

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КРУЧЕНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Кунец Я. И.

Методом сращиваемых асимптотических разложений (САР) [1—3] исследуется напряженно-деформированное состояние упругого изотропного пространства с тонким инородным дискообразным включением, край которого имеет форму угла малого раскрытия. Упругая система находится в состоянии осесимметричного кручения. Получены главные члены асимптотических разложений решения задачи по малому параметру, характеризующему относительную толщину неоднородности.

1. Постановка задачи и метод решения. Пусть в упругом изотропном пространстве содержится тонкое дискообразное включение, занимающее область

$$W_\varepsilon = \{(r; z): r \in [0; 1]; \varepsilon f_2(r) \leq z \leq \varepsilon f_1(r)\}; f_2(r) \leq f_1(r) \\ |f_i(r)| < C, |f_i'(r)| < C, C = \text{const}, 0 \leq r \leq 1, i = 1, 2$$

(r, θ, z — безразмерные цилиндрические координаты, $f_i(r)$ — достаточно гладкие функции при $0 \leq r < 1$, ε — малый положительный безразмерный параметр). Край включения имеет вид угла малого раскрытия, так что

$$(1.1) \quad f_i(r) = b_i(1-r) + o(1-r), r \rightarrow 1-0, i = 1, 2; b_i = \text{const.} \\ \varepsilon g(r) = \varepsilon [f_1(r) - f_2(r)] = \varepsilon b(1-r) + o(1-r), r \rightarrow 1-0 \\ b = b_1 - b_2$$

($\varepsilon g(r)$ — переменная толщина включения).

При осесимметричном кручении отличная от нуля компонента вектора смещений в упругом теле — тангенциальное смещение — удовлетворяет уравнению [4]

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + Lu_\theta = 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \\ u_\theta(r, z) = \begin{cases} u_\theta^i(r, z) + u_*(r, z), & (r, z) \in \Omega_\varepsilon, \quad (-1)^i z \leq 0 \\ u_\theta^0(r, z), & (r, z) \in W_\varepsilon \end{cases} \\ u_\theta^i(r, z) \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad i = 1, 2$$

Здесь Ω_ε — область тела вне включения, $u_*(r, z)$ — известные тангенциальные смещения в теле, когда упругие свойства материалов матрицы и включения одинаковы.

Условия сопряжения на границе раздела материалов запишем следующим образом (предполагается непрерывность смещений и напряжений при переходе через поверхность раздела):

$$(1.3) \quad u_\theta^i + u_* = u_\theta^0, \quad T_n(u_\theta^i + u_* - \gamma u_\theta^0) = 0, \quad z = \varepsilon f_i(r) \\ 0 \leq r < 1, i = 1, 2; \gamma = \mu_0/\mu$$

$$(1.4) \quad u_\theta^1 = u_\theta^2, \quad \frac{\partial}{\partial z} u_\theta^1 = \frac{\partial}{\partial z} u_\theta^2, \quad z = 0, \quad r > 1$$

$$(1.5) \quad T_n(u) = \cos(r, n) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \cos(z, n) \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\cos(z, n) = (-1)^{i+1} + o(1),$$

$$\cos(r, n) = (-1)^{i+1} \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} f_i(r) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

где μ_0 и μ — модули сдвига материалов включения и матрицы соответственно, $\cos(r, n)$ и $\cos(z, n)$ — косинусы углов между внешней нормалью к контуру включения и осями r и z .

Далее при помощи метода САР [1—3] отыскиваются главные члены асимптотик напряженно-деформируемого состояния композита, которые, как правило, представляют наибольший интерес для приложений. Оказывается, что единообразно описать решение при различных значениях параметра $\gamma = \mu_0/\mu$ ($0 \leq \gamma < \infty$) не удастся. Поэтому здесь предлагается провести раздельное исследование задачи для трех диапазонов изменения параметра γ :

$$(1.6) \quad 1) \sqrt{\varepsilon} \leq \gamma \leq 1/\sqrt{\varepsilon}, \quad 2) 0 \leq \gamma \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad 3) 1/\sqrt{\varepsilon} \leq \gamma < \infty$$

В каждом диапазоне строятся свои внешние и внутренние асимптотические разложения. Будет показано, что существуют области значений γ , в которых решения для соседних диапазонов перекрываются с определенной степенью точности. Заметим, что разбиение (1.6) условно; его можно осуществить и другим способом.

