_i^\circ(t) \varphi_i(x) \\ \delta(t) = \delta^k(t) i^k = \delta^k(t) \Sigma \delta_i^k \varphi_i(x) \\ \alpha(t)x = \alpha^k(t) x i^k = \alpha^k(t) \Sigma X_i^k \varphi_i(x)$$

где $\varphi_i(x)$ — собственные вектор-функции оператора \mathbf{A}^* , соответствующие его собственным числам $\alpha_i^\circ > 0$, т. е.

$$(2.7) \quad \mathbf{A}^* \varphi_i(x) = \alpha_i^\circ \varphi_i(x)$$

Известно, что $\{\varphi_i(x)\}$ составляет базис в $L_2([-1, 1], V)$. Подставляя (2.6) с учетом (2.7) в (2.4), получим

$$(2.8) \quad \omega_i(t) = (\mathbf{I}^* + \mathbf{N}_i^*) \Omega_i(t) \\ \Omega_i(t) = [\delta^k(t) \delta_i^k + \alpha^k(t) X_i^k - g_i^\circ(t)] / [\alpha_i^\circ + c(t)] \\ \mathbf{N}_k^* f(t) = \int_{\tau_r}^t f(\tau) R_k^\circ(t, \tau) d\tau, \quad t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$$

где $R_k^\circ(t, \tau)$ — резольвента ядра

$$K_k^\circ(t, \tau, \alpha_k^\circ) = [c(t) K_1(t, \tau) + \alpha_k^\circ K_2(t, \tau)] / [c(t) + \alpha_k^\circ]$$

а остальные величины определяются из (2.5) и (2.6).

Построим теперь собственные вектор-функции и собственные числа оператора \mathbf{A}^* . Возьмем $\varphi_p(x)$ в форме (см. (2.2))

$$(2.9) \quad \varphi_p(x) = \Sigma a_{k(p)}^l p_k^l(x)$$

а $\mathbf{K}(x, \xi)$ в форме (2.3) и подставим в (2.7), тогда придем к алгебраической

системе уравнений с симметричной матрицей (см. (2.3))

$$(2.10) \quad \sum r_{mn}^{ij} a_{n(p)}^j = \alpha_p^\circ a_{m(p)}^i$$

для нахождения α_p° и коэффициентов разложения собственных вектор-функций по функциональному векторному базису. Ограничиваясь k членами базиса, будем получать k -е приближение метода Бубнова — Галеркина [19].

Взяв за базис $L_2[-1, 1]$ систему полиномов Лежандра $P_m^*(x)$, в по-компонентной записи получим

$$\begin{aligned} q^k(x, t) &= \sum \omega_i(t) \varphi_i^k(x) = \sum \omega_i(t) \sum a_{j(i)}^k P_j^*(x) \\ p^k(t) &= \sum \omega_i(t) \delta_i^k = 2^{1/2} \sum \omega_i(t) a_{0(i)}^k \\ m^k(t) &= \sum \omega_i(t) X_i^k = (2/3)^{1/2} \sum \omega_i(t) a_{1(i)}^k \end{aligned}$$

где $q^k(x, t)$ — непрерывные по t в $L_2[-1, 1]$ функции, $p^k(t)$, $m^k(t)$ непрерывны по t .

3. Пусть теперь в (2.4), (2.5) неизвестны $q(x, t)$, $\delta(t)$ и $\alpha(t)$. Представим $L_2([-1, 1], V)$ в виде суммы ортогональных подпространств, т. е.

$$L_2([-1, 1], V) = H(1, V) \oplus H(x, V) \oplus L_2^\circ([-1, 1], V)$$

где $H(1, V)$ — пространство алгебраических векторов, $H(x, V)$ — пространство вектор-функций, образуемых умножением алгебраических векторов на x ($x \in [-1, 1]$), $L_2^\circ([-1, 1], V)$ — полное гильбертово пространство вектор-функций из $L_2([-1, 1], V)$, ортогональных вектор-функциям из $H(1, V)$ и $H(x, V)$ [14].

Заметим, что функциональными векторными базисами $H(1, V)$ и $H(x, V)$ являются $p_0^k(x) = 2^{-1/2} i^k$ и $p_1^k(x) = (3/2)^{1/2} x i^k$ соответственно, за базис $L_2^\circ([-1, 1], V)$ можно взять, например, $\{p_m^k(x)\}$ (в п. 3 нижние индексы изменяются, если не оговорено противное, от 2 до ∞), где $P_k^*(x)$ в (2.2) — ортонормированные полиномы Лежандра.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. 1°. Ядро оператора A^* представимо в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} K(x, \xi) &= K_1(x, \xi) + k_1^i(x) p_1^i(\xi) + p_1^i(x) k_1^i(\xi) + \\ &+ p_0^i(x) k_0^i(\xi) + k_0^i(x) p_0^i(\xi) + D^{ij} p_0^i(x) p_0^j(\xi) + \\ &+ F^{ij} (p_0^i(x) p_1^j(\xi) + p_1^j(x) p_0^i(\xi)) + E^{ij} p_1^i(x) p_1^j(\xi) \end{aligned}$$

где $k_m^i(x) \in L_2^\circ([-1, 1], V)$ ($m = 0, 1$); D^{ij} , F^{ij} и E^{ij} — постоянные; $(K_1(x, \xi), p_m^i(\xi)) = 0$ ($m = 0, 1$).

2°. Оператор

$$B^*: B^*f(x) = (K_1(x, \xi), f(\xi))$$

вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2^\circ([-1, 1], V)$ в $L_2^\circ([-1, 1], V)$; собственные вектор-функции $\psi_k(x)$ оператора B^* , соответствующие его собственным числам β_k° , т. е.

$$B^*\psi_k(x) = \beta_k^\circ \psi_k(x)$$

составляют базис в $L_2^\circ([-1, 1], V)$.

3°. Если $q(x, t)$, $g(x, t)$ — непрерывные по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функции, то они представимы в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} q(x, t) &= z_0^i(t) p_0^i(x) + z_1^i(t) p_1^i(x) + \sum z_k(t) \psi_k(x) \\ g(x, t) &= g_0^i(t) p_0^i(x) + g_1^i(t) p_1^i(x) + \sum g_k(t) \psi_k(x) \end{aligned}$$

где $z_m^i(t)$, $g_m^i(t)$ ($m = 0, 1$), $z_k(t)$, $g_k(t)$ — непрерывные функции t .

По поводу первой части теоремы сошлемся только на (2.3) и заметим, что

$$(3.3) \quad \mathbf{K}_1(x, \xi) = \sum \sum r_{mn}^{ij} \mathbf{p}_m^i(x) \mathbf{p}_n^j(\xi), \quad \mathbf{k}_l^i(x) = \sum r_{ln}^{ij} \mathbf{p}_n^j(x) \\ r_{00}^{ij} = D^{ij}, \quad r_{11}^{ij} = E^{ij}, \quad r_{01}^{ij} = F^{ij} \quad (l = 0, 1)$$

Утверждения второй и третьей частей базируются на (3.3), соотношении

$$(\mathbf{A}^* \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)) = (\mathbf{B}^* \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)), \quad \forall \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) \in L_2^\circ([-1, 1], V)$$

известных фактах спектральной теории операторов [16, 17, 18].

