Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 539.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СВЯЗАННОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Шачнев В. А.

Доказывается существование специальных граничных задач, которые расщепляются на элементарные, характеризуемые одним граничным условием. Решения специальных граничных задач строятся в замкнутой форме, и это позволяет использовать их в качестве представлений решений других граничных задач. Такие представления приводят к особенно простым системам интегральных уравнений, поскольку часть граничных условий учитывается в самих представлениях. В качестве примеров рассматриваются диэлектрики с простой анизотропией — некоторые классы ромбической и моноклинной систем, для них получены представления решений и интегральные уравнения некоторых классических граничных задач электроупругости.

Пусть в анизотропном и однородном бесконечно длинном цилиндре с произвольным поперечным сечением существуют поле перемещений $\mathbf{u}$ и электрический потенциал v, неменяющиеся вдоль образующей цилиндра. Введем прямоугольную систему координат (x_1, x_2, x_3), направив ось x_3 вдоль образующей. Тогда для компонент вектора перемещений и для потенциала будем иметь $u_i = u_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2, 3$, $v = v(x_1, x_2)$.

Поля напряжений p_{ij} и электрических смещений q_j определяются в этом случае следующей системой соотношений [1]:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Big(\sum_{l=1}^{3} c_{ijkl} \partial_k u_l + c_{kij} \partial_k v \Big) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

$$q_j = \sum_{k=1}^{2} \Big(\sum_{l=1}^{3} c_{jkl} \partial_k u_l - c_{jk} \partial_k v \Big) \quad (j = 1, 2, 3)$$

где ∂_k — оператор частного дифференцирования по координате x_k, c_{ijkl}, c_{jkl}, c_{jk} — материальные постоянные упругой жесткости, пьезоэлектрические, диэлектрические соответственно. Они удовлетворяют соотношениям симметрии

$$c_{jikl} = c_{ijkl}, \quad c_{klij} = c_{ijkl}, \quad c_{jlk} = c_{jkl}, \quad c_{kj} = c_{jk} \tag{2}$$

Подстановка соотношений (1) в уравнения равновесия и электростатики

$$\sum_{j=1}^{2} \partial_j p_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sum_{j=1}^{2} \partial_j q_j = 0 \tag{3}$$

приводит к основной системе уравнений связанной электроупругости

$$\sum_{l=1}^{3} L_{il} u_l + L_{i4} v = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4}$$

$$L_{il} = \sum_{j,k=1}^{2} c_{ijkl} \partial_j \partial_k, \quad L_{i4} = \sum_{j,k=1}^{2} c_{kji} \partial_k \partial_j$$

$$L_{4l} = \sum_{j,k=1}^{2} c_{jkl} \partial_j \partial_k \quad (i, l = 1, 2, 3), \quad L_{44} = -\sum_{j,k=1}^{2} c_{jk} \partial_j \partial_k$$

Из (2) следует, что $L_{li} = L_{il}$ $(i, l = 1, 2, 3, 4)$.

Решения этих уравнений должны принимать на границе области их определения заданные значения или на границе должны быть заданы усилия p_i или электрический заряд q

(5) $$p_i = \sum_{j=1}^{2} p_{ij} n_j \quad (i = 1, 2, 3), \quad q = -\sum_{j=1}^{2} q_j n_j$$

где (n_1, n_2) — единичный вектор нормали к границе поперечного сечения цилиндра, направленный вне сечения.

Для определения общего решения системы (4) введем разрешающие функции χ_s по формулам

(6) $$u_l = \sum_{s=1}^{4} M_{ls}\chi_s, \quad v = \sum_{s=1}^{4} M_{4s}\chi_s$$

$$\sum_{l=1}^{4} L_{il} M_{ls} = \delta_{is} L, \quad L = \det \| L_{ij} \|$$

где $M_{ls} = M_{sl}$ — алгебраические дополнения матрицы $\| L_{ij} \|$, δ_{is} — символ Кронекера.