2. Построение внешнего асимптотического разложения. Внешнее формальное разложение решения поставленной задачи описывает напряженно-деформированное состояние во всем композите, за исключением малой окрестности края включения, размер которой указан ниже. Представим это разложение в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_\theta^i(r, z) &= u_{j_0}^i(r, z) + \varepsilon u_{j_1}^i(r, z) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \\ u_\theta^0(r, z) &= u_{j_0}^0(r, z_*) + \varepsilon u_{j_1}^0(r, z_*) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad z = \varepsilon z_* \end{aligned}$$

($j = 1, 2, 3$ — индекс, указывающий на диапазон параметра γ из (1.6)).

При описании решения в области включения воспользуемся переменными r и $z_* = z/\varepsilon$. Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} u_\theta^0 + \varepsilon^2 L u_\theta^0 = 0, \quad (r, z_*) \in W_\varepsilon$$

Подставляя (2.1) в (1.2) и (2.2) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , для двух первых приближений получаем

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_{jk}^i + L u_{jk}^i = 0; \quad u_{jk}^i \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad i = 1, 2$$

$$(2.4) \quad u_{jk}^1 = u_{jk}^2, \quad \frac{\partial}{\partial z} u_{jk}^1 = \frac{\partial}{\partial z} u_{jk}^2, \quad z = 0, \quad r > 1; \quad j = 1, 2, 3$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} u_{j_0}^0 = \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} u_{j_1}^0 = \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} u_{j_2}^0 + L u_{j_0}^0 = 0, \quad (r, z_*) \in W_\varepsilon$$

Из (2.5) имеем ($A_{jk}(r)$, $B_{jk}(r)$ — неизвестные функции)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_{jk}^0 &= z_* A_{jk}(r) + B_{jk}(r) \quad (k = 0, 1), \quad u_{j_2}^0 = z_* A_{j_2}(r) + B_{j_2}(r) - \\ &- \frac{1}{6} z_*^2 L [z_* A_{j_0}(r) + 3B_{j_0}(r)], \quad (r, z_*) \in W_\varepsilon, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Дальнейшее изложение проведем для каждого диапазона изменения параметра γ из (1.6) отдельно.

Рассмотрим диапазон *I*. Предположим сначала, что

$$(2.7) \quad \gamma = O(1), \quad 1/\gamma = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Записывая условия сопряжения (1.3) для рядов (2.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , с учетом (1.5), (2.6), (2.7) по-

лучаем следующие условия сопряжения [5]:

$$(2.8) \quad u_{10}^1 = u_{10}^2, \quad \frac{\partial}{\partial z} u_{10}^1 = \frac{\partial}{\partial z} u_{10}^2, \quad z=0, \quad r < 1$$

$$(2.9) \quad u_{11}^1 - u_{11}^2 = 2\psi_2(r), \quad \frac{\partial}{\partial z} u_{11}^1 - \frac{\partial}{\partial z} u_{11}^2 = 2\psi_1(r), \quad 0 \leq r < 1, \quad z=0$$

$$\psi_1(r) = (1 - \gamma) \frac{\partial}{2r^2 \partial r} \left[r^3 g(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_*(r, 0) \right) \right]$$

$$\psi_2(r) = \frac{1 - \gamma}{2\gamma} g(r) \frac{\partial}{\partial z} u_*(r, 0)$$

$$(2.10) \quad A_{10}(r) = 0, \quad B_{10}(r) = u_*(r, 0), \quad A_{11}(r) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} u_*(r, 0)$$

$$B_{11}(r) = u_{11}^1(r, 0) + f_1(r) \left[\frac{\partial}{\partial z} u_*(r, 0) - A_{11}(r) \right]$$

Соотношения (2.3), (2.4), (2.6), (2.8)–(2.10) полностью определяют главный член внешнего разложения (2.1), полученного при условии (2.7). Можно показать, используя результаты из [2, 3, 6], что построенные асимптотические разложения тангенциальных смещений имеют вид

$$(2.11) \quad u_\theta^i(r, z) = \varepsilon u_{11}^i(r, z) + O(\varepsilon^2 \gamma^2) + O(\varepsilon^2 / \gamma^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2$$

$$u_\theta^0(r, z) = u_{10}^0(r, z_*) + \varepsilon u_{11}^0(r, z_*) + O(\varepsilon^2 \gamma^2) + O(\varepsilon^2 / \gamma^2)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

Из приведенных оценок, а также из (2.9), (2.10) видно, что представления (2.11) справедливы при всех значениях γ в диапазоне 1 из (1.6) и перестают быть пригодными при $\gamma < C\varepsilon$ или $\gamma > C/\varepsilon$, $C = \text{const}$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому дополнительно рассматриваются диапазоны 2 и 3 изменения параметра γ из (1.6), в которых модуль сдвига включения значительно отличается от модуля сдвига среды.