Отметим, что (3.3) и замечание, предшествующее теореме 2, позволяют строить $\Psi_k(x)$ и β_k° аналогично п. 2, т. е.

$$\Psi_k(x) = \sum b_{p(k)}^l \mathbf{p}_p^l(x), \quad \sum r_{mn}^{ij} b_{n(k)}^j = \beta_k^\circ b_{m(k)}^i$$

С учетом теоремы 2 и представлений

$$(3.4) \quad \mathbf{k}_l^i(x) = \sum k_{k(l)}^i \Psi_k(x) \quad (l = 0, 1) \\ \delta(t) = 2^{1/2} \delta^i(t) \mathbf{p}_0^i(x), \quad \alpha(t)x = (3/2)^{-1/2} \alpha^i(t) \mathbf{p}_1^i(x)$$

для искомым вектор-функций получим (см. (3.1)–(3.4))

$$z_k(t) = -(\mathbf{I}^* + \mathbf{D}_k^*) \{ [g_k(t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) (z_1^i(t) k_{k(1)}^i + \\ + z_0^i(t) k_{k(0)}^i)] / [c(t) + \beta_k^\circ] \}$$

$$\mathbf{D}_k^* f(t) = \int_{\tau_r}^t f(\tau) R_k^1(t, \tau) d\tau, \quad t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$$

$$\delta^i(t) = 2^{-1/2} [c(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^*) z_0^i(t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) (\sum z_k(t) k_{k(0)}^i + \\ + D^{ij} z_0^j(t) + F^{ij} z_1^j(t)) + g_0^i(t)]$$

$$\alpha^i(t) = (3/2)^{1/2} [c(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^*) z_1^i(t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) (\sum z_k(t) k_{k(1)}^i + \\ + E^{ij} z_1^j(t) + F^{ji} z_0^j(t)) + g_1^i(t)]$$

$$z_0^i(t) = 2^{-1/2} p^i(t), \quad z_1^i(t) = (3/2)^{1/2} m^i(t)$$

где $R_k^1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t, \tau, \beta_k^\circ)$, $z_k(t)$, $\delta^i(t)$, $\alpha^i(t)$ — непрерывные по t функции в силу непрерывности $p^i(t)$, $m^i(t)$, $c(t)$ и условий, наложенных на ядра операторов Вольтерры.

Итак, найдены непрерывные по t вектор-функции $\delta(t)$, $\alpha(t)$ и непрерывная по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функция $\mathbf{q}(x, t)$, причем ее компоненты непрерывны по t в $L_2[-1, 1]$.

4. Предположим, что в (2.4), (2.5) неизвестны $\delta(t)$, $m(t)$ и $\mathbf{q}(x, t)$. Пусть

$$L_2^1([-1, 1], V) = H(x, V) \oplus L_2^\circ([-1, 1], V)$$

Базисом $L_2^1([-1, 1], V)$ может служить $\{\mathbf{p}_m^k(x)\}$ (здесь и далее в п. 4 нижние индексы принимают значения от 1 до ∞).

Теорема 3. 1°. Ядро оператора \mathbf{A}^* представимо в виде

$$\mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{K}_2(x, \xi) + \mathbf{p}_0^i(x) \mathbf{k}^i(\xi) + \mathbf{k}^i(x) \mathbf{p}_0^i(\xi) + D^{ij} \mathbf{p}_0^i(x) \mathbf{p}_0^j(\xi)$$

где $\mathbf{k}^i(x) \in L_2^1([-1, 1], V)$; D^{ij} — постоянные; $(\mathbf{K}_2(x, \xi), \mathbf{p}_0^i(\xi)) = 0$;

$$\mathbf{K}_2(x, \xi) = \sum \sum r_{mn}^{ij} \mathbf{p}_m^i(x) \mathbf{p}_n^j(\xi), \quad \mathbf{k}^i(x) = \sum r_{0n}^{ij} \mathbf{p}_n^j(x), \quad D^{ij} = r_{00}^{ij}$$

2°. Оператор

$$\mathbf{C}^*: \mathbf{C}^* \mathbf{f}(x) = (\mathbf{K}_2(x, \xi), \mathbf{f}(\xi))$$

вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2^1([-1, 1], V)$ в $L_2^1([-1, 1], V)$; собственные вектор-функции $\chi_k(x)$

оператора C^* , соответствующие его собственным числам γ_k° , т. е.

$$C^* \chi_k(x) = \gamma_k^\circ \chi_k(x)$$

составляют базис в $L_2^1([-1, 1], V)$.

3°. Если $q(x, t)$ и $(\alpha(t)x - g(x, t))$ непрерывные по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функции, то они представимы в виде

$$q(x, t) = w_0^i(t) p_0^i(x) + \sum w_k(t) \chi_k(x)$$

$$\alpha(t)x - g(x, t) = d_0^i(t) p_0^i(x) + \sum d_k(t) \chi_k(x)$$

где $w_0^i(t)$, $w_k(t)$, $d_0^i(t)$, $d_k(t)$ непрерывны по t .

При доказательстве теоремы следует пользоваться соображениями, аналогичными п. 3, а для построения собственных вектор-функций и собственных чисел будем иметь

$$\chi_k(x) = \sum c_{p(k)}^l p_p^l(x), \quad \sum r_{mn}^{ij} c_n^j = \gamma_k^\circ c_m^i$$

В силу того что

$$k^i(x) = \sum k_k^i \chi_k(x), \quad \delta(t) = 2^{1/2} \delta^i(t) p_0^i(x), \quad xi^i = \sum X_k^i \chi_k(x)$$

с учетом теоремы 3 из (2.4), (2.5) получим

$$w_k(t) = (I^* + V_k^*) \{ [d_k(t) - (I^* - L_2^*) k_k^i w_0^i(t)] / [c(t) + \gamma_k^\circ] \}$$

$$V_k^* f(t) = \int_{\tau_r}^t f(\tau) R_k^2(t, \tau) d\tau, \quad t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$$

$$\delta^i(t) = 2^{-1/2} [c(t) (I^* - L_1^*) w_0^i(t) + (I^* - L_2^*) (\sum w_k(t) k_k^i + D^{ij} w_0^j(t)) - d_0^i(t)]$$

$$w_0^i(t) = 2^{-1/2} p^i(t), \quad m^i(t) = \sum X_k^i w_k(t) = (2/3)^{1/2} \sum w_k(t) c_{1(k)}^i$$

где $R_k^2(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t, \tau, \gamma_k^\circ)$.

5. Рассмотрим еще один случай, когда в (2.4), (2.5) неизвестны $\alpha(t)$, $p(t)$ и $q(x, t)$. Положим

$$L_2^2([-1, 1], V) = H(1, V) \oplus L_2^\circ([-1, 1], V)$$

где за базис $L_2^2([-1, 1], V)$ можно взять $\{p_m^k(x)\}$ (в п. 5 нижние индексы принимают все значения от 0 до ∞ , кроме единицы).

