УДК 539.3 : 534.1

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ И ДАВЛЕНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

Рогачева Н. Н.

Показано, что для широкого класса задач теории оболочек вязкость жидкости можно учесть расчленив систему уравнений вязкой жидкости на две подсистемы, одна из которых, учитывающая вязкость, интегрируется в квадратурах, другая совпадает с уравнением Гельмгольца. В результате связанная задача для оболочки, контактирующей с жидкостью, сводится к интегрированию уравнений теории оболочек с некоторыми дополнительными членами совместно с уравнением Гельмгольца. Выяснено, что гидростатическое давление жидкости влияет лишь на резонансные частоты и амплитуды тех колебаний, которые удовлетворяют определенным, сформулированным ниже условиям.

1. Влияние вязкости жидкости и гидростатического давления для наглядности будем исследовать раздельно.

Введем криволинейную систему координат α_1, α_2, α_3 таким образом, чтобы координатные линии α_1 и α_2 совпадали на срединной поверхности оболочки $\alpha_3 = 0$ с линиями кривизны, α_3-линия им ортогональна. В дальнейшем с допустимой в теории оболочек погрешностью будем считать, что поверхность контакта оболочки с жидкостью совпадает со срединной поверхностью оболочки $\alpha_3 = 0$ и вблизи оболочки линии α_3 прямые.

Уравнения движения вязкой жидкости с отброшенными нелинейными членами имеют вид

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & p_k = -p - i2\mu\omega\nabla_k v_k + i\cdot{}^2/_3\mu\omega \operatorname{div} \mathbf{v} \\
& p_{kl} = -i\mu\omega(\nabla_k v_l + \nabla_l v_k) \\
& \nabla_k p = \rho_0\omega^2 v_k - i\mu\omega\Delta v_k - i\,{}^1/_3\mu\omega\nabla_k \operatorname{div} \mathbf{v} \\
& \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} + c_0^{-2} p = 0
\end{aligned}
$$

Здесь v_k — компоненты вектора перемещения частиц жидкости, p_k, p_{kl} — компоненты тензора напряжений, p — звуковое давление, μ — вязкость жидкости, ρ_0 — плотность жидкости, c_0 — скорость звука в жидкости. Считается, что колебания жидкости вызваны колебаниями оболочки, совершаемыми по закону $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота, Δ — оператор Лапласа в криволинейных координатах; обозначения $\nabla_k v_l$, $\nabla_k p$ расшифровываются следующими формулами:

$$
\nabla_k v_l = \frac{1}{H_k}\frac{\partial v_l}{\partial \alpha_k} - \frac{v_k}{H_l}\frac{\partial H_k}{\partial \alpha_l} + \delta_k{}^l \sum_{j=1}^{3} \frac{v_j}{H_j}\frac{\partial \ln H_l}{\partial \alpha_j}
$$

$$
\nabla_k p = \frac{1}{H_k}\frac{\partial p}{\partial \alpha_k}, \qquad \delta_k{}^l = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad H_3 = 1
$$

При асимптотическом анализе уравнений жидкости будем использовать малый параметр теории оболочек η, равный относительной полутолщине оболочки. Будем считать, что вблизи оболочки изменяемость искомых величин жидкости по координатам α_1, α_2 такая же, как и у искомых величин теории оболочек:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_n} = \frac{\eta^{-s}}{R} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \tag{1.2}$$

Индексы n, m всюду принимают значения $1, 2$, а индексы k, l — значения 1, 2, 3; R — характерный размер оболочки. Показатель изменяемости s найден таким образом, чтобы дифференцирование по безразмерным переменным ξ_i не приводило к существенному увеличению или уменьшению искомых функций.

Кроме того, введем безразмерный частотный параметр λ следующей формулой:

$$\omega^2 R^2 \rho_1 / E = \lambda \eta^{2r} \tag{1.3}$$

Степень $2r$ выбрана так, чтобы величина λ была соизмерима с единицей, ρ_1, E — плотность и модуль упругости оболочки.