Подставляя соотношения (6) в систему (4), получим, что все χ_s должны удовлетворять уравнению

(7) $$L\chi = 0, \quad L = \prod_{n=1}^{8} (a_n \partial_1 + b_n \partial_2)$$

где L — однородный дифференциальный оператор восьмого порядка с постоянными коэффициентами и частными производными по двум переменным x_1 и x_2. Такой оператор всегда можно разложить на линейные множители, что и показано выше. Ядром этого оператора будет сумма решений уравнения вида

(8) $$(a\partial_1 + b\partial_2)\,\chi = 0$$

Решение каждого такого уравнения имеет вид

(9) $$\chi = \operatorname{Re} f\,(x_1 + kx_2)$$

где f — произвольная аналитическая функция от $z = x_1 + kx_2$.

Чтобы определить k, подставим (9) непосредственно в (7) и тогда получим уравнение для k, которое назовем характеристическим

(10) $$l\,(k) = 0$$

где полином l получается из L заменой (∂_1, ∂_2) на $(1, k)$.

Будем рассматривать здесь только случай попарно различных корней характеристического уравнения. Так как это уравнение имеет вещественные коэффициенты и соответствует эллиптическому оператору четного порядка, то его корнями будут четыре пары сопряженных комплексных чисел: $k_n = \alpha_n \pm i\beta_n$, $\beta_n > 0$. Следовательно, общее решение уравнения (7) можно представить в виде

(11) $$\chi = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} f_n(z_n), \quad z_n = x_1 + k_n x_2, \quad k_n = \alpha_n + i\beta_n$$

где взяты лишь корни с положительной мнимой частью, f_n — произвольные аналитические функции. В результате будем иметь следующие представления решений (6):

(12) $$u_l = \operatorname{Re} \sum_{s,\, n=1}^{4} m_{ls}(k_n)\, f_{ns}^{(6)}(z_n), \quad v = \operatorname{Re} \sum_{s,\, n=1}^{4} m_{4s}(k_n)\, f_{ns}^{(6)}(z_n)$$

где полиномы $m_{ls}(k)$ получаются из M_{ls} заменой (∂_1, ∂_2) на $(1, k)$, f_{ns} — произвольные аналитические функции. Их число не так велико, как это указано в (12), поскольку $m_{ls}(k_n)$ не будут линейно независимыми. Поэтому, чтобы получить окончательную форму решений (12), поступим следующим образом. Будем считать, что предыдущие рассуждения были доказательством того, что общее решение системы (4) сразу можно искать в виде

$$u_l = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} m_{ln} g_n(z_n), \quad v = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} m_{4n} g_n(z_n) \tag{13}$$

Для определения $m_{ln} = m_l(k_n)$ воспользуемся не системой (4), а уравнениями (3), предварительно определив p_{ij} и q_j из (1):

$$p_{ij} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \Big(\sum_{l=1}^{3} (c_{ij1l} + c_{ij2l} k_n) m_{ln} + (c_{1ij} + c_{2ij} k_n) m_{4n} \Big) g_n' \tag{14}$$

$$q_j = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \Big(\sum_{l=1}^{3} (c_{j1l} + c_{j2l} k_n) m_{ln} - (c_{1j} + c_{2j} k_n) m_{4n} \Big) g_n'$$

Введем в рассмотрение дифференциальные формы

$$p_i ds = p_{i1} dx_2 - p_{i2} dx_1, \quad q ds = -q_1 dx_2 + q_2 dx_1$$

полученные из (5) с учетом того, что $(n_1, n_2)\, ds = (dx_2, -dx_1)$, ds — дифференциал длины контура области поперечного сечения. Вычисляя внешний дифференциал этих форм, будем иметь в силу (3)

$$\partial(p_{i1} dx_2 - p_{i2} dx_1) = (\partial_1 p_{i1} + \partial_2 p_{i2})\, dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

$$\partial(-q_1 dx_2 + q_2 dx_1) = -(\partial_1 q_1 + \partial_2 q_2)\, dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

В силу теоремы Пуанкаре отсюда следует, что существуют (по крайней мере, локально) такие нуль-формы P_i и Q, что

$$p_i ds = dP_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad q ds = dQ \tag{15}$$

и вместе с тем

$$p_{i1} = \partial_2 P_i, \quad p_{i2} = -\partial_1 P_i, \quad q_1 = -\partial_2 Q, \quad q_2 = \partial_1 Q \tag{16}$$

Представим теперь функции P_i и Q в том же виде, что u_l и v:

$$P_i = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \sigma_{in} g_n(z_n), \quad Q = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \sigma_{4n} g_n(z_n) \tag{17}$$

где согласно (15) на границе сечения

$$P_i = \int_{s_0}^{s} p_i\, ds + c_i, \quad Q = \int_{s_0}^{s} q\, ds + c$$

определены с точностью до постоянных и представляют собой интегральные усилия и интегральный заряд.