Теорема 4. 1°. Ядро оператора A^* представимо в виде

$$K(x, \xi) = K_3(x, \xi) + p_1^i(x) k_*^i(\xi) + k_*^i(x) p_1^i(\xi) + E^{ij} p_1^i(x) p_1^j(\xi)$$

где $k_*^i(x) \in L_2^2([-1, 1], V)$; E^{ij} — постоянные; $(K_3(x, \xi), p_1^i(\xi)) = 0$;

$$K_3(x, \xi) = \sum \sum r_{mn}^{ij} p_m^i(x) p_n^j(\xi), \quad k_*^i(x) = \sum r_{1m}^{ij} p_m^j(x), \quad E^{ij} = r_{11}^{ij}$$

2°. Оператор

$$F^*: F^*f(x) = (K_3(x, \xi), f(\xi))$$

вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2^2([-1, 1], V)$ в $L_2^2([-1, 1], V)$; собственные вектор-функции $\theta_k(x)$ оператора F^* , соответствующие его собственным числам σ_k° , т. е.

$$F^* \theta_k(x) = \sigma_k^\circ \theta_k(x)$$

составляют базис в $L_2^2([-1, 1], V)$.

3°. Если $q(x, t)$ и $(\delta(t) - g(x, t))$ — непрерывные по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функции, то они представимы в виде

$$q(x, t) = v_1^i(t) p_1^i(x) + \sum v_k(t) \theta_k(x)$$

$$\delta(t) - g(x, t) = h_1^i(t) p_1^i(x) + \sum h_k(t) \theta_k(x)$$

где $v_1^i(t)$, $h_1^i(t)$, $v_k(t)$, $h_k(t)$ непрерывны по t .

Соотношения для нахождения собственных чисел и вектор-функций имеют вид

$$\theta_k(x) = \sum y_{p(k)}^l p_p^l(x), \quad \sum r_{mn}^{ij} y_n^j = \sigma_k^o y_m^i$$

Замечая, что

$$k_*^i(x) = \sum k_{*k}^i \theta_k(x), \quad \alpha(t)x = (2/3)^{1/2} \alpha^i(t) p_1^i(x), \quad i^i = \sum I_k^i \theta_k(x)$$

в силу теоремы 4 из (2.4), (2.5) будем иметь

$$\begin{aligned} v_k(t) &= (I^* + W_k^*) \{ [h_k(t) - (I^* - L_2^*) v_1^i(t) k_{*k}^i] / [c(t) + \sigma_k^o] \} \\ \alpha^i(t) &= (3/2)^{1/2} [c(t) (I^* - L_1^*) v_1^i(t) + (I^* - L_2^*) (\sum k_{*k}^i v_k(t) + \\ &+ E^{ij} v_1^j(t)) - h_1^i(t)], \quad v_1^i(t) = (3/2)^{1/2} m^i(t) \\ p^i(t) &= \sum I_k^i v_k(t) = 2^{1/2} \sum v_k(t) y_{0(k)}^i \\ W_k^* f(t) &= \int_{\tau_r}^t f(\tau) R_k^3(t, \tau) d\tau, \quad t \in [\tau_r, \tau_{r+1}] \end{aligned}$$

где $R_k^3(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k^o(t, \tau, \sigma_k^o)$.

Теорема 5. В выбранных классах функций (вектор-функций) решение уравнения (2.4) при условиях (2.5) существует, единственно и может быть найдено с наперед заданной точностью изложенными методами.

Отметим, что ряды, представляющие решения, сходятся в среднем; если

$$(5.1) \quad \int_{-1}^1 K(x, \xi) \cdot K(x, \xi) d\xi < Z = \text{const}, \quad x \in [-1, 1]$$

то они сходятся регулярно; если, кроме того, вектор-функция $g(x, t)$ непрерывна по x и тензор-функция $K(x, \xi)$ непрерывна в целом, т. е.

$$(5.2) \quad \int_{-1}^1 |K(x_1, \xi) - K(x_2, \xi)| d\xi < \varepsilon, \quad |x_1 - x_2| < \delta$$

$$|M(x, \xi)| = (M(x, \xi) \cdot M(x, \xi))^{1/2}$$

то решения являются непрерывными по x функциями (вектор-функциями) (см. [15]).

Заметим также, что спектр оператора A^* не совпадает со спектрами операторов B^* , C^* , F^* . Это дает возможность исследовать задачу (2.4), (2.5) в постановках пп. 3—5 на спектре A^* .

6. Вернемся к системе уравнений (1.9) с дополнительными условиями типа (1.7). Видно, что они представляют покомпонентную запись (2.4), (2.5). Можно показать, что оператор A^* , возникающий при решении контактных задач, вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$, а его ядро удовлетворяет условиям (5.1), (5.2). Таким образом, решения основных систем двумерных интегральных уравнений построены.

В задачах о системах присоединяемых штампов возможны следующие варианты постановок.

1°. Известны осадки и углы поворотов; найти контактные напряжения, силы и моменты (см. п. 2).

2°. Известны силы и моменты; найти контактные напряжения, осадки и углы (см. п. 3).

3°. Известны силы и углы поворотов; найти контактные напряжения, осадки и моменты (см. п. 4).

4°. Известны осадки и моменты; найти контактные напряжения, силы и углы поворотов (см. п. 5).

Естественно, что в моменты τ_k присоединения (снятия) штампов искомые величины могут иметь конечные скачки значений, так как меняется система разрешающих уравнений. Скачки искомых величин могут появляться и в случае фиксированной на данном интервале времени системы штампов, если на этом интервале претерпевают скачки задаваемые функции.

Особо следует отметить необходимость проверки в каждый момент времени физического содержания решения, т. е. наличия под штампами сжимающих напряжений. Момент времени, в который происходит смена знака напряжений хотя бы в одной точке, является моментом начала отслаивания штампа от основания, и для дальнейшего исследования процесса предложенные методы неприменимы. Наличие в некоторый момент сжимающих напряжений под всеми штампами не говорит о том, что в предыдущие моменты не могли происходить перемены знаков напряжений, поэтому важно исследовать весь интервал времени, в котором развивается процесс.

Считая, что отслаиваний не происходит, сформулируем принцип соответствия для одного частного случая. Пусть рассматриваемые вязкоупругие основания стареют однородно и их слои изготовлены из одного материала в один и тот же момент времени, т. е. в (2.4)

$$c(t) = c^{\circ}, \quad L_1^* = L_2^* = L^*, \quad (I^* - L^*)^{-1} = (I^* + N^*), \quad g(x, t) = 0$$

тогда для системы одновременно приложенных штампов с плоскими основаниями справедливы следующие утверждения.¹

1) В постановке 1° $\delta(t) = \delta^{\circ}(t)$, $\alpha(t) = \alpha^{\circ}(t)$, $q(x, t) = (I^* + N^*) q^{\circ}(x, t)$, $p(t) = (I^* + N^*) p^{\circ}(t)$, $m(t) = (I^* + N^*) m^{\circ}(t)$.