На поверхности контакта оболочки с жидкостью должны удовлетворяться условия равенства вектора перемещений оболочки и жидкости:

$$v_n = u_n, \quad v_3 = -w \tag{1.4}$$

(u_n, w — перемещения оболочки). Используемые ниже уравнения и обозначения совпадают с принятыми в теории оболочек [1]. Для определенности будем считать, что жидкость находится вне оболочки.

2. Как показано ниже, поле перемещений и напряжений, описываемое системой уравнений движения жидкости (1.1), можно расчленить на два поля, описываемых более простыми системами уравнений.

Первое из этих полей условимся называть затухающим. Для колебаний такого вида перемещения частиц жидкости v_1, v_2, касательные к поверхности оболочки, существенно больше нормальных перемещений v_3. Эти колебания быстро затухают при удалении от оболочки. Для искомых величин квазитангенциальных колебаний жидкости следует принять следующую, не приводящую к противоречиям асимптотику:

$$\begin{gathered} v_n/R = \eta^0 v_{n*}, \qquad v_3/R = \eta^{a-s-r/2} v_{3*} \\ p_{n3}/(\rho_0 \omega^2 R^2) = \eta^{a-r/2} p_{n3*} \\ (p, p_{nm}, p_n, p_3)/(\rho_0 \omega^2 R^2) = \eta^{2a-s-r} (p_*, p_{nm*}, p_{n*}, p_{3*}) \\ \mu/(\rho_0 R c_1) = A\eta^{2a}, \quad c_1^2/c_0^2 = B\eta^{-2b}, \quad \alpha_3 = \eta^{a-r/2} R z \end{gathered} \tag{2.1}$$

Как принято в асимптотическом методе, показатели степени η определены так, чтобы безразмерные величины (со звездочками) были одного порядка. Числа A, B порядка единицы, c_1 — скорость звука в материале оболочки.

Выполним замену переменных (1.2), подставим (2.1), (1.3) в (1.1), в результате получим уравнения

$$\begin{aligned} &\eta^{2a-2s-r} \nabla_{n*} p_* = v_{n*} - i (A/\sqrt{\lambda}) [\partial^2 v_{n*}/\partial z^2 + \\ &+ \eta^{2a-2s-r} \nabla_{12*} v_{n*}] + iAB \sqrt{\lambda} \eta^{2a-2b-r} p_*/3 \\ &p_{n3*} = -i (\partial v_{n*}/\partial z + \eta^{2a-2s-r} \nabla_{n*} v_{3*}) \\ &\partial v_{3*}/\partial z = -\nabla_1 v_{1*} - \nabla_2 v_{2*} - \lambda B \eta^{2a-2b+r} p_* \\ &\partial p_*/\partial z = v_{3*} - i (A/\sqrt{\lambda}) [\partial^2 v_{3*}/\partial z^2 + \eta^{2a-2s-r} \nabla_{12*} v_{3*}] + \\ &+ iA \sqrt{\lambda} B \eta^{2a-2b+r} \partial p_*/\partial z \\ &p_{nm*} = -i (A/\sqrt{\lambda}) (\nabla_{n*} v_{m*} + \nabla_{m*} v_{n*}) \\ &p_{n*} = -p_* - 2i (A/\sqrt{\lambda}) \nabla_{n*} v_{n*} - 2iAB \sqrt{\lambda} \eta^{2a-2b-r} p_*/3 \\ &p_{3*} = -p_* - 2i (A/\sqrt{\lambda}) \partial v_{3*}/\partial z - 2iAB \sqrt{\lambda} \eta^{2a-2b-r} p_*/3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\nabla_{n*}v_{m*}=\frac{1}{H_n}\frac{\partial v_{n*}}{\partial \xi_n}-R\eta^s\frac{1}{H_m}\frac{\partial H_n}{\partial \alpha_m}+R\eta^s\delta_n{}^m\sum_{j=1}^{3}\frac{v_j}{H_j}\frac{\partial \ln H_n}{\partial \alpha_j}$$

$$\nabla_{12*}=\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)\right]$$

$$\nabla_{n*}p_*=\frac{1}{H_n}\frac{\partial p_*}{\partial \xi_n}$$

Отбрасывая малые члены порядка $(\eta^{2a-2s-r}+\eta^{2a-2b+r})$, получим упрощенную систему уравнений, в которой искомые величины отметим верхним индексом (1):