Подставляя (17) в (16), получим

$$p_{i1} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \sigma_{in} k_n g_n', \quad p_{i2} = -\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \sigma_{in} g_n' \tag{18}$$

$$q_1 = -\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \sigma_{4n} k_n g_n', \quad q_2 = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \sigma_{4n} g_n'$$

Сравнивая (18) с (14), получим (опустив индекс n) выражения

$$\sigma_i = -\sum_{l=1}^{3} (c_{i21l} + c_{i22l} k) m_l - (c_{21i} + c_{22i} k) m_4 \tag{19}$$

$$\sigma_4 = \sum_{l=1}^{4} (c_{21l} + c_{22l} k) m_l - (c_{21} + c_{22} k) m_4$$

а также дополнительные соотношения

$$(20)\qquad \sum_{l=1}^{3}(c_{i11l}+c_{i12l}k)m_l+(c_{11i}+c_{12i}k)m_4=k\sigma_i$$

$$-\sum_{l=1}^{3}(c_{11l}+c_{12l}k)m_l+(c_{11}+c_{12}k)m_4=k\sigma_4$$

Исключив σ_i из (19) и (20), придем к системе уравнений для определения k и m_i

$$(21)\qquad \sum_{l=1}^{3}(c_{i11l}+(c_{i12l}+c_{i21l})k+c_{i22l}k^2)m_l+$$

$$+(c_{11i}+(c_{12i}+c_{22i})k+c_{22i}k^2)m_4=0$$

$$-\sum_{l=1}^{3}(c_{11l}+(c_{12l}+c_{21l})k+c_{22l}k^2)m_l+(c_{11}+2c_{12}k+c_{22}k^2)m_4=0$$

Определитель этой системы есть характеристический полином (10), и равенство его нулю приводит к уравнению для определения k. После чего из системы (21) определяются $m_{in}=m_i(k_n)$.

Переходя к граничным задачам, заметим, что в силу (15) формально безразлично, что задавать на границе: p_i и q или P_i и Q. Удобнее задать P_i и Q, так как характер граничных условий для искомых функций в данном случае тот же, что и при задании u_i и v, а это позволяет поставить следующую задачу: сформировать граничные условия в виде линейных комбинаций из u_i, P_i, v, Q так, чтобы решение граничной задачи свелось к последовательному решению граничных задач каждый раз только для одной из функций g_n. В этом случае будем говорить, что граничная задача разрешима. Если граничная задача допускает раздельное решение граничных задач для каждой функции g_n, то будем говорить, что такая задача абсолютно разрешима. Заметим еще, что каждая из функций g_n имеет свою область определения, которая получается из области поперечного сечения цилиндра преобразованием

$$(22)\qquad z_n=A_nz,\quad A_n=\begin{Vmatrix}1 & \alpha_n\\ 0 & \beta_n\end{Vmatrix},\quad z=\begin{Vmatrix}x_1\\ x_2\end{Vmatrix}$$

Теорема. Если корни характеристического уравнения (10) попарно различны, то существуют абсолютно разрешимые граничные задачи.

Доказательство. Системы уравнений (19) и (20) можно записать в виде единого матричного уравнения

$$(23)\qquad (A+kB)\,W,\quad W=\operatorname{col}(m_1,\ldots,m_4,\sigma_1,\ldots,\sigma_4)$$

$$A=\begin{Vmatrix}A_{11} & E\\ A_{21} & 0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}B_{11} & 0\\ B_{21} & E\end{Vmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{Vmatrix}c_{1111} & c_{1112} & c_{1113} & c_{111}\\ c_{2111} & c_{2112} & c_{2113} & c_{112}\\ c_{3111} & c_{3112} & c_{3113} & c_{113}\\ -c_{111} & -c_{112} & -c_{113} & c_{11}\end{Vmatrix},\quad B_{11}=\begin{Vmatrix}c_{1221} & c_{1222} & c_{1223} & c_{221}\\ c_{2221} & c_{2222} & c_{2223} & c_{222}\\ c_{3221} & c_{3222} & c_{3223} & c_{223}\\ -c_{221} & -c_{222} & -c_{223} & c_{22}\end{Vmatrix}$$

где E — единичная матрица. Интерес представляют лишь матрицы A_{21}, B_{11}.