2) В постановке 2° $q(x, t) = q^{\circ}(x, t)$, $p(t) = p^{\circ}(t)$, $m(t) = m^{\circ}(t)$, $\delta(t) = (I^* - L^*) \delta^{\circ}(t)$, $\alpha(t) = (I^* - L^*) \alpha^{\circ}(t)$.

3) В постановке 3° при заданных нулевых углах поворота $\alpha(t) = \alpha^{\circ}(t) = 0$, $q(x, t) = q^{\circ}(x, t)$, $p(t) = p^{\circ}(t)$, $m(t) = m^{\circ}(t)$, $\delta(t) = (I^* - L^*) \delta^{\circ}(t)$.

Здесь знаком $^{\circ}$ отмечены решения задач без учета ползучести (упругих задач).

Утверждения 1) и 2) являются обобщением известных для изолированных штампов, а 3) дает новый результат: для того чтобы штампы некоторой системы, одновременно приложенной к вязкоупругому однородному стареющему основанию, не испытывали перекося, к ним следует приложить усилия и моменты, полученные из решения аналогичной упругой задачи, при этом напряжения совпадут с упругими, а осадка будет изменяться по закону из 3). Постановка 4° физически содержательного принципа соответствия не дает.

Приведем еще несколько полезных формул. В поставленных контактных задачах (см. (1.5), (2.3), [5])

$$(6.1) \quad k^{ij}(x, \xi) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos \left[\frac{u}{\lambda} (\zeta_i x + \eta_i - \zeta_j \xi - \eta_j) \right] du$$

учитывая, что $\{P_k^*(x)\}$ в (2.3) — полиномы Лежандра и

$$f_{mn}^{ij}(u) = \sqrt{\frac{(2m+1)(2n+1)}{\zeta_i \zeta_j}} \lambda \frac{L(u)}{u^2} J_{1/2+m} \left(\frac{\zeta_i u}{\lambda} \right) J_{1/2+n} \left(\frac{\zeta_j u}{\lambda} \right)$$

пользуясь [20], получим

$$R_{mn}^{ij} = \int_0^{\infty} f_{mn}^{ij}(u) \cos(\eta_i - \eta_j) \frac{u}{\lambda} du, \quad \rho_{mn}^{ij} = \int_0^{\infty} f_{mn}^{ij}(u) \sin(\eta_i - \eta_j) \frac{u}{\lambda} du$$

$$r_{mn}^{ij} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m+n-l}{2}} R_{mn}^{ij} & (l=0, m \text{ и } n - \text{четные}; l=2, \\ & m \text{ и } n - \text{нечетные}) \\ (-1)^{\frac{m+n-k}{2}} \rho_{mn}^{ij} & (k=1, m - \text{четное и } n - \text{нечетное}; \\ & k=-1 \text{ в противном случае}) \end{cases}$$

Отметим, что родственная задача о присоединении к упругой полуплоскости вязкоупругих накладок изучалась в [21], где решение строилось методом ортогональных многочленов с исследованием бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерры.

Пример. Возьмем бетонное основание с постоянными упругими характеристиками. Меру ползучести представим в виде [8]

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

и зададимся следующими значениями [8, 22]:

$$C_0 E = 0,5522, \quad A_0 E = 4, \quad \nu = 0,1 \\ \tau_0 = 0, \quad \beta = 0,031 \text{ сут}^{-1}, \quad \gamma = 0,06 \text{ сут}^{-1}$$

Характеристикой неоднородного старения верхнего слоя является параметр неоднородного старения μ [10, 23, 24]. Будем считать, что нижний слой жестко заземлен, тогда [5] (см. (6.1))

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

Далее в соответствии с (1.5) возьмем

$$c(t) = 0,2, \quad \lambda = 24, \quad \zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = 2, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 5 \\ M_1(t) = M_2(t) = 0, \quad P_1(t) = 1, \quad P_2(t) = 2, \quad g_1(x) = g_2(x) = 0$$

т. е. длина линии контакта первого штампа ($b_1 - a_1$) вдвое меньше длины линии контакта второго ($b_2 - a_2$). Расстояние между ними равно ($b_1 - a_1$). Сила, действующая на второй штамп, вчетверо больше таковой для первого штампа, приложены они центрально (моменты равны нулю). Толщины слоев характеризуются $c(t)$ и λ . Первый штамп прикладывается в момент 1, второй — в момент τ_2 . Действительный момент приложения первого штампа τ_1 измеряется в сутках и является масштабным коэффициентом времени (см. (1.5)).

Исследуем поведение основных безразмерных характеристик (см. (1.5)) при однородном ($\mu = 1, \tau_1 = 20$ сут и $\tau_1 = 100$ сут), естественном неоднородном (возраст верхнего слоя уменьшается по высоте; $\mu = 10, \tau_1 = 100$ сут) и искусственном неоднородном (возраст верхнего слоя растет по высоте; $\mu = 0,1, \tau_1 = 20$ сут) процессах старения в зависимости от момента приложения второго штампа τ_2 . Кривые на графиках для трех случаев старения будем обозначать сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями соответственно. Для идентификации напряженного состояния под разными штампами построим графики в координатах, где $x_0 = x^* \zeta_i + \eta_i$, т. е. первого штампа ($i = 1$) — $1 \leq x_0 \leq 1$, для второго штампа ($i = 2$) $3 \leq x_0 \leq 7$ (нулевой индекс при x далее опустим). Значения контактных давлений, увеличенные в десять раз, отложим по осям q . Зависимости осадок от времени построим в реальном масштабе в осях δ и t , а углов поворота, увеличенных в сто раз, в осях α_1 и α_2 и t . Кривые осадок и углов поворота для первого и второго штампов обозначим темными и светлыми точками соответственно.

На фиг. 1 показаны распределения контактных давлений под штампами для случаев естественного и однородного старения в момент $t = 1,5$. Для кривых 1 и 2 момент приложения второго штампа $\tau_2 = 1$ и $\tau_2 = 1,5$ соответственно. Напомним, что первый штамп прикладывается всегда в момент 1. В случае однородного старения распределе-

ния напряжений под первым штампом для различных моментов приложения второго штампа мало различаются и представлены одной кривой.

При одновременном приложении штампов в случае однородного старения напряжения от времени не зависят (см. принцип соответствия) и представлены сплошными кривыми 1. Те же кривые описывают напряжения в момент $t = 1$ при одновременном приложении штампов в случае естественного неоднородного старения, а в момент $t = 1,5$ распределения напряжений описываются штриховыми кривыми 1. Таким образом, видна тенденция к существенному сглаживанию напряженного состояния по времени за счет естественного неоднородного старения.

Неодновременное приложение штампов при однородном старении проявляет тенденцию к увеличению по времени неравномерности распределений напряжений под штампами, хотя мгновенные распределения в момент приложения второго штампа более равномерны, чем при одновременном воздействии. Для первого штампа указанные эффекты малы.

