

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ КЛИНА ПРИ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Александров В. М., Гришин С. А.

Методом Черепанова — Райса — Хатчинсона, использующим нелинейное дифференциальное уравнение для функции напряжений Эри, исследуются три задачи о плоской деформации малой окрестности вершины физически нелинейного несжимаемого клина: задача 1 — одна грань свободна, на другой задано условие гладкого контакта; задача 2 — одна грань свободна, к другой приклеена гибкая нерастяжимая накладка; задача 3 — одна грань свободна, на другой — условие сцепления с жестким плоским штампом. Приводятся численные результаты, иллюстрирующие влияние на решение степени нелинейности определяющих соотношений и угла раствора клина. Метод применяется также к функции тока, что позволяет сформулировать аналогию между различными плоскими задачами и дает возможность распространить его на осесимметричный случай.

Во многих задачах механики деформируемого твердого тела исследование асимптотики решения вблизи угловой точки области, занятой телом, играет фундаментальную роль. В упругом случае этот вопрос хорошо изучен, накоплена обширная литература. Сложнее обстоит дело, если определяющие соотношения нелинейны. Большинство работ здесь касается только случая трещины. Данная статья имеет целью несколько восполнить этот пробел.

1. Рассмотрим задачу о равновесии клина с углом раствора α из материала, подчиняющегося закону

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_u &= A\sigma_u^m, \quad \varepsilon_{kk} = 0, \quad S_{ij} = \sigma_u \varepsilon_u^{-1} \varepsilon_{ij}, \quad A, m = \text{const}, \quad m \geq 1 \\ \sigma_u &= 6^{-1/2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6\sigma_{12}^2 + \\ &+ 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2]^{1/2} \\ \varepsilon_u &= 6^{-1/2} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + 6\varepsilon_{12}^2 + 6\varepsilon_{23}^2 + \\ &+ 6\varepsilon_{31}^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь S_{ij} — компоненты девиатора напряжений в некотором ортонормированном базисе, σ_u — интенсивность напряжений, ε_{ij} — компоненты тензора деформации или скоростей деформации в зависимости от конкретной модели: если рассматривается задача нелинейной установившейся ползучести, то ε_{ij} — скорости, если же законом (1.1) описана, вообще говоря, упругопластическая диаграмма растяжения — сжатия, то ε_{ij} — компоненты тензора малой деформации. Нет необходимости конкретизировать физический смысл ε_{ij} — в силу известной аналогии основные уравнения запишутся одинаково — поэтому будем в дальнейшем называть для краткости ε_{ij} деформациями, а ε_u — интенсивностью деформаций.

Предположим, что деформация плоская. В полярных координатах с центром в вершине клина имеем

$$(1.2) \quad \begin{aligned} S_r &= -S_\theta = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \varepsilon_r, \quad S_{r\theta} = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma = \sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \\ \sigma_u &= [1/4(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \sigma_{r\theta}^2]^{1/2}, \quad \varepsilon_u = [\varepsilon_r^2 + \varepsilon_{r\theta}^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Всюду в области должны выполняться уравнения равновесия и соотношения Коши

$$(1.3) \quad \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\vartheta) + \frac{1}{r} \sigma_{r\vartheta, \vartheta} = 0$$

$$\sigma_{r\vartheta, r} + \frac{1}{r} \sigma_{\vartheta, \vartheta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\vartheta} = 0$$

$$(1.4) \quad \varepsilon_r = u_{r,r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r} u_{\vartheta, \vartheta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left(u_{\vartheta, r} - \frac{1}{r} u_\vartheta + \frac{1}{r} u_{r, \vartheta} \right)$$

(индекс без запятой отвечает компоненте вектора или тензора, а индексом после запятой обозначена операция дифференцирования по соответствующей координате).

Введем функцию напряжений Эри Φ по обычным формулам

$$(1.5) \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \Phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \Phi_{, \vartheta\vartheta}, \quad \sigma_\vartheta = \Phi_{,rr}, \quad \sigma_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \Phi_{, \vartheta} - \frac{1}{r} \Phi_{,r\vartheta}$$

Выражая из (1.1), (1.2), (1.5) через Φ компоненты деформации и подставляя эти выражения в единственное для плоской задачи условие совместности

$$(1.6) \quad \frac{1}{r} (r\varepsilon_\vartheta)_{,rr} + \frac{1}{r^2} \varepsilon_{r, \vartheta\vartheta} - \frac{1}{r} \varepsilon_{r,r} - \frac{2}{r^2} (r\varepsilon_{r\vartheta, \vartheta})_{,r} = 0$$

получим некоторое уравнение в частных производных относительно функции Эри, решение которого при заданных граничных условиях полностью определяет поля напряжений и деформаций.

Интересуясь лишь поведением решения в малой окрестности вершины, будем искать функцию Эри в виде

$$(1.7) \quad \Phi(r, \vartheta) = Qr^s \varphi(\vartheta)$$

где Q, s — неизвестные действительные константы, φ — неизвестная функция переменной ϑ . Последнее представление широко распространено при исследовании решения задачи вблизи угловой точки. Его можно трактовать как главный член асимптотического разложения по степеням переменной r . С практической точки зрения оно существенно упрощает задачу, разделяя переменные в уравнении совместности. Принятая предположением (1.7) схема называется методикой Черепанова — Райса — Хатчинсона по имени авторов работ [1—5], впервые применивших этот прием в задачах о трещине в среде, упрочняющейся по степенному закону [6].