Покажем, что определители матриц A и B отличны от нуля, причем это достаточно показать лишь для одной из них в силу соотношения (23).

Как известно [1], внутренняя энергия для диэлектриков имеет вид

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} q_j \varepsilon_j$$

где $2\varepsilon_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$, $\varepsilon_j = -\partial_j v$ — компоненты тензора деформаций и вектора электрической напряженности. Так как внутренняя энергия — положительно-определенная квадратичная форма при произвольных ε_{ij} и ε_j, то она останется таковой и в случае, когда $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{31} = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ ($\varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_3 = 0$, поскольку задача двумерная). Но тогда эту форму можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2} V^T B_{11} V > 0, \quad V = \mathrm{col}\,(2\varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_2) \neq 0$$

Теперь очевидно, что $\det B = \det B_{11} > 0$, и из уравнения (23) следует, что k — собственное значение матрицы $-B^{-1}A$ и удовлетворяет уравнению $\det\,(A + kB) = 0$, представляющему собой характеристическое уравнение (10).

Так как собственные значения k_n попарно различны по условию теоремы, то собственные столбцы

$$W_n = \mathrm{col}\,(m_{1n}, \ldots m_{4n}, \sigma_{1n}, \ldots \sigma_{4n}) \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

и им сопряженные будут линейно независимыми.

Представим теперь выражения для u_i, P_i, v, Q в виде

$$\sum_{n=1}^{4} (m_{in} g_n + \overline{m_{in} g_n}) = 2u_i, \quad \sum_{n=1}^{4} (\sigma_{in} g_n + \overline{\sigma_{in} g_n}) = 2P_i$$

$$\sum_{n=1}^{4} (m_{4n} g_n + \overline{m_{4n} g_n}) = 2v, \quad \sum_{n=1}^{4} (\sigma_{4n} g_n + \overline{\sigma_{4n} g_n}) = 2Q$$

и будем их рассматривать как систему уравнений относительно g_n и $\bar{g}_n$. Определитель этой системы отличен от нуля, так как является определителем матрицы линейно независимых столбцов W_n, $\overline{W}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$), и, следовательно, система имеет решение для g_n и $\bar{g}_n$, или, что то же, для $\mathrm{Re}\, g_n$ и $\mathrm{Im}\, g_n$.

Рассмотрим эти решения на границах соответствующих областей. Так как граничные значения вещественной и мнимой частей аналитической в области функции не могут быть произвольными, то образуем из них линейные комбинации, которые запишем в виде

$$\theta_n \,\mathrm{Re}\, g_n + \omega_n \,\mathrm{Im}\, g_n = \sum_{i=1}^{3} (a_{ni} u_i + b_{ni} P_i) + a_{n4} v + b_{n4} Q$$

где θ_n, ω_n — произвольные кусочно-гладкие функции точек границы области. В итоге приходим к четырем отдельным граничным задачам теории функций комплексной переменной: восстановить аналитическую в области функцию по граничным значениям линейной комбинации ее вещественной и мнимой частей. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы теперь ясно, как надо формировать разрешимые граничные задачи двумерной электроупругости. Однако, опираясь на утверждение теоремы, можно поступить иначе. Составим пока с неопределенными коэффициентами линейные комбинации

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^{3} (a_{ij} u_j + b_{ij} P_j) + a_{i4} v + b_{i4} Q$$

Тогда на границе согласно (13) и (17) будем иметь соотношения

$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{4} w_{in}g_n = \Psi_i, \quad w_{in} = \sum_{j=1}^{4}(a_{ij}m_{jn} + b_{ij}\sigma_{jn})$$

Теперь следует так подобрать матрицы $\| a_{ij} \|$ и $\| b_{ij} \|$, чтобы матрица $\| w_{in} \|$ стала диагональной — это в случае абсолютной разрешимости. В случае же простой разрешимости достаточно привести матрицу $\| w_{in} \|$ к треугольному виду. Тогда в матрицах $\| a_{ij} \|$ и $\| b_{ij} \|$ остается больше произвола и это расширяет класс разрешимых граничных задач; в частности, возможна разрешимость изотропных задач [2].