При неодновременном воздействии штампов в случае естественного неоднородного старения происходит наложение тенденций к сглаживанию по времени напряженного состояния за счет типа старения и к увеличению его неравномерности за счет разновременности приложения. Так, при воздействии вторым штампом в момент $\tau_2 = 1,25$ распределения напряжений сглаживаются под обоими штампами, для $\tau_2 = 1,5$ под первым штампом они сглаживаются, а под вторым наоборот. Момент приложения второго штампа существенно влияет на мгновенные распределения и их изменения по времени для обоих штампов (ср. штриховые кривые 1 и 2).

Для исследованных случаев кривые распределения контактных напряжений имеют вид парабол с максимумами на удаленных друг от друга краях штампов. Минимумы напряжений смещены от центров штампов к тем же краям. Асимметрия кривых распределений выражена неярко, что является следствием отсутствия моментов (центрального приложения сил).

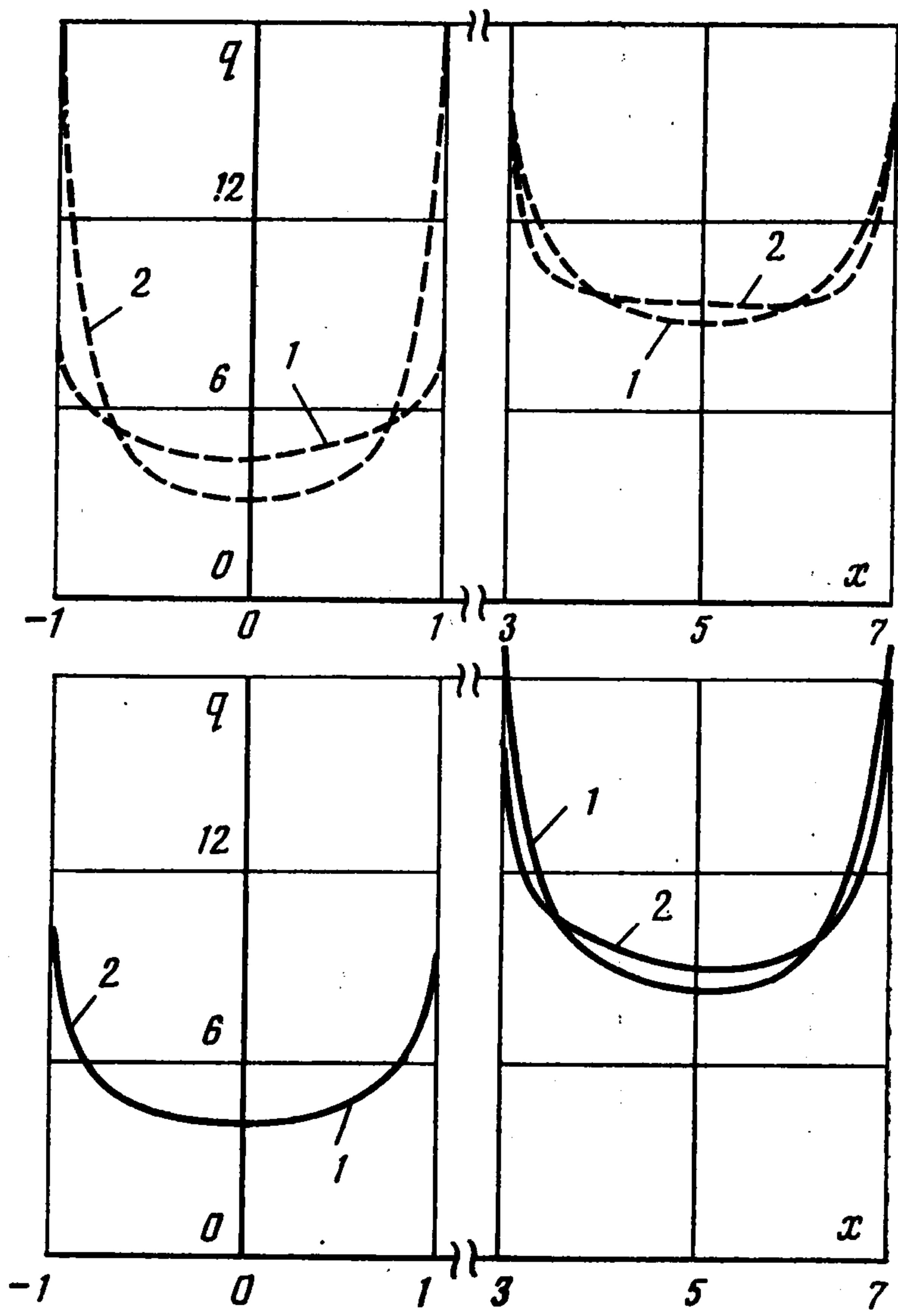
На фиг. 2 показаны зависимости изменения осадок от времени для случаев однородного и естественного неоднородного старения. Нижние кривые показывают изменения осадок первого штампа по времени в отсутствие второго. Точками отмечены разные моменты приложения второго штампа, причем осадка под первым штампом претерпевает скачок по вертикали вверх между темными точками, а светлой точкой на той же вертикали обозначена начальная осадка второго штампа.

На фиг. 3 показаны изменения углов поворота штампов по времени в зависимости от факторов, учитываемых при изучении осадок. Угол поворота первого штампа α_1 в момент приложения второго претерпевает скачок от нуля до значения, обозначенного темной точкой, а начальное значение угла поворота второго штампа α_2 отмечено светлой точкой. Тип старения мало влияет на характер изменения угла под первым штампом и существенно под вторым.