Итак, предполагая справедливость соотношения (1.7), из (1.5), (1.1), (1.2) имеем

$$(1.8) \quad \sigma_{ij}(r, \vartheta) = Qr^{s-2} \bar{\sigma}_{ij}(\vartheta)$$

$$\bar{\sigma}_u = [1/4 (\varphi'' + s(2-s)\varphi)^2 + (1-s)^2 \varphi'^2]^{1/2}$$

$$\bar{\sigma}_r = s\varphi + \varphi'', \quad \bar{\sigma}_\vartheta = s(s-1)\varphi, \quad \bar{\sigma}_{r\vartheta} = (1-s)\varphi'$$

$$(1.9) \quad \varepsilon_{ij}(r, \vartheta) = AQ^{m_r m(s-2)} \bar{\varepsilon}_{ij}(\vartheta)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = -\bar{\varepsilon}_\vartheta = \bar{\sigma}_u^{m-1} \cdot 1/2 (\varphi'' + s(2-s)\varphi), \quad \bar{\varepsilon}_{r\vartheta} = \bar{\sigma}_u^{m-1} (1-s)\varphi'$$

Вычисляя необходимые производные от компонент тензора деформации и подставляя их в условие совместности (1.6), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно определенной на отрезке $[0, \alpha]$ функции $\varphi(\vartheta)$, в которое постоян-

ная s входит как параметр:

$$(1.10) \quad \left\{ \frac{d^2}{d\vartheta^2} - m(s-2)[m(s-2)+2] \right\} \{ \bar{\sigma}_u^{m-1} \cdot 1/2 (\varphi'' + s(2-s)\varphi) \} + \\ + 2(s-1)[m(s-2)+1] \{ \bar{\sigma}_u^{m-1} \varphi' \}' = 0$$

Естественное требование конечности энергии деформации в окрестности вершины произвольного радиуса ρ налагает ограничение

$$(1.11) \quad \int_0^\rho \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} r dr < \infty; \quad s > \frac{2m}{m+1}$$

Обратимся к граничным условиям. Грань клина $\vartheta = \alpha$ будем считать свободной от нагрузки, что при учете (1.9) запишется так:

$$(1.12) \quad \varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$$

На другой грани клина будем требовать выполнения одного из следующих трех условий и определим в связи с этим три задачи.

Задача 1. На грань $\vartheta = 0$ действует жесткий штамп с плоской абсолютно гладкой подошвой

$$(1.13) \quad u_\vartheta(r, 0) = \text{const}, \quad \sigma_{r\vartheta}(r, 0) = 0$$

Видно [7], что (1.13) эквивалентно условию

$$(1.14) \quad \varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0$$

Задача 2. К грани $\vartheta = 0$ приклеена не сопротивляющаяся изгибу, но жесткая на растяжение накладка

$$(1.15) \quad u_r(r, 0) = \text{const}, \quad \sigma_\vartheta(r, 0) = 0$$

Из (1.9) вытекает эквивалентность (1.15) следующему требованию:

$$(1.16) \quad \varphi(0) = \varphi''(0) = 0$$

Задача 3. С гранью $\vartheta = 0$ сцеплен плоский жесткий штамп

$$(1.17) \quad u_r(r, 0) = \text{const}, \quad u_\vartheta(r, 0) = C_1 r + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const}$$

Первое равенство (1.17), первое соотношение (1.4) и (1.9) дают

$$(1.18) \quad \varphi''(0) + s(2-s)\varphi(0) = 0$$

Из первого и третьего соотношений Коши (1.4) с учетом второго равенства (1.17) имеем, что $(2r\varepsilon_{r\vartheta})_{,r} - \varepsilon_{r,\vartheta} = 0$ при $\vartheta = 0$. Дифференцируя и подставляя сюда нужные выражения (1.9), пользуясь (1.18), после некоторых преобразований получим

$$(1.19) \quad \varphi'''(0) - \varphi'(0) [4(m(s-2)+1)(1-s) - s(2-s)] = 0$$

Итак, условия (1.17) эквивалентны (1.18), (1.19).

Левые части уравнения (1.10) и всех условий (1.12), (1.14), (1.16), (1.18), (1.19) — однородные функции относительно φ и производных от φ по ϑ , поэтому задачи допускают нетривиальные решения лишь для частных значений параметра s . Таким образом, кроме не тождественно равной нулю функции $\varphi(\vartheta)$ требуется найти наименьшее вещественное и простое собственное число s , удовлетворяющее энергетической оценке (1.11).

Поставленные задачи могут быть решены методом пристрелки, состоящем в следующем. Пользуясь однородностью, осуществим нормировку, потребовав $\varphi(0) = -1$ в задачах 1, 3 и $\varphi'(0) = -1$ в задаче 2. Этим получим третье условие на левом конце отрезка интегрирования. Задавая теперь как-то значение параметра s и четвертое условие в нуле, можем решать задачу Коши численно методом Рунге — Кутта. При этом в точке

$\vartheta = \alpha$ будем получать некоторые числа $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi'(\alpha)$. Применяя к так определенной функции метод Ньютона, легко добиться, чтобы $a = b = 0$, и удовлетворить тем самым условиям (1.12). Неравенство (1.11) и требование, чтобы найденное s действительно было наименьшим из чисел, ему удовлетворяющих, проверяются непосредственно.

2. На основании изложенного была проведена серия вычислений. В качестве теста для программы использованы задачи о трещинах из [4, 5], получающиеся в частном случае $\alpha = \pi$ при замене нормировки. Результаты расчетов частично представлены на фиг. 1—4.

На фиг. 1, а изображены графики зависимости показателя особенности s от угла раствора клина α при нескольких m в задаче 1. Поскольку условия гладкого штампа (1.14) идентичны условиям симметрии, это можно использовать для контроля за вычислениями. Точками на графиках выделены известные частные результаты. При $\alpha = \pi$ во всем реальном диапазоне изменения m справедлива формула [1—4]

$$(2.1) \quad s = (2m + 1)/(m + 1)$$

Значение $\alpha = \pi/2$ соответствует задаче о растяжении или сжатии полуплоскости силами, параллельными ее границе. Очевидно, что независимо от m напряжения должны быть в этом случае ограниченными, поэтому $s = 2$. Выделенная точка на кривой для $m = 3$ соответствует значению $s = 1,775$, указанному в [4] в качестве иллюстрации возможности решения задачи для $\alpha \neq \pi$ используемым здесь методом. Кривая для $m = 1$ может быть получена в результате решения алгебраического уравнения. Диапазон изменения m взят из таблиц [8].