$$\frac{\partial^2 v_n^{(1)}}{\partial \alpha_3{}^2}+i\frac{\rho_0\omega}{\mu}v_n^{(1)}=0 \tag{2.3}$$

$$p_{n3}^{(1)}=-i\mu\omega\frac{\partial v_n^{(1)}}{\partial \alpha_3},\qquad \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \alpha_3}=-\nabla_1 v_1^{(1)}-\nabla_2 v_2^{(1)}$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \alpha_3}=\rho_0\omega^2 v_3^{(1)}-i\mu\omega\frac{\partial^2 v_3^{(1)}}{\partial \alpha_3},\qquad p_{nm}^{(1)}=-i\mu\omega(\nabla_n v_m^{(1)}+\nabla_m v_n^{(1)})$$

$$p_n^{(1)}=-p^{(1)}-2i\mu\omega\nabla_n v_n^{(1)},\qquad p_3^{(1)}=-p^{(1)}-2i\mu\omega\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \alpha_3}$$

Отметим, что с принятой точностью для квазитангенциальных колебаний жидкость можно считать несжимаемой.

Решение уравнений (2.3) имеет следующий вид (приведем только те величины, которые потребуются в дальнейшем):

$$v_n^{(1)}=f_n e^{(i-1)\delta\alpha_3},\qquad p_{n3}^{(1)}=(1+i)\,\mu\omega\delta f_n e^{(i-1)\delta\alpha_3} \tag{2.4}$$

$$v_3^{(1)}=\frac{1+i}{2\delta}e^{(i-1)\delta\alpha_3}(\nabla_1 f_1+\nabla_2 f_2),\qquad \delta=\frac{\rho_0\omega}{2\mu}$$

Здесь f_n — произвольные функции, которые позволяют удовлетворить условиям равенства тангенциальных перемещений оболочки и жидкости на поверхности контакта.

Для уточнения искомых величин затухающего решения можно построить итерационный процесс. После того как найдено первое приближение, величины следующего, второго приближения, найдем из системы

$$\frac{\partial^2 v_n^{(2)}}{\partial \alpha_3{}^2}+i\frac{\rho_0\omega}{\mu}v_n^{(2)}=-\frac{i}{\mu\omega}\nabla_n p^{(1)}+\frac{1}{3}\nabla_n \operatorname{div} v^{(1)}-\nabla_{12}v_n^{(1)} \tag{2.5}$$

$$p_{n3}^{(2)}+i\mu\omega\frac{\partial v_n^{(2)}}{\partial \alpha_3}=-i\mu\omega\nabla_n v_3^{(1)}$$

$$\frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial \alpha_3}+\nabla_1 v_1^{(2)}+\nabla_2 v_2^{(2)}=-\frac{1}{\rho_0 c_0{}^2}p^{(1)}$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \alpha_3}-\rho_0\omega^2 v_3^{(2)}+i\mu\omega\frac{\partial^2 v_3^{(2)}}{\partial \alpha_3{}^2}=-i\mu\omega\nabla_{12}v_3^{(1)}+\frac{\mu\omega^2}{3\rho_0 c_0{}^2}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \alpha_3}$$

$$p_{nm}^{(2)}+i\mu\omega(\nabla_n v_m^{(2)}+\nabla_m v_n^{(2)})=0$$

$$p_n^{(2)}+p^{(2)}+2i\mu\omega\nabla_n v_n^{(2)}=-i\frac{2\mu\omega}{3\rho_0 c_0{}^2}p^{(1)}$$

$$p_3^{(2)}+p^{(2)}+2i\mu\omega\frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial \alpha_3}=-i\frac{2\mu\omega}{3\rho_0 c_0{}^2}p^{(1)}$$

$$\nabla_{12}=\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\right)\right]$$

Формулы (2.5) имеют такую же структуру, как и (2.3), в том смысле, что последующее приближение отличается от предыдущего лишь членами с низкими индексами, т. е. известными свободными членами.