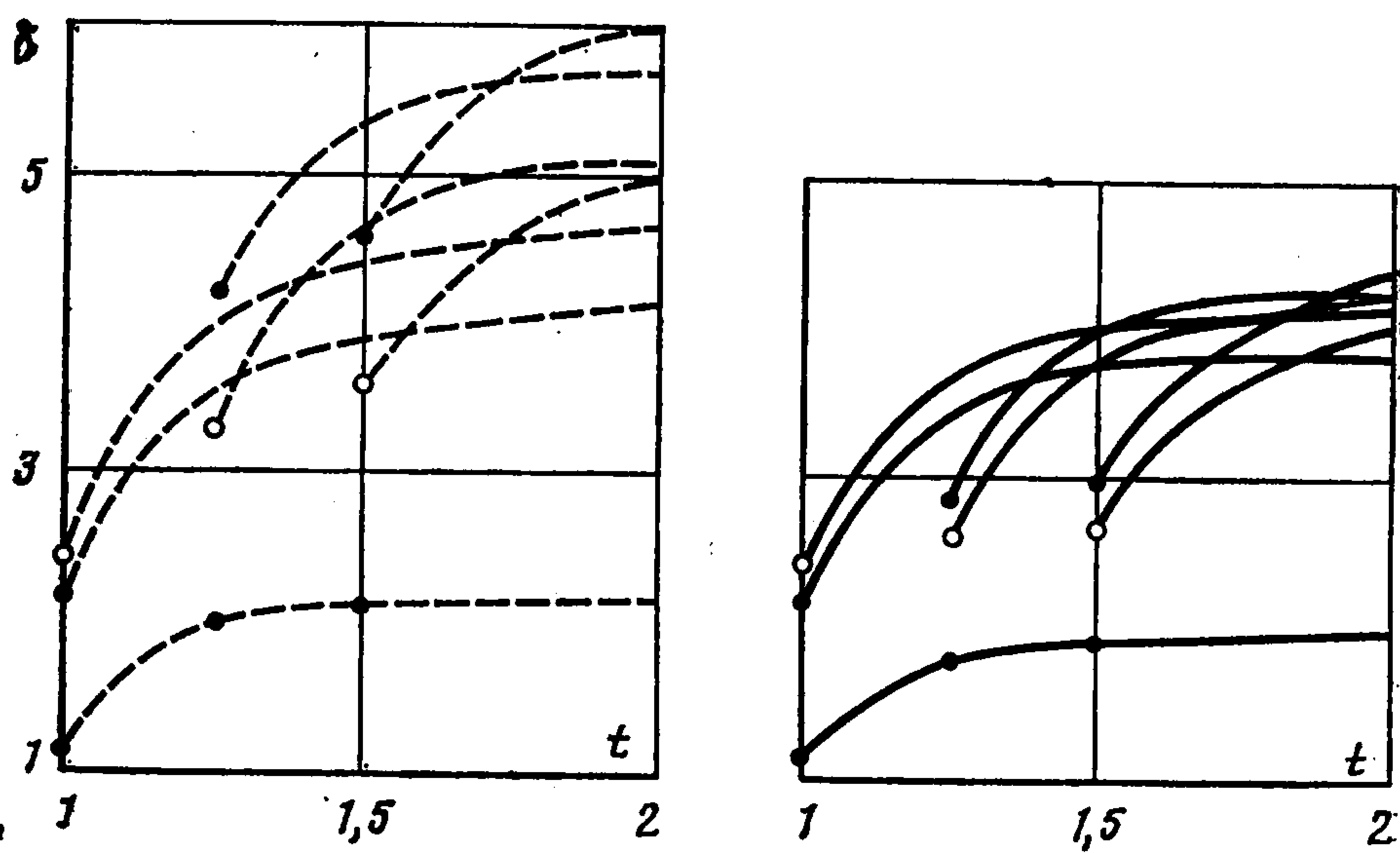
На фиг. 4 показаны распределения контактных напряжений под штампами для случаев искусственного неоднородного и однородного старения в момент $t = 2$. Для кривых 1 и 2 $\tau_2 = 1$ и $\tau_2 = 2$ соответственно. В случае однородного старения для первого штампа показана одна кривая по ранее оговоренным причинам.

Сплошные кривые 1 показывают распределения напряжений при одновременном приложении штампов для однородного случая в любой момент времени и для случая искусственного старения в момент воздействия $t = 1$. Штрихпунктирные кривые 1 описывают распределения напряжений в момент $t = 2$ при одновременном приложении штампов к искусственно неоднородно стареющему основанию. Здесь видна тенденция к существенному увеличению по времени неравномерности распределения напряжений за счет искусственного неоднородного старения.

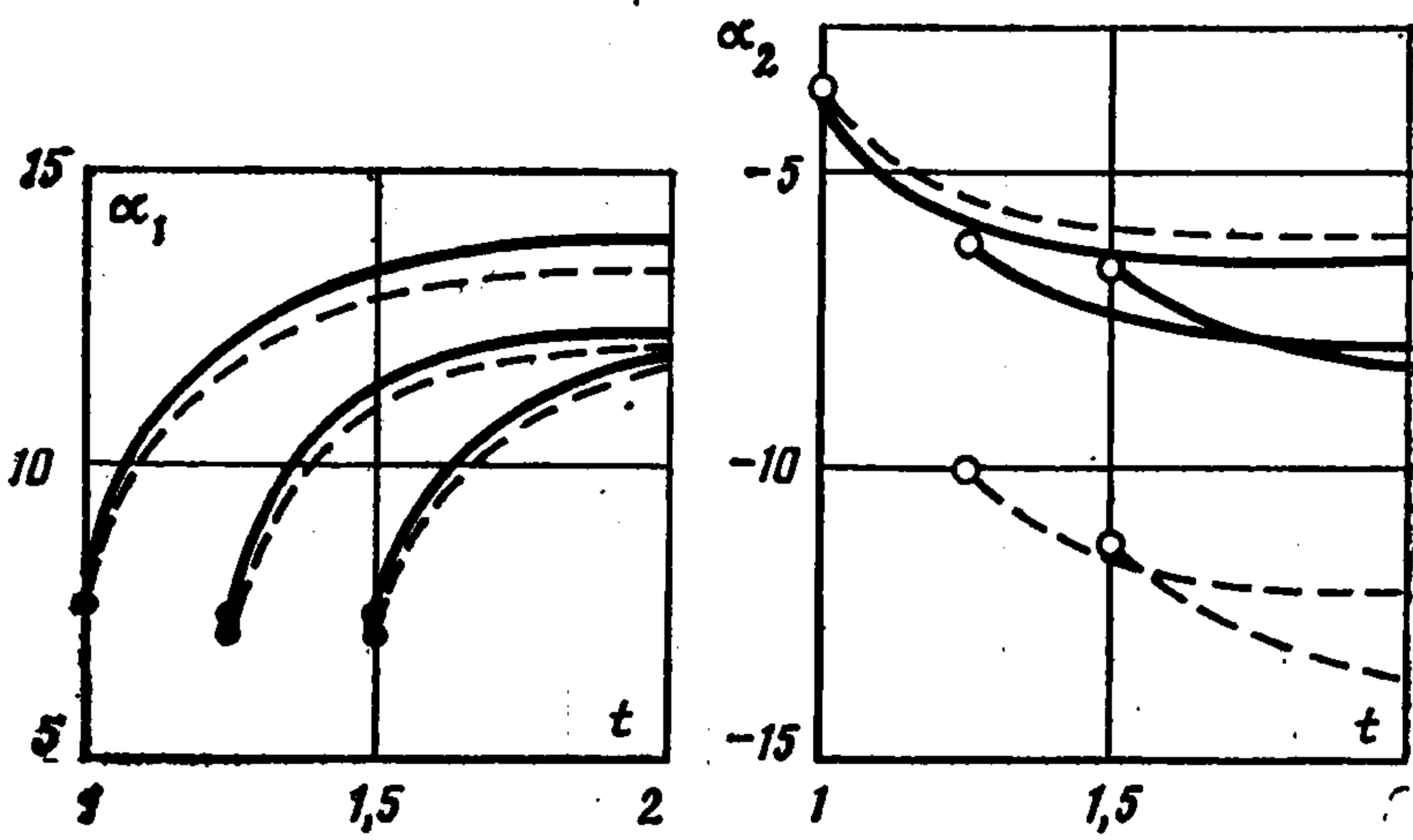
Тенденция к увеличению неравномерности распределения контактных напряжений за счет неодновременности приложения штампов обсуждалась ранее. Так, при неодновременном приложении штампов в случае искусственного неоднородного старения происходит, как правило, наложение этих аналогичных тенденций и неравномерность распределения контактных напряжений под обоими штампами с течением времени увеличивается. Однако для отмеченного случая были обнаружены моменты приложения второго штампа, когда кривые распределения напряжений под первым претерпевали качественные изменения или же происходило отслаивание первого штампа (отслаивание верхнего слоя от нижнего). Действительно, штрихпунктирные кривые 2 показывают распределения напряжений в момент приложения второго штампа $\tau_2 =$