Условия сопряжения для определения главных членов внешних асимптотических разложений в случаях, когда упругие свойства материалов включения и матрицы существенно различаются, находятся так же, как и соотношения (2.8)–(2.10), только вместо (2.7) предполагается, что в диапазоне 2 $\gamma = \mu_0/\mu \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, а в диапазоне 3 $\gamma \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Упомянутые условия сопряжения имеют вид

$$(2.12) \quad 2\gamma_2(u_{20}^1 - u_{20}^2) = g(r) \frac{\partial}{\partial z} (u_{20}^1 + u_{20}^2 + 2u_*)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_{20}^1 = \frac{\partial}{\partial z} u_{20}^2, \quad 0 \leq r < 1, \quad z=0, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

$$(2.13) \quad u_{20}^0(r, z_*) = g^{-1}(r) [u_{20}^1(r, 0) - u_{20}^2(r, 0)] [z_* - f_1(r)] + u_{20}^1(r, 0) + u_*(r, 0), \quad (r, z_*) \in W_\varepsilon$$

$$(2.14) \quad \frac{\partial}{\partial z} u_{30}^1(r, 0) - \frac{\partial}{\partial z} u_{30}^2(r, 0) =$$

$$= -\gamma_3 \frac{\partial}{2r^2 \partial r} \times \left[g(r) r^3 \frac{\partial}{\partial r} (u_{30}^1 + u_{30}^2 + 2u_*) \right]$$

$$u_{30}^1 = u_{30}^2, \quad 0 \leq r < 1, \quad z=0, \quad \gamma_3 = \varepsilon\gamma$$

$$(2.15) \quad u_{30}^0(r, z_*) = u_{30}^1(r, 0) + u_*(r, 0), \quad (r, z_*) \in W_\varepsilon$$

Соотношения (2.3), (2.4), (2.12)–(2.15) полностью определяют главные члены u_{20}^i и u_{30}^i внешних разложений в диапазонах 2 и 3.

Асимптотический анализ пространственных задач теории упругости, аналогичных рассматриваемой, для тел, содержащих более податливые или более жесткие, чем основная среда, тонкие упругие включения, проводился, например, в [6–8]. Соотношения (2.12), (2.14) совпадают с условиями, полученными иным способом [6, 7], если их записать в форме, соответствующей случаю кручения изотропного упругого тела. Ука-

жем, что упомянутые выше соотношения эквивалентны аналогичным условиям, использованным в [9—11]. В работах [12—14] приведены разные модели тонких включений в упругой среде для плоской задачи теории упругости.

Следуя [2, 3, 6], можно показать, что вне некоторой малой окрестности конца включения справедливы оценки

$$(2.16) \quad \begin{aligned} u_{\theta}^i(r, z) &= u_{20}^i(r, z) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0 \\ u_{\theta}^i(r, z) &= u_{30}^i(r, z) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad 1/\gamma \rightarrow 0 \\ (u_{j0}^i(r, z) &= O(1/\kappa_j), \quad 1/\kappa_j \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 2, 3; \quad \kappa_2 = 2\gamma_2, \\ &\kappa_3 = 2/\gamma_3) \end{aligned}$$

где параметры γ_j определены согласно соотношениям (2.12), (2.14). Из приведенных оценок следует, что представления (2.16) теряют асимптотический характер, когда $\gamma = O(1)$, $1/\gamma = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. На основе (2.11), (2.16) убеждаемся в существовании областей изменения параметра γ , в которых решения, полученные в соседних диапазонах (1.6), перекрываются. Видно также, что разбиение на диапазоны можно провести и другими способами.

Полученные внешние представления не описывают решения рассматриваемой задачи в малой окрестности конца включения. По аналогии с [1] можно показать, что размер этой области определяется порядком $\exp(-C/\varepsilon)$, где $C = \text{const}$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Для уточнения напряженно-деформированного состояния в указанной окрестности несколько позже построим внутреннее асимптотическое разложение.