Второе из полей, составляющих общее поле перемещений и напряжений жидкости, должно удовлетворять условию равенства нормальных к поверхности контакта перемещений. Условимся его называть проникающим. Введем для него потенциал жидкости φ следующими формулами:

$$v_n = -\frac{1}{H_n}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}, \quad v_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_3}, \quad p = -\rho_0\omega^2\varphi + \frac{4}{3}i\mu\omega\Delta\varphi \tag{2.6}$$

Асимптотика главных искомых величин проникающих колебаний жидкости совпадает с приведенной в [2] асимптотикой для идеальной жидкости. Выпишем асимптотическое представление искомых величин жидкости

$$\begin{gathered}\varphi/R^2 = \eta^q\varphi_*, \quad v_n/R = \eta^{q-s}v_{n*}, \quad v_3/R = \eta^0 v_{3*} \\ (p, p_n, p_3)/(\rho_0\omega^2R^2) = \eta^q(p_*, p_{n*}, p_{3*}) \\ p_{n3}/(\rho_0\omega^2R^2) = \eta^{2a-r-s}p_{n3*}, \quad p_{nm}/(\rho_0\omega^2R^2) = \eta^{2a-2s-r+q}p_{nm*} \\ \alpha_3 = \eta^q Rz, \quad q = \max(s,\ b-r)\end{gathered} \tag{2.7}$$

С учетом формул (2.6), (2.7) уравнения (1.1) можно записать в асимптотическом виде. Члены, учитывающие вязкость в уравнениях проникающих колебаний жидкости $O(\eta^{2a-2s-r} + \eta^{2a-2b+r})$ по сравнению с главными членами, а в уравнениях затухающих колебаний жидкости они гораздо больше — $O(\eta^{a-r/2} + \eta^{a-s-r/2})$, поэтому в первом приближении следует сохранить вязкость только в уравнениях затухающих колебаний жидкости. В этом случае проникающие колебания жидкости в первом приближении будут описываться уравнением Гельмгольца для идеальной жидкости

$$\begin{gathered}\Delta\varphi^{(1)} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\varphi^{(1)} = 0, \quad v_n^{(1)} = -\nabla_n\varphi^{(1)}, \quad v_3^{(1)} = -\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\alpha_3} \\ p^{(1)} = -\omega^2\rho_0\varphi^{(1)}, \quad p_k^{(1)} = p^{(1)}, \quad p_{n3}^{(1)} = 0\end{gathered} \tag{2.8}$$

Уточненные искомые величины второго приближения можно определить из следующей рекуррентной системы, в правых частях которой стоят известные величины, найденные из (2.8):

$$\begin{gathered}\Delta\varphi^{(2)} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\varphi^{(2)} = -i\frac{4\mu\omega^3}{3\rho_0c_0^4}\varphi^{(1)} \\ p^{(2)} + \rho_0\omega^2\varphi^{(2)} = i\frac{4}{3}\mu\omega\Delta\varphi^{(1)} \\ v_n^{(2)} + \frac{1}{H_n}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial\alpha_n} = 0, \quad v_3^{(2)} + \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial\alpha_3} = 0 \\ p_k^{(2)} + p^{(2)} = -i\cdot 2\mu\omega\nabla_k v_k^{(1)} + i\frac{2}{3}\mu\omega\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^{(1)} \\ p_{kl}^{(2)} + i\mu\omega(\nabla_k v_l^{(2)} + \nabla_l v_k^{(2)}) = 0\end{gathered}$$

3. Выпишем полную систему уравнений, описывающую движение оболочки, контактирующей с вязкой жидкостью. Для описания движения жидкости будем использовать предложенный в п. 2 способ расчленения полного поля напряжений и перемещений жидкости на два составляющих поля, используя упрощенные формулы, полученные выше.