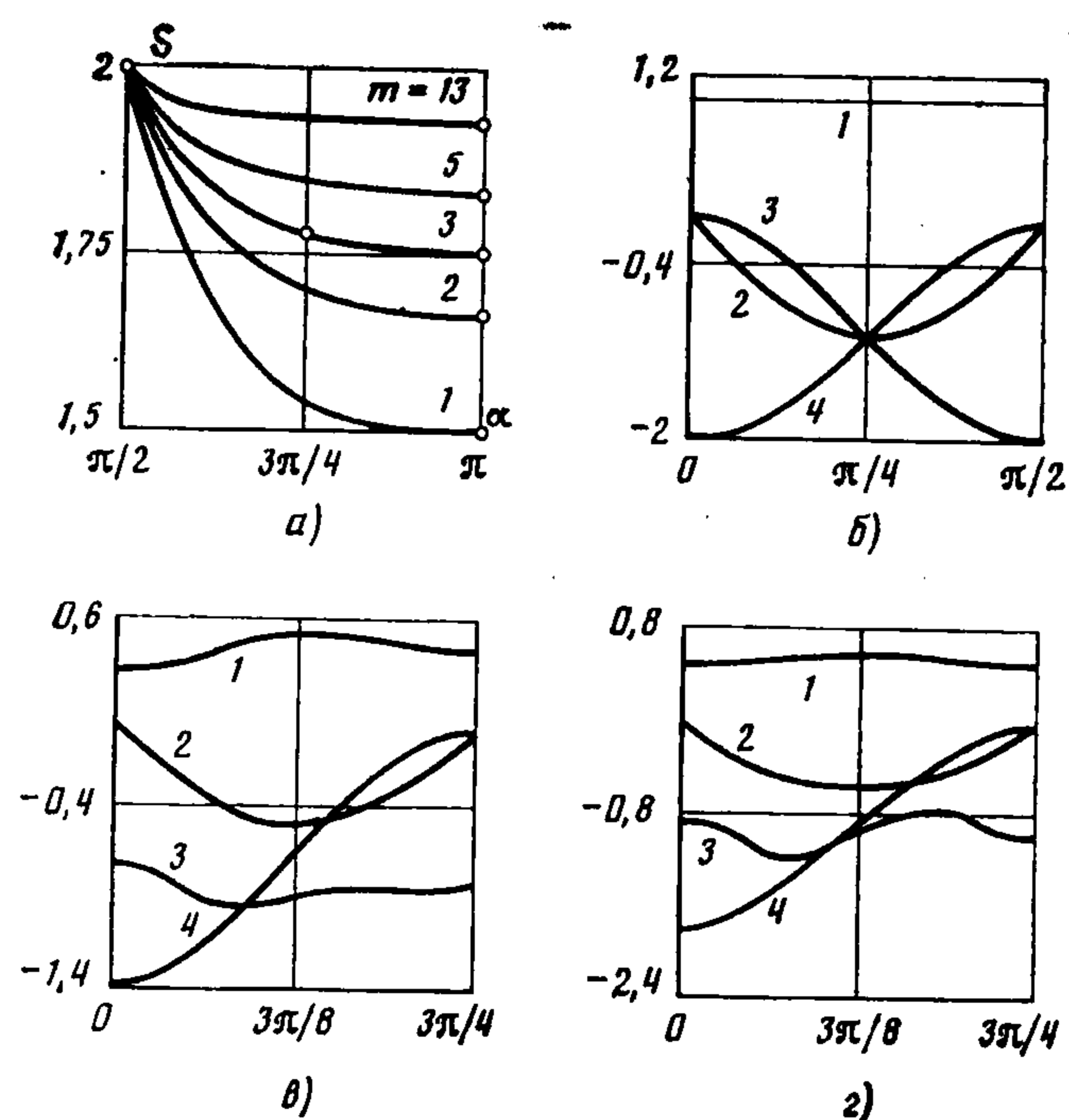
Для ответа на вопрос, почему s — наименьшее из чисел, удовлетворяющих (1.11), помимо соображений непрерывности при предельных переходах $\alpha \rightarrow \pi$, $\alpha \rightarrow \pi/2$, $m \rightarrow 1$, были предприняты многочисленные попытки построить решение с s , меньшим, чем на фиг. 1, а, при помощи той же программы, но при других стартовых параметрах. Они не привели к успеху: процесс Ньютона либо сходился к вычисленным значениям, либо расходился вовсе. На фиг. 1, б — г изображены графики угловых составляющих локального поля напряжений. Номера кривых соответствуют компонентам так: 1 — $\bar{\sigma}_u(\vartheta)$, 2 — $\bar{\sigma}_{r\vartheta}(\vartheta)$, 3 — $\bar{\sigma}_r(\vartheta)$, 4 — $\bar{\sigma}_\vartheta(\vartheta)$. Случай б отвечает однородному полю при $\alpha = \pi/2$, $s = 2$, $\varphi = -\cos^2 \vartheta$. Графики при $m = 3$, $\alpha = 3\pi/4$ (фиг. 1, в) с нормировкой $\varphi(0) = 1$ имеются в [4]. На фиг. 1, г представлены графики при $m = 13$, $\alpha = 3\pi/4$. В этом случае $s = 1,933$, $\varphi''(0) = 1,083$.