Из приведенных ниже примеров будет видно, что не всякая граничная задача разрешима. Не разрешима, в частности, задача, в которой заданы все компоненты перемещения и электрический потенциал. Однако полученные решения можно использовать как представления решений любых других граничных задач, например так, как это сделано в работе [3]. В результате приходим к системе интегральных уравнений на границе области, удобных в том смысле, что в качестве неизвестных они содержат не все граничные функции, а лишь часть из них, поскольку другая часть, по крайней мере два граничных условия, уже учтена в представлении решения.

Пример 1. Рассмотрим диэлектрик класса 2 мм ромбической системы (ось x_1 — двукратная ось симметрии, две координатные плоскости, содержащие ось x_1,— плоскости симметрии). В этом случае отличными от нуля постоянными могут быть только c_{iijj}, c_{ijij}, c_{ij}, c_{111}, c_{122}, c_{212}, c_{222}, c_{133}, c_{331}, c_{323}, причем последние три не участвуют в двумерной задаче. Система уравнений (21) принимает вид

$$(c_{1111} + c_{1212}k^2)m_1 + (c_{1122} + c_{1212})km_2 + (c_{111} + c_{212}k^2)m_4 = 0 \tag{24}$$

$$(c_{1122} + c_{1212})km_1 + (c_{1212} + c_{2222}k^2)m_2 + (c_{212} + c_{122})km_4 = 0$$

$$c_{3131} + c_{2323}k^2 = 0$$

$$(c_{111} + c_{212}k^2)m_1 + (c_{212} + c_{122})km_2 - (c_{11} + c_{22}k^2)m_4 = 0$$

Система распалась, и k_3, $\bar{k}_3$ определятся из третьего уравнения. Определитель оставшейся системы имеет вид $l = l_6k^6 + l_4k^4 + l_2k^2 + l_0$ и из уравнения $l = 0$ определятся k_1, k_2, k_4 и им сопряженные.

Вид уравнения позволяет выделить случай, когда все корни уравнения $l = 0$, как и третьего уравнения (24), чисто мнимые. В этом случае имеем две отдельные системы граничных условий

$$\sum_n{}' (m_{1n}, m_{4n}, \sigma_{2n})\,\mathrm{Re}\, g_n = (u_1, v, P_2)$$

$$\sum_n{}' (im_{2n}, i\sigma_{1n}, i\sigma_{4n})\,\mathrm{Im}\, g_n = (u_2, P_1, Q)$$

(штрих означает, что пропущен номер $n = 3$). Из первой и второй системы соответственно можно определить

$$\mathrm{Re}\, g_n = \alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}P_2 + \alpha_{n4}v \tag{25}$$

$$\mathrm{Im}\, g_n = \beta_{n1}P_1 + \beta_{n2}u_2 + \beta_{n4}Q \tag{26}$$

Для u_3 или P_3 имеется отдельное граничное условие, и потому в дальнейшем оно учитываться не будет.

В результате получены раздельные граничные задачи, в которых надо в области восстановить аналитическую функцию по заданной ее вещественной или мнимой части на границе. Представим решения этих задач в замкнутой форме.

Пусть функция $z_n = f_n(\zeta_n)$ отображает какую-либо стандартную область плоскости комплексной переменной, например верхнюю полуплоскость, в область определения функции g_n. Тогда решение граничной задачи можно записать по формуле Шварца в виде (27) или (28):

$$g_n(z_n) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}P_2 + \alpha_{n4}v}{\xi_n - \zeta_n(z_n)} d\xi_n + ic_n \tag{27}$$

$$g_n(z_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_{n1}P_1 + \beta_{n2}u_2 + \beta_{n4}Q}{\xi_n - \zeta_n(z_n)} d\xi_n + c_n \tag{28}$$

где u_i, P_i, v, Q заданы как функции координаты $\xi_n = f_n^{-1}(z_n)$, $(z_n) = x_{n1} + ix_{n2}$ принадлежит границе области определения g_n.