3. Решение внешних задач. Перейдем к решению внешних задач, т. е. к определению функций u_{j0}^i , u_{j1}^j ($j = 1, 2, 3$; $i = 1, 2$).

При помощи преобразования Ганкеля [15] из соотношений (2.3), (2.4), (2.8), (2.9) определяем

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{10}^i(r, z) &\equiv 0, \quad r \geq 0, \quad |z| \geq 0, \quad i = 1, 2; \quad u_{11}^1(r, z) = \sum_{n=1}^2 \kappa_n^1 \times \\ &\times \int_0^1 \psi_n(t) K_n(t, r, z) dt; \quad K_n(t, r, z) = \\ &= \int_0^{\infty} \eta^{n-1} J_1(\eta t) J_1(\eta r) e^{-\eta|z|} d\eta, \quad n = 1, 2 \end{aligned}$$

($\psi_i(t)$ ($i = 1, 2$) — функции в соотношениях (2.9); $\kappa_1^i = -1$, $\kappa_2^i = (-1)^{i+1}$).

При этом из результатов [7, 16] следует, что вблизи края включения

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_* + u_1 &\infty D_0 + \varepsilon D_{10} + \rho (C_1 \sin \varphi + D_1 \cos \varphi) + \varepsilon \psi(\rho, \varphi), \\ \rho &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \psi = O(\rho \ln \rho); \quad D_{10} = \int_0^1 \psi_1(t) K_2(t, 1, 0) dt$$

$$u_1(r, z) = \varepsilon u_{11}^1(r, z), \quad z \geq 0; \quad u_1(r, z) = \varepsilon u_{11}^2(r, z), \quad z \leq 0$$

$$1 - r = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi$$

$$(3.3) \quad u_*(\rho, \varphi) \infty D_0 + \rho (C_1 \sin \varphi + D_1 \cos \varphi) + \dots, \quad \rho \rightarrow 0$$

(ρ, φ — полярные координаты, D_0, C_1, D_1 — известные коэффициенты).

Функции $u_{20}^i(r, z)$, $u_{30}^i(r, z)$ определяются из соотношений (2.3), (2.4), (2.12), (2.14). Аналогичные задачи рассматривались, например,

в [10, 11, 17, 18]. Используя преобразование Ганкеля, запишем

$$(3.4) \quad u_{j0}^i(r, z) = (-1)^k \int_0^1 t \varphi_j(t) K_n(t, r, z) dt, \quad k = (i+1)\delta_n^3; \quad n = j+1$$

$$j = 2, 3; \quad i = 1, 2; \quad K_4(t, r, z) = \int_0^\infty \eta J_2(\eta t) J_2(\eta r) e^{-\eta|z|} d\eta$$

$$2\varphi_2(t) = u_{20}^1(t, 0) - u_{20}^2(t, 0), \quad 2\varphi_3(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t t^2 \tau(t) dt$$

$$\tau(t) = -\frac{\partial}{\partial z} [u_{30}^1(t, 0) - u_{30}^2(t, 0)], \quad 0 \leq t < 1; \quad K_3(t, r, z) =$$

$$= K_2(t, r, z)$$

где ядро $K_2(t, r, z)$ описано в соотношениях (3.1), δ_j^i — символ Кронекера.

На функции $\varphi_j(t)$ налагаются условия

$$(3.5) \quad \varphi_2(1) = 0, \quad \varphi_3(1) = 0$$

Механический смысл первого из них состоит в том, что смещения в конце включения должны быть непрерывными, а второго — в том, что крутящий момент усилий, приложенных к включению, равен нулю.

Для определения $\varphi_j(t)$ ($j = 2, 3$) из (2.12), (2.14) получаем интегральные уравнения

$$(3.6) \quad \kappa_j \varphi_j(r) + g(r) \int_0^1 t \varphi_j(t) K_j^*(t, r) dt = f_j^*(r), \quad 0 \leq r < 1, \quad j = 2, 3$$

$$K_j^*(t, r) = \int_0^\infty \eta^2 J_k(\eta t) J_k(\eta r) d\eta, \quad k = j-1;$$

$$f_2^*(r) = g(r) \frac{\partial}{\partial z} u^*(r, 0)$$

$$f_3^*(r) = g(r) r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} u_*(r, 0) \right]; \quad \kappa_2 = 2\gamma_2, \quad \kappa_3 = \frac{2}{\gamma_3}$$