Перейдем к задаче 2 (фиг. 2, 3). Фиг. 2 аналогична фиг. 1, а. Выделенные точки при $\alpha = \pi$ отвечают значениям s , даваемым формулой (2.1) [5]. Это единственный случай, когда значения s в задачах 1 и 2 совпадают. С уменьшением α собственное число задачи 2 растет, причем быстрее, чем в задаче 1. Наконец, достигается некоторое критическое значение $\alpha = \alpha^*$, когда $s = 2$ и напряжения становятся ограниченными. Эта часть фигуры наиболее интересна, она воспроизведена в более крупном масштабе.

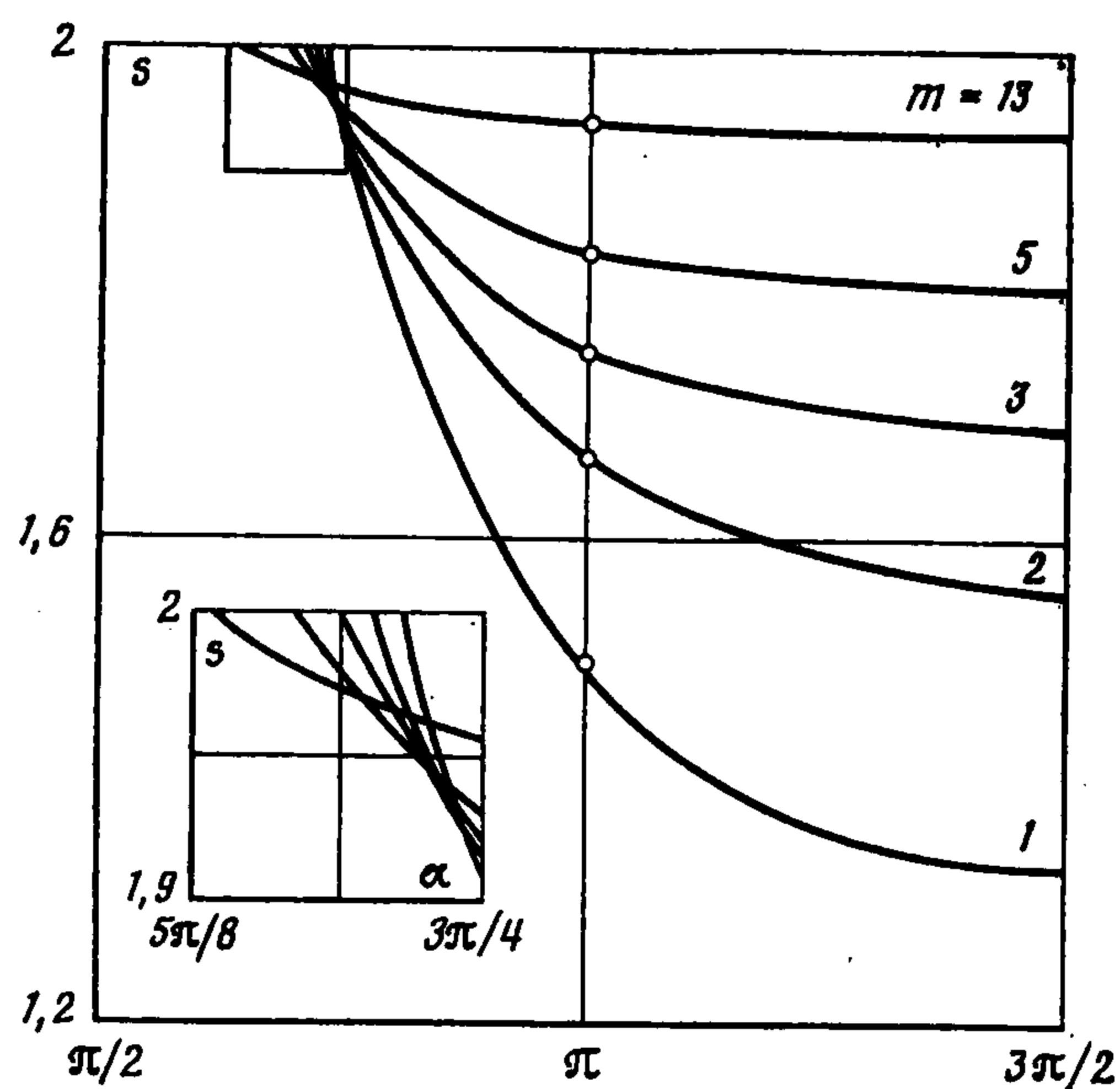
В отличие от задачи 1 величина критического угла α^* существенно зависит от m . Чем больше m , тем меньше становится α^* . В линейном случае значение α^* легко найти из уравнения $\operatorname{tg} 2\alpha^* = 2\alpha^*$. Для определения α^* при $m \neq 1$ можно сразу положить $s = 2$ в (1.10). Тогда порядок уравнения понижается до первого, цепочкой замен оно преобразуется в уравнение Риккати и сводится к уравнению Бесселя для функций порядка $\nu = (m - 1)/(2m)$. Выполнение обратной цепочки подстановок приводит к нетривиальному соотношению между φ' , φ'' и тремя свободными константами, содержащему модифицированные функции Бесселя первого рода порядков ν и $\nu - 1$, поэтому задача нахождения α^* , при которых можно удовлетворить граничным условиям, представляется более сложной, чем исходная.

На фиг. 3 изображены угловые составляющие локального поля напряжений в рассматриваемой задаче. Нумерация кривых аналогична фиг. 1. Для $m = 1$ решение известно. Графики для $\alpha = \pi$, $m = 3$ и $m = 13$ имеются в [5]. На фиг. 3 представлены следующие случаи: а — $m = 13$, $s = 1,954$; б — $m = 7$, $s = 1,861$; в — $m = 1$, $s = 1,333$; г — $m = 2$, $s = 1,563$. Появление излома на графике $\bar{\sigma}_u(\vartheta)$ части в заставило ограничиться диапазоном $\alpha \leq 3\pi/2$.