Уравнения равновесия оболочки

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_n}\frac{\partial T_n}{\partial\alpha_n} - \frac{1}{A_m}\frac{\partial S_m}{\partial\alpha_m} + k_m(T_n - T_m) + k_n(S_n - S_m) - \\ -\frac{N_n}{R_n} + 2h\rho_1\omega^2u_n + p_{n3}|_{\alpha_3=\alpha_{30}} + X_n = 0 \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial\alpha_2} + k_2N_1 + k_1N_2 + 2h\rho_1\omega^2w + \\ + \rho_0\omega^2\varphi|_{\alpha_3=\alpha_{30}} + Z = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{A_n}\frac{\partial G_n}{\partial \alpha_n} + \frac{1}{A_m}\frac{\partial H_m}{\partial \alpha_m} + k_m(G_n - G_m) - k_n(H_n - H_m) - N_n = 0$$

$$k_n = \frac{1}{A_n A_m}\frac{\partial A_n}{\partial \alpha_m}$$

Условия непротекания

$$(3.2) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3} + v_3\right)\Big|_{\alpha_3=\alpha_{30}} = -w$$

Здесь p_{n3}, v_3 определяются по формулам

$$p_{n3}\,|_{\alpha_3=\alpha_{30}} = (1+i)\,\mu\omega\left(u_n + \frac{1}{A_n}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}\right)$$

$$v_3\,|_{\alpha_3=\alpha_{30}} = \frac{1+i}{2\delta}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(u_j + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j}\right)$$

Чтобы получить замкнутую систему, к уравнениям (3.1), (3.2) следует добавить уравнение Гельмгольца (2.8), соотношения упругости и формулы деформации — перемещения [1].

Исследуя эту систему асимптотическим методом, можно показать, что наибольший вклад вязкость жидкости, как и следует ожидать, вносит в квазитангенциальные колебания оболочки. В этом случае члены, учитывающие вязкость, имеют порядок $(\eta^{a+d-1+s/2} + \eta^{a+d-1+b-s/2})$ при $s \leqslant 1 - d - b$ и $O(\eta^{a+d-1+s/2} + \eta^{a-3s/2})$ при $s > 1 - d - b$ по сравнению с главными членами, где d определяется из следующей формулы: $\rho_1/\rho_0 = \eta^{-d}$.

Для примера найдем резонансные частоты круговой цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью. Будем считать, что оболочка длиной L ($L/R = l$) радиусом R и толщиной $2h$ совершает осесимметричные квазитангенциальные колебания. Если жидкость идеальная, то собственные частоты квазитангенциальных колебаний оболочки приближенно равны собственным частотам колебаний оболочки без жидкости. Уравнение осесимметричных продольных колебаний в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{R^2}\frac{d^2u}{d\xi^2} + \lambda u = 0, \quad \lambda = \frac{\omega^2\rho_1 R^2}{E}$$

(u — продольное перемещение, ξ — продольная координата).

Для вязкой жидкости в рассматриваемом случае из (3.1) получим предыдущее уравнение, в котором

$$\lambda = \frac{\omega^2\rho_1 R^2}{E}(1 + \delta + i\delta), \quad \delta = \frac{1}{2h\rho_1}\sqrt{\frac{\rho_0\mu}{2\omega}}$$

Результаты вычислений безразмерных величин $\omega_* = \omega 2lR\sqrt{\rho_1/E}/\pi$, пропорциональных собственным частотам ω, приведены в табл. 1: а) для стальной оболочки без жидкости (они приближенно равны собственным частотам оболочки, заполненной жидкостью); б) для оболочки, контактирующей с водой при 0° C ($\mu = 0{,}0017$ кг/м с, $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3); в) для оболочки, контактирующей с глицерином при 3° C ($\mu = 4{,}2$ кг/м с, $\rho_0 = 1{,}265$ кг/м^3).

4. Проведем исследование влияния гидростатического давления на колебания оболочки в жидкости. Было показано [3], что предварительная статическая нагрузка влияет на свободные колебания оболочки в вакууме только в том случае, когда: а) значение статической нагрузки одного порядка с критической нагрузкой (т. е. нагрузкой, которая в рамках линейной теории вызывает потерю устойчивости); б) форма колебаний оболочки должна быть похожа на форму потери устойчивости под действием данной статической нагрузки.