По аналогии с [7] можно показать, что (b — коэффициент в асимптотике (1.1))

$$(3.7) \quad u_j(\rho, \varphi) \sim D_{j0} + \rho^\nu [C_{j1} \sin \nu\varphi + D_{j1} \cos \nu\varphi] + \dots,$$

$$\rho \rightarrow 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\nu = \nu_j, \quad j = 2, 3; \quad C_{21} = -\text{ctg}(\pi\nu_2) D_{21}, \quad D_{31} = \text{ctg}(\pi\nu_3) C_{31}$$

$$u_j(r, z) = u_{j0}^1(r, z), \quad z \geq 0; \quad u_j(r, z) = u_{j0}^2(r, z), \quad z \leq 0$$

$$(3.8) \quad \nu_j \text{ctg}(\pi\nu_j) + \kappa_j/b = 0; \quad 1/2 \leq \nu_j < 1; \quad j = 2, 3$$

К решению уравнений (3.6) привлечем метод коллокаций. Учитывая (3.5), (3.7), представим $\varphi_j(t)$ в виде разложения по полиномам Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ [17]

$$(3.9) \quad \varphi_j(t) = t^{j-1} (1-t^2)^\nu \sum_{n=0}^{N-1} A_n^j P_n^{(j-1, \nu)}(1-2t^2), \quad \nu = \nu_j$$

$$j = 2, 3; \quad |t| < 1$$

Подставляя (3.9) в (3.6) и приравнивая левые и правые части уравнений в N точках коллокаций x_m ($m = 1, 2, \dots, N$), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_n^j

$$(3.10) \quad \sum_{n=0}^{N-1} A_n^j L_n^j(x_m) = f_j^*(x_m), \quad 0 < x_m < 1; \quad m = 1, 2, \dots, N; \quad j = 2, 3$$

Используя результаты из [17, 19], имеем

$$L_n^j(r) = r^{j-1} \kappa_{jn}^* F(n + j + 3/2, -n - \nu - 1/2; j; r^2)$$

$$\kappa_{jn}^* = \frac{\Gamma(n + \nu + 1) \Gamma(n + j + 1/2)}{n! \Gamma(n + \nu + 1/2)}$$

($\nu = \nu_j$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса).

Точность вычисления $\varphi_j(t)$ контролируется путем сравнения результатов, полученных при различных значениях N в (3.10).

Из (3.7), (3.9) для определения коэффициентов D_{21} и C_{31} найдем

$$(3.11) \quad D_{21} = 2^{\nu_2} \sum_{n=0}^{N-1} A_n^2 P_n^{(1, \nu_2)}(1), \quad C_{31} = 2^{\nu_3} \sum_{n=0}^{N-1} A_n^3 P_n^{(2, \nu_3)}(1)$$

4. Внутреннее асимптотическое разложение. Методика построения внутреннего асимптотического разложения, уточняющего напряженно-деформированное состояние в окрестности конца включения, описана в [1, 2]. Будем придерживаться этой же методики с той лишь разницей, что вместо экспоненциального относительно ε масштаба внутренних переменных [1] используем следующий масштаб (на окончательный результат это изменение не влияет):

$$(4.1) \quad \rho = \varepsilon \rho_*, \quad 1 - r = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi$$

Кроме того, упомянутое разложение нужно строить отдельно в каждом диапазоне (1.6) изменения параметра γ .

В диапазоне на основании метода САР [1, 20] внутреннее разложение ищем в виде

$$(4.2) \quad u_\theta(\rho, \varphi) \sim v_0^i(\rho_*, \varphi) + \varepsilon v_1^i(\rho_*, \varphi) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 0, 1$$

причем функции v_k^0 заданы в области W , а v_k^1 — в области Ω , где

$$(4.3) \quad W = \{\rho_* \geq 0, \alpha_2 \leq \varphi \leq \alpha_1\}, \quad \Omega = \{\rho_* \geq 0, \alpha_1 \leq \varphi \leq 2\pi + \alpha_2\}$$

$$R = \Omega \cup W, \quad \alpha_i = \arctg(\varepsilon b_i), \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \varepsilon b + o(\varepsilon)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