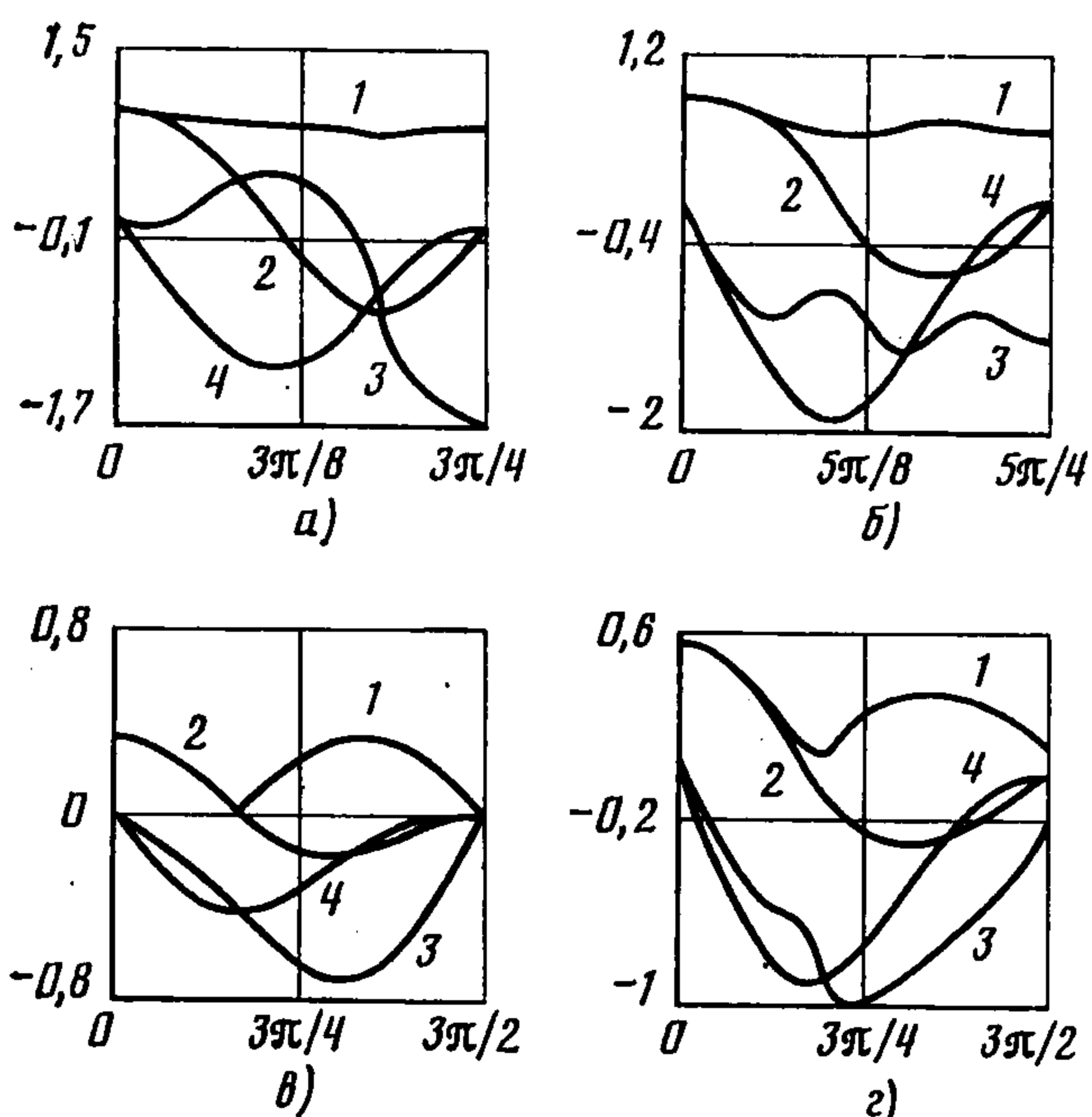
В отличие от задач 1 и 2 задача 3 в нелинейном случае является новой и потому более интересна. Несжимаемость материала и нелинейность закона его поведения