Подставляя (27) или (28) в (13), получим представления решений граничных задач в этом случае для диэлектриков данного класса.

Рассмотрим граничную задачу, в которой заданы компоненты перемещения и электрический потенциал. Если в качестве представления решения выбрать (27), то остается только рассмотреть граничное условие для u_2. Из (13) имеем представления ($u_4 = v$)

$$u_j = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4} \frac{m_{jn}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}P_2 + \alpha_{n4}v}{\xi_n - \zeta_n(z_n)} d\xi_n + c_j \quad (j = 1, 2, 4) \tag{29}$$

Переводя z_n на границу области в уравнении для $j = 2$, получим согласно формулам Сохоцкого — Племеля интегральное уравнение для неизвестной в данном случае граничной функции — интегрального усилия P_2:

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4}{}' m_{2n}\alpha_{n2} \left[P_2(\xi) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_2(\tau(\tau_n))}{\tau_n - \xi_n(\xi)} d\tau_n \right] = R(\xi) \tag{30}$$

$$R(\xi) = u_2(\xi) - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{4}{}' m_{2n} \left[\alpha_{n1}u_1(\xi) + \alpha_{n4}v(\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{n1}u_1(\tau(\tau_n)) + \alpha_{n4}v(\tau(\tau_n))}{\tau_n - \xi_n(\xi)} d\tau_n \right] - c_2$$

Зависимость $\xi_n = \xi_n(\xi)$ определяется из соотношения $f_n(\xi_n) = A_n f(\xi)$, где функция $z = f(\zeta)$ отображает деформируемую область на верхнюю полуплоскость $\eta \geqslant 0$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Пример 2. В классе 002 моноклинной системы (ось двукратной симметрии — ось x_3) равны нулю постоянные c_{ii23}, c_{ii31}, c_{1223}, c_{1231}, c_{1jj}, c_{122}, c_{2jj}, c_{212}, c_{323}, c_{331}, c_{23}, c_{31} и система (21) распадается на две независимые системы

$$\begin{aligned} &(c_{1111} + 2c_{1112}k + c_{1212}k^2)m_1 + (c_{1112} + (c_{1122} + c_{1212})k + c_{1222}k^2)m_2 = 0 \\ &(c_{1112} + (c_{1122} + c_{1212})k + c_{1212}k^2)m_1 + (c_{1212} + 2c_{1222}k + c_{2222}k^2)m_2 = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &(c_{3131} + 2c_{3123}k + c_{2323}k^2)m_3 + (c_{113} + (c_{123} + c_{213})k + c_{223}k^2)m_4 = 0 \\ &(c_{113} + (c_{123} + c_{213}k) + c_{223}k^2)m_3 - (c_{11} + 2c_{12}k + c_{22}k^2)m_4 = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

При этом из (19) следует

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -(c_{1211} + c_{1221}k)m_1 - (c_{1212} + c_{1222}k)m_2 \\ \sigma_2 &= -(c_{2211} + c_{2221}k)m_1 - (c_{2212} + c_{2222}k)m_2 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -(c_{3213} + c_{3223}k)m_3 - (c_{123} + c_{223}k)m_4 \\ \sigma_4 &= (c_{213} + c_{223}k)m_3 - (c_{21} + c_{22}k)m_4 \end{aligned} \tag{34}$$

Равенство нулю определителей систем (31), (32) дает два характеристических уравнения, корни которых k_1, k_2, $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ и k_3, k_4, $\bar{k}_3$, $\bar{k}_4$ соответственно.

Видно, что задача распалась на две: одна описывается в граничных терминах u_1, u_2, P_1, P_2, другая — в терминах u_3, P_3, v, Q. Частный случай первой задачи ($c_{1112} = c_{1222} = 0$) был рассмотрен в работах [3, 4]. Здесь рассмотрим только вторую задачу, при этом для простоты положим равными нулю c_{1112}, c_{1222}, c_{2331}, c_{113}, c_{123}, c_{223}, c_{12}, что отвечает диэлектрику класса 422. В этом случае характеристическое уравнение имеет только чисто мнимые корни.

Определяя m_i и σ_i из (32) и (34), получим две системы граничных условий для g_n: одна выражена через u_3, Q, другая — через P_3, v. Остановимся только на первой.