Переписывая соотношения (1.2), (1.3), (1.4) во внутренних переменных и расщепляя дифференциальные операторы по целым степеням ε , находим, что v_k^i — собственные решения уравнения Лапласа в составном угле R , удовлетворяющие условиям сопряжения на линии раздела материалов. Используя результаты работы [21], по методу САР найдем, что упомянутые собственные функции имеют вид

$$(4.4) \quad v_0^i(\rho_*, \varphi) = D_0, \quad v_1^i(\rho_*, \varphi) = D_{10} + D_{11} \rho_*^{\lambda_{11}} \cos(\lambda_{11} \varphi) +$$

$$+ \gamma^{-\kappa} C_{11} \rho_*^{\lambda_{12}} \sin(\lambda_{12} \varphi), \quad \kappa = \delta_i^0; \quad i = 0, 1$$

Здесь D_{10} , D_i , C_i — коэффициенты в асимптотических разложениях (3.2), (3.3), λ_{11} , λ_{12} — близкие к единице корни трансцендентного уравнения

$$(4.5) \quad \cos(\lambda \alpha) \cos[\lambda(2\pi - \alpha)] -$$

$$- 1/2 (\gamma + 1/\gamma) \sin(\lambda \alpha) \sin[\lambda(2\pi - \alpha)] = 1$$

значения которых определим ниже.

Поскольку угол раскрытия края включения $\alpha \approx \varepsilon b$ — величина малая, решения уравнения (4.6) удобно искать в виде разложения по малому параметру ε отдельно в каждом из диапазонов (1.6) изменения γ . В методическом отношении указанные разложения находятся так же, как в

п. 2 определяются внешние представления рассматриваемой задачи. Таким образом, имеем

$$(4.6) \quad \lambda_{11} = 1 + \frac{\varepsilon b}{2\pi} (1 - \gamma) + \dots, \quad \lambda_{12} = 1 + \frac{\varepsilon b}{2\pi\gamma} (\gamma - 1) + \dots$$

$$\lambda_j = \nu_j + \varepsilon \nu_{j1} + \dots, \quad j = 2, 3$$

$$\nu_{j1} = 2\nu_j b [\gamma_j \sin(2\pi\nu_j) - b\nu_j \cos(2\pi\nu_j)] \times$$

$$\times [(4\pi\gamma_j - b) \sin(2\pi\nu_j) - b\nu_j \cos(2\pi\nu_j)]^{-1}$$

Индекс j указывает на диапазон изменения параметра γ , ν_j ($j = 2, 3$) — корни уравнений (3.8).

На основании (4.2) и (4.4) для перемещений и напряжений в матрице возле края включения в диапазоне I получим следующие приближенные выражения, записанные в переменных ρ , φ :

$$(4.7) \quad u_\theta(\rho, \varphi) \approx D_0 + D_1 \rho^{\lambda_{11}} \cos(\lambda_{11}\varphi) + C_1 \rho^{\lambda_{12}} \sin(\lambda_{12}\varphi), \quad \rho \rightarrow 0$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} \approx \mu \lambda_{11} D_1 \rho^{\lambda_{11}-1} \begin{pmatrix} \sin \\ -\cos \end{pmatrix} [(1 - \lambda_{11})\varphi] + \mu \lambda_{12} C_1 \rho^{\lambda_{12}-1} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} [(1 - \lambda_{12})\varphi]$$

Способом, описанным выше, получаются также соотношения для расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности края включения в диапазонах 2 и 3

$$(4.8) \quad u_\theta(\rho, \varphi) \approx D_0 + D_{j0} + \rho^\lambda [C_{j1} \sin(\lambda\varphi) + D_{j1} \cos(\lambda\varphi)], \quad \lambda = \lambda_j$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} \approx \mu \lambda \rho^{\lambda-1} \left\{ C_{j1} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} [(1 - \lambda)\varphi] + \right.$$

$$\left. + D_{j1} \begin{pmatrix} \sin \\ -\cos \end{pmatrix} [(1 - \lambda)\varphi] \right\}, \quad \rho \rightarrow 0$$

(коэффициенты C_{j1} , D_{ji} ($i = 0, 1$) определяются в (3.7), j — индекс, указывающий на диапазон (1.6) параметра γ).

Как известно [1], полученные выше внешние и внутренние асимптотические разложения перекрываются с определенной степенью точности в широкой области, так что внешним разложением можно пользоваться, например, в области $\rho \geq \varepsilon$, а внутренним — при $\rho \leq \varepsilon$.