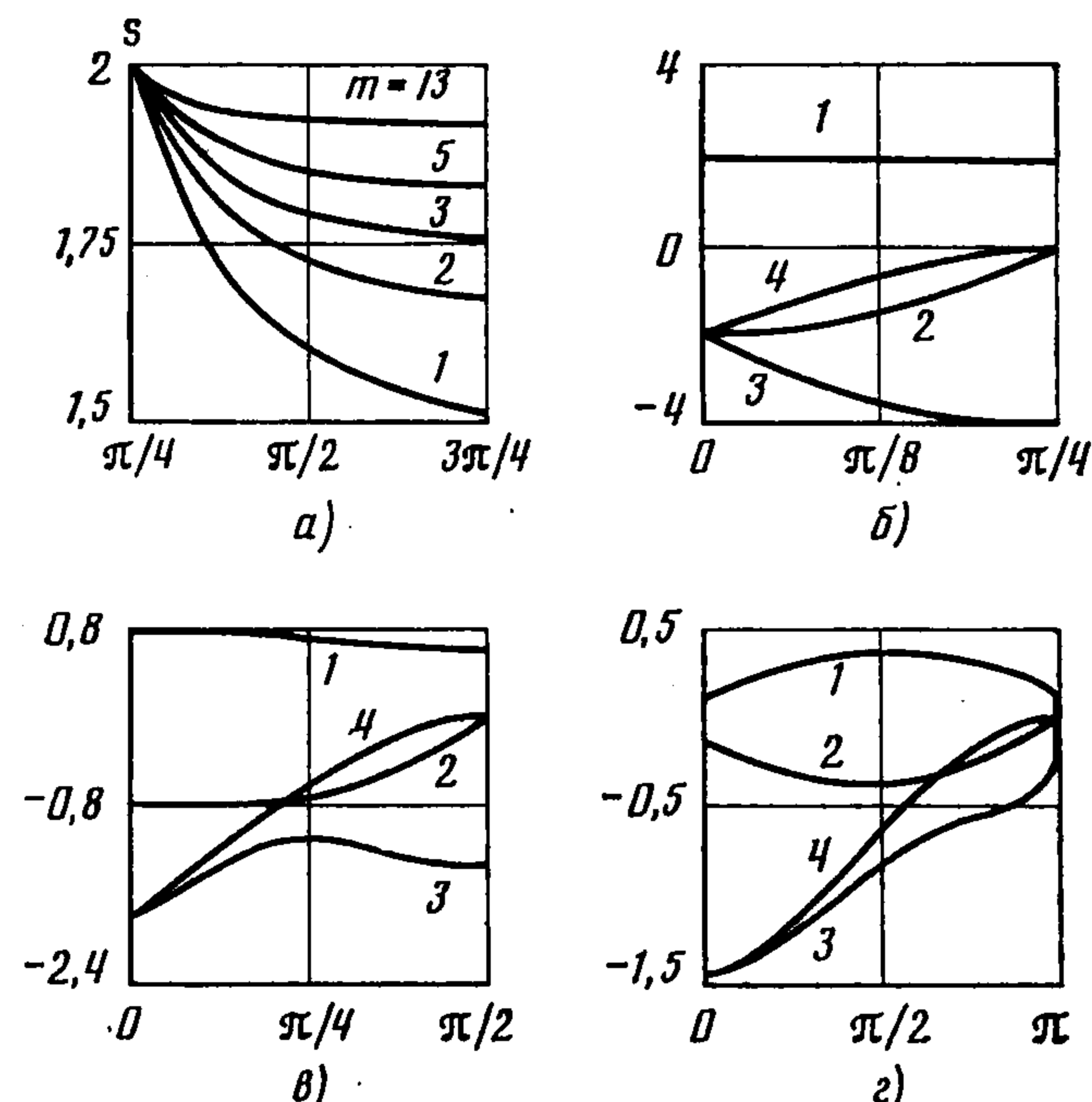
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

(1.1) позволяли надеяться на отсутствие осцилляции напряжений вблизи угла и исследовать асимптотику, действуя по прежней схеме. Наводящих соображений относительно величины $s(\alpha)$ при $m > 1$ не было. Оказалось удобным выбрать за начальное значение $\alpha = 3\pi/4$.

Результаты вычислений представлены на фиг. 4. Фиг. 4, а аналогична фиг. 1, а и 2, а. Видно, что уже при $\alpha = 3\pi/4$ вычисленные значения s близки к значениям, даваемым формулой (2.1), а при стремлении α к π еще более приближаются к ним. Однако случай $\alpha = \pi$ недостижим — касательные к графикам $\bar{\sigma}_r(\vartheta)$ и $\bar{\sigma}_\alpha(\vartheta)$ в точке $\vartheta = \pi$ становятся вертикальными (фиг. 4, г, где $m = 4, s = 1,8$), требуется искать асимптотику в виде, отличном от (1.7). При $m = 1, \alpha = \pi$ условия (1.12), (1.18), (1.19) и нормировка не позволяют выделить единственное решение.

При $\alpha = \pi/4$ все кривые фиг. 4, а пересекаются в одной точке $s = 2$; следовательно, как и в задаче 1, существует единый для всех m критический угол $\alpha^* = \pi/4$. Картина напряжений в этом случае изображена на фиг. 4, б. Интенсивность напряжений (кривая 1) постоянна и равна двум, уравнение (1.10) становится линейным, краевая задача решается точно: $\varphi = \sin 2\vartheta - 1$. Такой функции отвечает однородное поле напряжений — на площадках, перпендикулярных свободной грани клина и плоскости деформации, нормальные напряжения $\bar{\sigma}_n \equiv -4$, касательные $\bar{\sigma}_\tau \equiv 0$, на площадках, параллельных свободной поверхности, $\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_\tau = 0$. Положив в исходной задаче $m = 1, s = 2$, можно увидеть, что найденное программой значение критического угла минимально. На фиг. 4, в изображен случай $m = 13, s = 1,933$.

3. Для несжимаемого материала асимптотики искомых полей вблизи угловой точки можно построить следующим, отличным от изложенного

в п. 1 способом. Подставив два первых соотношения Коши (1.4) в условие несжимаемости, домножив на r и сгруппировав слагаемые, получим уравнение в частных производных первого порядка

$$(3.1) \quad (ru_r)_{,r} + u_{\vartheta, \vartheta} = 0$$

Не теряя в общности, можно удовлетворить ему, вводя в рассмотрение обычную функцию тока $\Psi(r, \vartheta)$, такую, что

$$(3.2) \quad u_{\vartheta} = -\Psi_{,r}, \quad u_r = r^{-1}\Psi_{,\vartheta}$$

Компоненты деформации выражаются через Ψ так:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= -\varepsilon_{\vartheta} = -r^{-2}\Psi_{,\vartheta} + r^{-1}\Psi_{,r} \\ \varepsilon_{r\vartheta} &= 1/2(-\Psi_{,rr} + r^{-1}\Psi_{,r} + r^{-2}\Psi_{,\vartheta\vartheta}) \\ \varepsilon_u &= [(r^{-1}\Psi_{,\vartheta r} - r^{-2}\Psi_{,\vartheta})^2 + 1/4(-\Psi_{,rr} + r^{-1}\Psi_{,r} + r^{-2}\Psi_{,\vartheta\vartheta})^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Перепишем уравнения равновесия (1.3), выделяя из операторов левой части девиаторную и шаровую составляющие

$$(3.4) \quad \begin{aligned} S_{,rr} + \frac{1}{r}S_{r\vartheta, \vartheta} + \frac{1}{r}(S_r - S_{\vartheta}) + \sigma_{,r} &\equiv B_1[S_{ij}] + \sigma_{,r} = 0 \\ S_{r\vartheta, r} + \frac{1}{r}S_{\vartheta, \vartheta} + \frac{2}{r}S_{r\vartheta} + \frac{1}{r}\sigma_{,\vartheta} &\equiv B_2[S_{ij}] + \frac{1}{r}\sigma_{,\vartheta} = 0 \end{aligned}$$