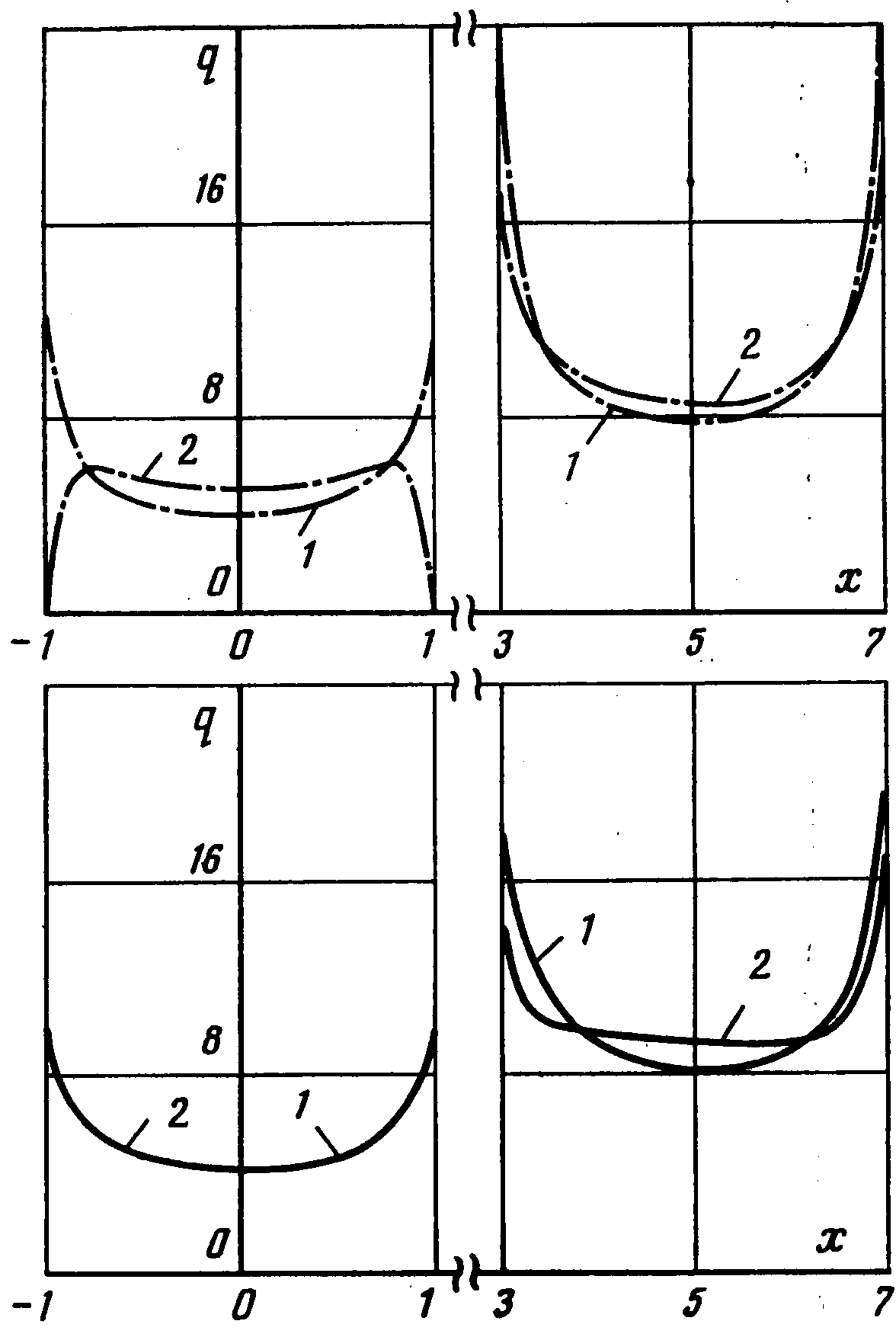
Фиг. 1



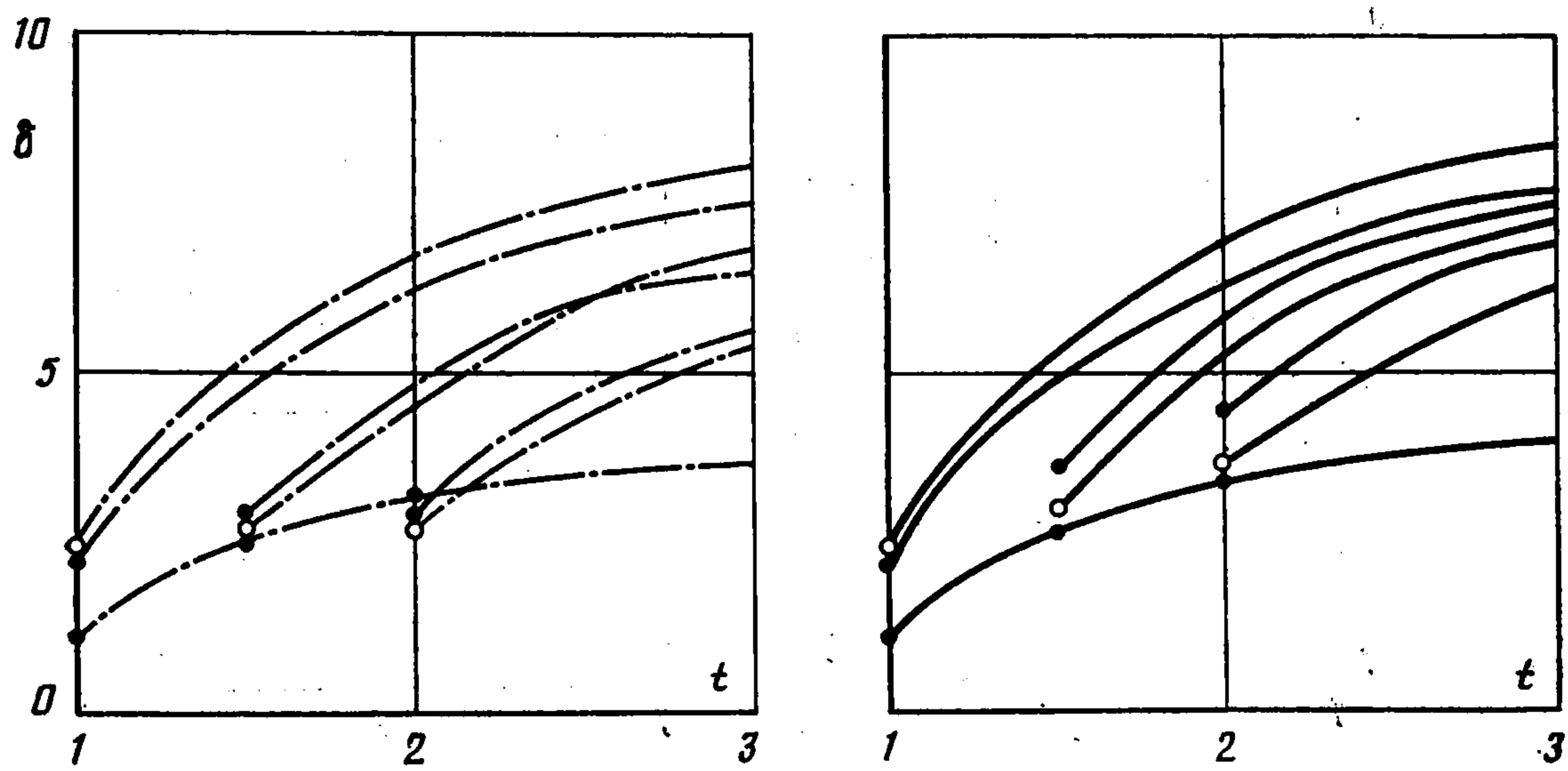
Фиг. 2



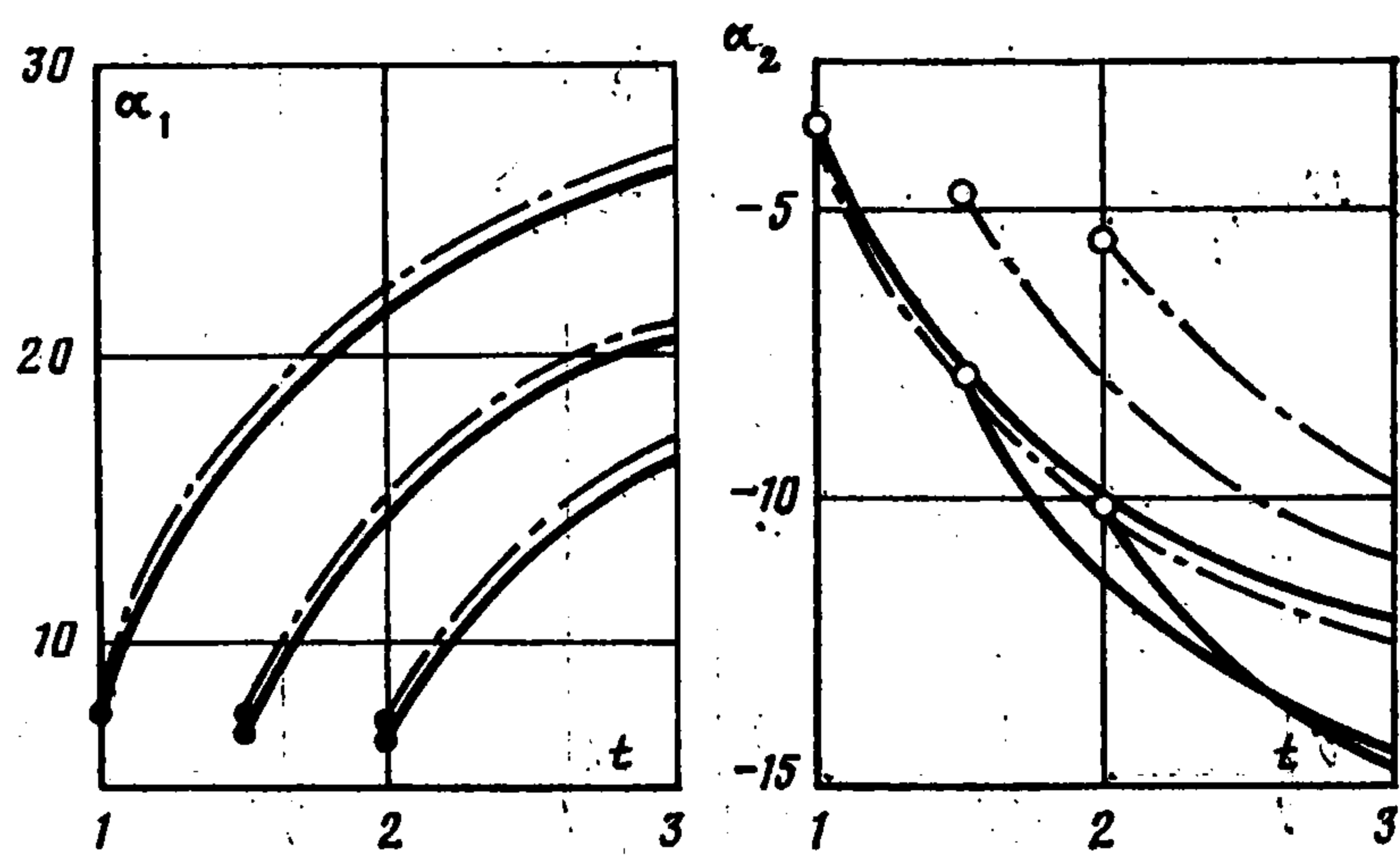
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

≡ 2. Контактные давления под первым штампом в этот момент описываются двугорбой кривой с минимумом у правого края (при моменте приложения $\tau_2 = 2$, 2 происходит отслаивание у этого края). Отметим, что двугорбая кривая распределений с течением времени распрямляется и далее приобретает обычный вид параболы.

На фиг. 5 показаны зависимости изменения осадок под штампами от времени для случаев однородного и искусственного неоднородного старения. Обозначения аналогичны фиг. 2. Здесь отметим только, что для искусственного неоднородного старения при $\tau_2 = t = 2$ скачок осадки под первым штампом отрицателен, т. е. он несколько приподнимается.

На фиг. 6 показаны изменения углов поворота штампов по времени, согласованные со случаями, исследованными для осадок. Сплошные кривые на графиках позволяют проследить и влияние момента изготовления однородного основания на напряжения, осадки и углы поворотов.

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно стареющих сред // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1976. Т. 229. № 3. С. 569—571.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 153—164.
3. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука. 1983. 336 с.
4. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ. 1983. № 5. С. 153—158.
5. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука. 1974. 455 с.
6. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1977. 383 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука. 1976. 493 с.
8. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат. 1952. 324 с.
9. Каган-Розенцвейг Л. М., Харлаб В. Д. Об учете старения бетона в задачах линейной теории ползучести // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвуз. темат. сб. тр. Л.; Ленингр. инж.-строит. ин-т. 1985. С. 99—106.
10. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 488 с.
11. Александров В. М., Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно стареющих сред // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 2. С. 12—25.
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
13. Галдыкин А. Т. Векторные функции и уравнения (с приложениями к теории управления). Л.: Изд-во ЛГУ. 1977. 351 с.
14. Веква И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука. 1978. 296 с.
15. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз. 1959. 232 с.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1976. 544 с.
17. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. 742 с.
18. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.
19. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 1970. 512 с.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1108 с.
21. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э. О контактом взаимодействии наращиваемой системы вязкоупругих накладок с однородной полуплоскостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 144—154.
22. Манжиров А. В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1019—1025.
23. Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 684—693.
24. Манжиров А. В. О влиянии неоднородного старения на концентрацию напряжений около отверстий в нелинейных вязкоупругих телах // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 77. № 5. С. 214—218.