Решение в этом случае имеет вид

$$\operatorname{Re} g_n = (-1)^n [u_3 + c_{11}^{-1} c_{213}^{-1} (c_{11} + c_{22} k_{7-n}^2) Q]/\Delta$$
$$\Delta = c_{22} (k_4^2 - k_3^2)$$

и аналогично предыдущему g_n восстанавливается в области.

Чтобы рассмотреть другие граничные задачи, приведем представления оставшихся функций. Из (13) и (17) получим

$$\left\| \begin{matrix} P_3 \\ v \end{matrix} \right\| = \operatorname{Re} \sum_{n=3}^{4} \frac{(-1)^n}{\pi i} \left\| \begin{matrix} \sigma_{3n} \\ m_{4n} \end{matrix} \right\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_3 + c_{11}^{-1} c_{213}^{-1} (c_{11} + c_{22} k_{7-n}^2) Q}{\Delta (\xi_n - \zeta_n (z_n))} d\xi_n + C$$

Если теперь на границе заданы перемещение и электрический потенциал v, то для Q получим согласно формулам Сохоцкого — Племеля следующее интегральное уравнение:

$$\sum_{n=3}^{4} \frac{(c_{11} + c_{22} k_{7-n}^2) \operatorname{Im} m_{4n}}{c_{11} c_{213} \Delta \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\tau(\tau_n))}{\tau_n - \xi_n(\xi)} d\tau_n = R(\xi) \tag{35}$$

$$R(\xi) = v(\xi) - \sum_{n=1}^{4} \frac{\operatorname{Im} m_{4n}}{\Delta \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_3(\tau(\tau_n))}{\tau_n - \xi_n(\xi)} d\tau_n - c_4$$

Рассмотрим конкретный пример для второй задачи. Пусть область сечения цилиндрического тела есть внешность параболы $y \geqslant 4a^2 (x + a^2)$, a — параметр параболы ($x_1 = x$, $x_2 = y$) и на границе области заданы перемещение u_3 и потенциал v, при этом $u_3(\infty) = v(\infty) = 0$.

Корни характеристического уравнения системы (32) имеют вид $k_n = i\beta_n$, $\beta_n > 0$ ($n = 3, 4$) и $m_{3n} = c_{11} - c_{22}\beta_n^2$, $m_{4n} = ic_{213}\beta_n$ есть решение этой системы.

Преобразования $z_n = A_n z$ ($n = 3, 4$), или $x_n = x$, $y_n = \beta_n y$, переводят заданную область в область $y_n^2 \geqslant 4\beta_n^2 a^2 (x_n + a^2)$.

Функции, конформно отображающие верхние полуплоскости в преобразованные области, будут иметь вид

$$z_n = \beta_n^2 (\zeta_n^2 + i2a\zeta_n) - a^2, \quad \zeta_n = \xi_n + i\eta_n$$

и, в частности, при $\beta_n = 1$ получим отображение полуплоскости в заданную область сечения, так что на границе сечения в силу соотношения $z_n = A_n z$ будем иметь $\xi_n = \beta_n^{-1}\xi$. Последнее обстоятельство делает ядра интегралов в (35) подобными: $(\tau_n - \xi_n(\xi))^{-1} = \beta_n (\tau - \xi)^{-1}$, что позволяет решить уравнение (35) путем обращения оператора Коши. В результате найдем

$$Q(\xi) = -c_{213} u_3(\xi) + \frac{c_{22}(\beta_3 + \beta_4)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau)\, d\tau}{\tau - \xi} + c$$

и задача решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nowacki W.* Effekty elektromagnetyczne w stalych cialach odksztalcalnych. W—wa: PAN. 1983. 147 S.
2. *Шачнев В. А.* К разрешимости плоской задачи теории упругости для изотропной области // Науч. тр. Моск. лесотехн. ин-та. 1982. Вып. 140. С. 111—116.
3. *Шачнев В. А.* Некоторые представления решений граничных задач двумерной статической термоупругости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 154—164.
4. *Шачнев В. А.* О напряженном состоянии ортотропно упругой плоской области в окрестности угловой точки // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 124—133.

Москва

Поступила в редакцию 18.IX.1985