Дифференцируя первое уравнение (3.4) по ϑ , получим

$$(3.5) \quad \sigma_{,r\vartheta} = -B_{1,\vartheta} = -S_{r, r\vartheta} - \frac{1}{r}S_{r\vartheta, \vartheta\vartheta} - \frac{1}{r}(S_{r, \vartheta} - S_{\vartheta, \vartheta})$$

Умножая второе уравнение (3.4) на r , дифференцируя его по r и пользуясь (3.5), будем иметь

$$(3.6) \quad \begin{aligned} 0 &= B_2 + rB_{2,r} - B_{1,\vartheta} = 3S_{r\vartheta, r} + \\ &+ \frac{1}{r}S_{\vartheta, \vartheta} + rS_{r\vartheta, rr} + S_{\vartheta, \vartheta r} - S_{r, r\vartheta} - \frac{1}{r}S_{r\vartheta, \vartheta\vartheta} - \frac{1}{r}S_{r, \vartheta} \end{aligned}$$

Правая часть последнего уравнения содержит производные только от компонент девиатора напряжений, которые из определяющих соотношений (1.1), (1.2) выражаются через деформации, а те в свою очередь — через Ψ из (3.3). Таким образом, для нахождения всех неизвестных величин опять требуется отыскать только одну функцию из уравнения четвертого порядка при некоторых граничных условиях.

По аналогии с (1.7) будем искать функцию тока Ψ в виде

$$(3.7) \quad \Psi(r, \vartheta) = Pr^t\psi(\vartheta), \quad P, t = \text{const}$$

Тогда из (3.7), (3.2), (3.3) получим

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u_i &= Pr^{t-1}\bar{u}_i(\vartheta), \quad \bar{u}_r = \psi', \quad \bar{u}_{\vartheta} = -t\psi \\ \varepsilon_{ij} &= Pr^{t-2}\bar{\varepsilon}_{ij}(\vartheta), \quad \bar{\varepsilon}_r = -\bar{\varepsilon}_{\vartheta} = (t-1)\psi' \\ \bar{\varepsilon}_{r\vartheta} &= 1/2(\psi'' + t(2-t)\psi), \quad \bar{\varepsilon}_u = [(t-1)^2\psi'^2 + \\ &+ 1/4(\psi'' + t(2-t)\psi)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Разрешая (1.1) относительно напряжений и пользуясь (3.8), будем иметь

$$(3.9) \quad S_{ij} = K\varepsilon_u^{\mu-1}\varepsilon_{ij}, \quad \mu = m^{-1}, \quad K = A^{-\mu}$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} S_r &= -S_{\vartheta} = W(r, \vartheta)\bar{\varepsilon}_r, \quad S_{r\vartheta} = W\bar{\varepsilon}_{r\vartheta} \\ W(r, \vartheta) &\equiv KP^{\mu}r^{\mu(t-2)}\bar{\varepsilon}_u^{\mu-1} \end{aligned}$$

Замечая, что

$$(3.11) \quad \begin{aligned} W_{,r} &= r^{-1}\mu(t-2)W, & W_{,rr} &= r^{-2}\mu(t-2)[\mu(t-2)-1]W \\ W_{,\vartheta} &= \frac{1}{2}(\mu-1)E'E^{-1}W, & W_{,\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{2}(\mu-1)[E''E^{-1} + \\ &+ \frac{1}{2}(\mu-3)E'^2E^{-2}]W \\ W_{,r\vartheta} &= \frac{1}{2}r^{-1}\mu(\mu-1)(t-2)E'E^{-1}W, & E &\equiv \bar{\varepsilon}_u^2 = (t- \\ &- 1)^2\psi'^2 + \chi^2, & \chi &\equiv \bar{\varepsilon}_{r\vartheta} \end{aligned}$$

и вычисляя необходимые производные от компонент девиатора напряжений, а затем подставляя их в (3.6), получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $\psi(\vartheta)$, содержащее t как параметр

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \mu(t-2)[\mu(t-2)+2]\chi - \frac{1}{2}(\mu-1)[E''E^{-1} + \frac{1}{2}(\mu- \\ - 3)E'^2E^{-2}]\chi - \chi'(\mu-1)E'E^{-1} - \chi'' + (\mu-1)(1- \\ - t)E'E^{-1}\psi'(\mu(t-2)+1) + 2(1-t)(\mu(t-2)+1)\psi'' = 0 \end{aligned}$$

Не раскрывая обозначений, заметим, что ψ''' входит в (3.12) через E'' и χ'' .