Таблица 1

а	б		в	
	$h = 5$ мм	1 мм	5 мм	1 мм
5	$4{,}98 - i0{,}0186$	$4{,}91 - i0{,}0903$	$4{,}03 - i0{,}677$	$2{,}07 - i0{,}898$
25	$24{,}9 - i0{,}0418$	$24{,}8 - i0{,}206$	$22{,}7 - i1{,}90$	$15{,}7 - i4{,}68$
45	$44{,}9 - i0{,}0561$	$44{,}7 - i0{,}278$	$42{,}0 - i2{,}67$	$31{,}5 - i7{,}78$

Таблица 2

$\frac{p_0}{p}$	$l = 20$, $n = 2$	2, 6	1, 9	1, 20
1,5	0,737	0,600	0,650	0,918
2	0,815	0,725	0,753	0,938
3	0,880	0,826	0,846	0,960

Эти выводы сохраняют силу для колеблющейся в жидкости оболочки, на которую действует гидростатическое давление.

Справедливость сформулированного выше правила подтверждается численным расчетом, выполненным для круговой цилиндрической оболочки, погруженной в воду. Оболочка совершает вынужденные колебания под действием нормальной динамической поверхностной нагрузки, меняющейся по закону $A \cos n\beta \sin (m\pi\xi/l)\, e^{-i\omega t}$ (β — окружная координата, ξ — продольная). Относительная толщина оболочки 0,01, радиус $R = 1$ м, длина $L = lR$.

Исходные уравнения системы оболочка — жидкость отличаются от приведенных в [4] только членом, учитывающим гидростатическое давление, входящим в третье уравнение равновесия теории оболочек и равным $T_\beta^{(s)}\varkappa_2$, где $T_\beta^{(s)}$ определяется из решения статической задачи (цилиндрическая оболочка под действием гидростатического давления), $\varkappa_2$ — деформация изгиба β-линий. Считаем, что оболочка шарнирно оперта и заключена в жесткий экран.

Для определения давления дальнего звукового поля воспользуемся обычным методом решения этой задачи (см., например, [4]): по продольной координате ξ выполним интегральное преобразование Фурье, в результате чего для оболочки получим систему уравнений с постоянными коэффициентами, а для жидкости — уравнение Бесселя. Звуковое давление вдали от оболочки найдем применяя к решению обратное преобразование Фурье и вычисляя полученный интеграл методом стационарной фазы.

Будем сравнивать резонансные частоты, найденные для оболочек без учета гидростатического давления (обозначим их ω_0) и с учетом гидростатического давления (обозначим соответствующие резонансные частоты ω_p).

Отношения ω_p/ω_0 для разных значений p_0/p, l, n сведены в табл. 2 (p — действующее на оболочку гидростатическое давление, p_0 — критическое давление). Форме потери устойчивости соответствует $m = 1$, значение n зависит при фиксированной толщине и радиусе от длины оболочки [5]. В первых трех столбцах табл. 2 приведены числа, характеризующие колебания, по форме совпадающие с формой потери устойчивости, поэтому и резонансные частоты для случая, когда гидростатическое давление в 1,5 раза меньше критического, понизились на 30—40% по сравнению с резонансными частотами, найденными без учета гидростатического давления. В четвертом столбце приведены аналогичные данные для оболочки, форма колебаний которой отлична от формы потери устойчивости, поэтому влияние гидростатического давления незначительно.

Итак, предложен метод расчленения, позволяющий для вязкой жидкости, взаимодействующей с упругой оболочкой, существенно упростить интегрирование уравнений (1.1). Метод не пригоден лишь в тех случаях, когда некоторый множитель, зависящий от свойств материала оболочки и жидкости, соизмерим с единицей. Это имеет место только для оболочек с малым модулем упругости и жидкости с большой вязкостью. Показано, что для оболочек, погруженных в жидкость, можно, не решая задачу, указать порядок величины гидростатического давления, влияющего на определенные формы колебания оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
2. *Радовинский А. Л.* Классификация свободных колебаний оболочек, содержащих жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 124—135.
3. *Рогачева Н. Н.* Влияние статического напряженного состояния на свободные колебания оболочки // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 200—206.
4. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. 348 с.
5. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. / Под ред. Биргера И. А. Пановко Я. Г. М.: Машиностроение. 1968. 567 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1986