Получим граничные условия. Проще всего это сделать для сцепленного штампа. В системе координат, жестко связанной со штампом, условия полного сцепления по грани $\vartheta = \alpha$ $u_r(r, \alpha) = 0$, $u_\vartheta(r, \alpha) = 0$ эквивалентны в силу (3.8) требованию

$$(3.13) \quad \psi(\alpha) = \psi'(\alpha) = 0$$

Если на грань $\vartheta = 0$ действует штамп с гладкой плоской подошвой, то условие $u_\vartheta(r, 0) = 0$ эквивалентно $\psi(0) = 0$, а требование $\sigma_{r\vartheta}(r, 0) = 0$ означает, что

$$(3.14) \quad \psi''(0) + t(2-t)\psi(0) = 0$$

В совокупности это дает

$$(3.15) \quad \psi(0) = \psi''(0) = 0$$

Несколько более сложным оказывается вывод следующего условия. Предположим, что приклеенная к грани $\vartheta = 0$ гибкая нерастяжимая накладка нагружена равномерным давлением $p = \text{const}$. Равенство $u_r(r, 0) = 0$ эквивалентно следующему: $\psi'(0) = 0$. Дифференцируя равенство $\sigma_\vartheta(r, 0) = p$, получим, что $\sigma_{\vartheta,r} \equiv S_{\vartheta,r} + \sigma_{,r} = 0$ при $\vartheta = 0$. Поскольку из (3.10) следует, что $S_{\vartheta,r} = r^{-1}\mu(t-2)(1-t)\psi'W$, а $\sigma_{,r}$ выражается через производные компонент девиатора напряжений из первого уравнения равновесия (3.4), то, пользуясь (3.10), (3.11), будем иметь

$$(3.16) \quad \psi'''(0) - \psi'(0)[4(\mu(t-2)+1)(1-t) - t(2-t)] = 0$$

Вместе с первым требованием это означает, что

$$(3.17) \quad \psi'''(0) = \psi'(0) = 0$$

Наконец, последнее условие. Грань клина $\vartheta = 0$ нагружена равномерным давлением: $\sigma_\vartheta(r, 0) = p$, $\sigma_{r\vartheta}(r, 0) = 0$. Это необходимо и достаточно для выполнения (3.14), (3.16).

Оценка t из энергетических соображений, аналогичных (1.11), приводит к неравенству

$$(3.18) \quad t > 2\mu/(\mu+1)$$

С точностью до переобозначений $\psi \mapsto \varphi$, $t \mapsto s$, $\mu \mapsto m$ условия (3.13), (3.15), (3.17), (3.14), (3.16) совпадают соответственно с (1.12), (1.16), (1.14), (1.18), (1.19). Точно так же уравнение (3.12) можно привести к виду (1.10)

с теми же переобозначениями. Изменится лишь смысл входящих во все формулы величин. Это позволяет сформулировать следующую аналогию.

Предположим, что решена краевая задача (1.10) с условиями (1.18), (1.19) в нуле и (1.12) при $\vartheta = \alpha$, т. е. найдена собственная функция $f(\vartheta)$ и собственное число z , удовлетворяющее (1.11). Тем самым фактически решены две механические задачи. Если трактовать f как угловую составляющую функции Эри ($f \equiv \varphi$, $z \equiv s$), то решена задача 3 п. 1: формулы (1.8), (1.9) полностью определяют напряженно-деформированное состояние вершины клина из материала, подчиняющегося закону $\epsilon_u = A\sigma_u^m$ при сцепленной грани $\vartheta = 0$ и свободной грани $\vartheta = \alpha$. Искомые поля, согласно (1.9), (1.8), (1.4), ведут себя так:

$$(3.19) \quad u_i \sim r^{m(s-2)+1}, \quad \epsilon_{ij} \sim r^{m(s-2)}, \quad \sigma_{ij} \sim r^{s-2}, \quad r \rightarrow 0$$

Если считать f угловой составляющей функции тока ($f \equiv \psi$, $z \equiv t$), то по формулам (3.8), (3.10) определяется локальное решение задачи о плоской деформации вершины клина из материала с зеркально-симметричной диаграммой

$$(3.20) \quad \epsilon_u = A\sigma_u^\mu, \quad \mu = m^{-1}$$

при свободной грани $\vartheta = 0$ и сцепленной грани $\vartheta = \alpha$. При этом

$$(3.21) \quad u_i \sim r^{t-1}, \quad \epsilon_{ij} \sim r^{t-2}, \quad \sigma_{ij} \sim r^{m(t-2)}, \quad r \rightarrow 0$$

С точностью до смены граней решена одна и та же задача для двух разных материалов.

Если решена краевая задача (1.10), (1.14), (1.12), то помимо задачи 1 п. 1 «гладкий штамп — свободная граница», решена и задача «накладка — сцепленный штамп» для материала (3.20). Краевая задача (1.10), (1.16), (1.12) отвечает как задаче 2 п. 1 «накладка — свободная граница», так и задаче «гладкий штамп — сцепленный штамп» для материала (3.20).

В частном случае упругого несжимаемого материала $m = \mu = 1$, определяющие соотношения (1.1) и (3.20), одинаковы. Уравнения (1.10) и (3.12) имеют один и тот же вид (обозначения п. 3)

$$(3.22) \quad \psi'''' + 2(t^2 - 2t + 2)\psi'' + t^2(2 - t)^2\psi = 0$$

Граничные условия попарно совпадают. Аналогия становится еще более полной.

Комбинируя по-разному условия названных четырех типов на разных гранях клина, можно получить десять различных задач. Три из них, изученные в пп. 1, 2, встречаются наиболее часто. То же относится к ограничению $m \geq 1$ на вид определяющих соотношений. Сформулированная аналогия позволяет вдвое уменьшить объем работы при исследовании общего случая для произвольного m . Еще более важно то, что подход, базирующийся на использовании функции тока, практически без изменений переносится на осесимметричные задачи о штампе и конусе. Построение асимптотики вблизи ребра решения осесимметричной задачи о штампе позволило бы, в частности, оценить влияние растяжения — сжатия близлежащих волокон, параллельных ребру, на локальные поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476—488.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
3. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 1—12.
4. Hutchinson J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 13—31.
5. Hutchinson J. W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 5. P. 337—347.
6. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 255 с.
7. Александров В. М., Сумбатян М. А. Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 107—113.
8. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М.: Наука. 1965. 856 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.VIII.1986