5. Пример. Пусть упругая система скручивается под действием сосредоточенного момента M , приложенного на оси z на высоте z_0 над включением. В этом случае [10]

$$u_*(r, z) = \alpha_* r [r^2 + (z - z_0)^2]^{-3/2}, \quad \alpha_* = M/(8\pi\mu)$$

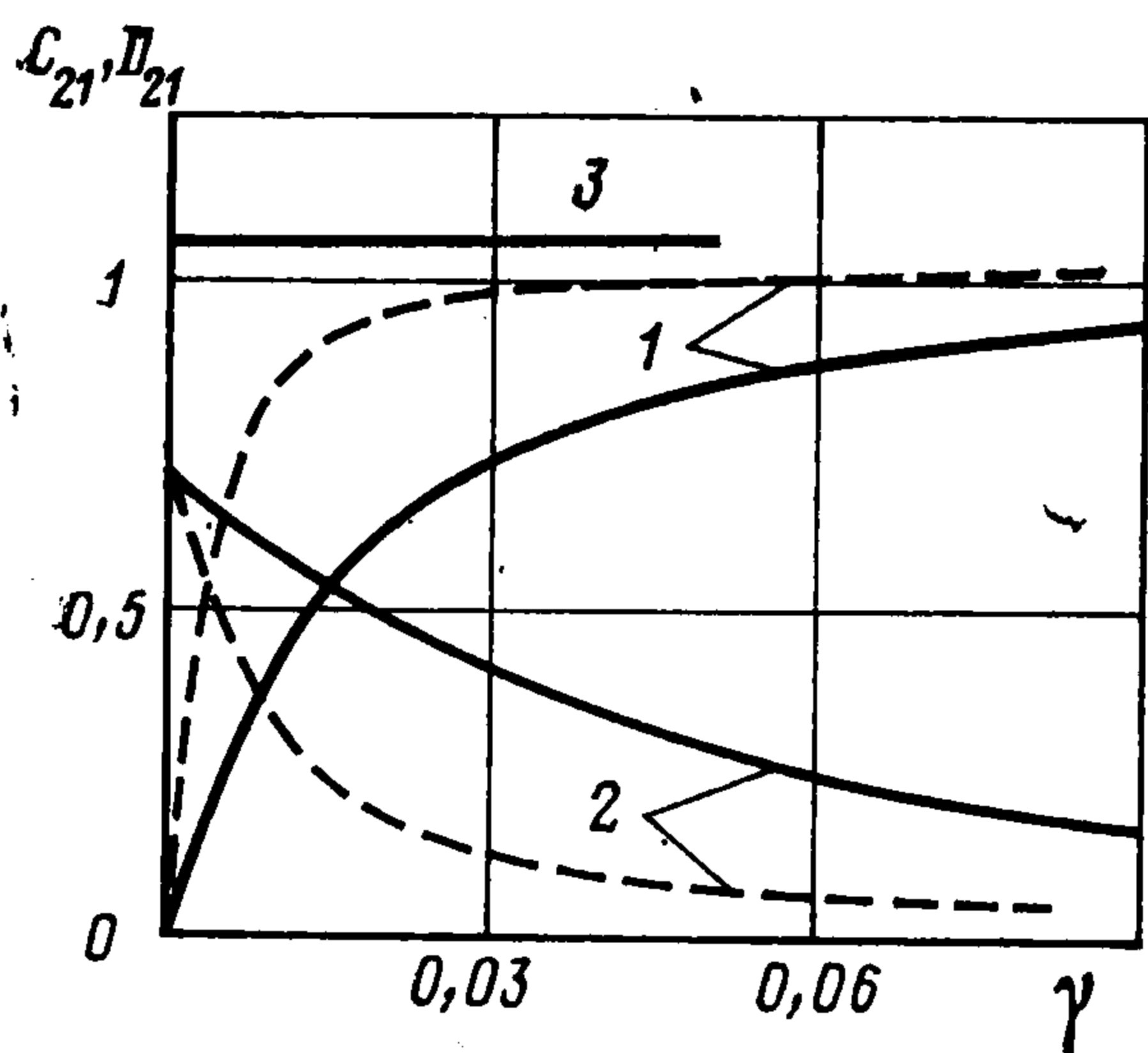
$$D_0 = \alpha_* (1 + z_0^2)^{-3/2}, \quad C_1 = 3\alpha_* z_0 (1 + z_0^2)^{-5/2}, \quad D_1 = C_1/z_0 - D_0$$

где D_0 , C_1 , D_1 — коэффициенты в (3.3). ■

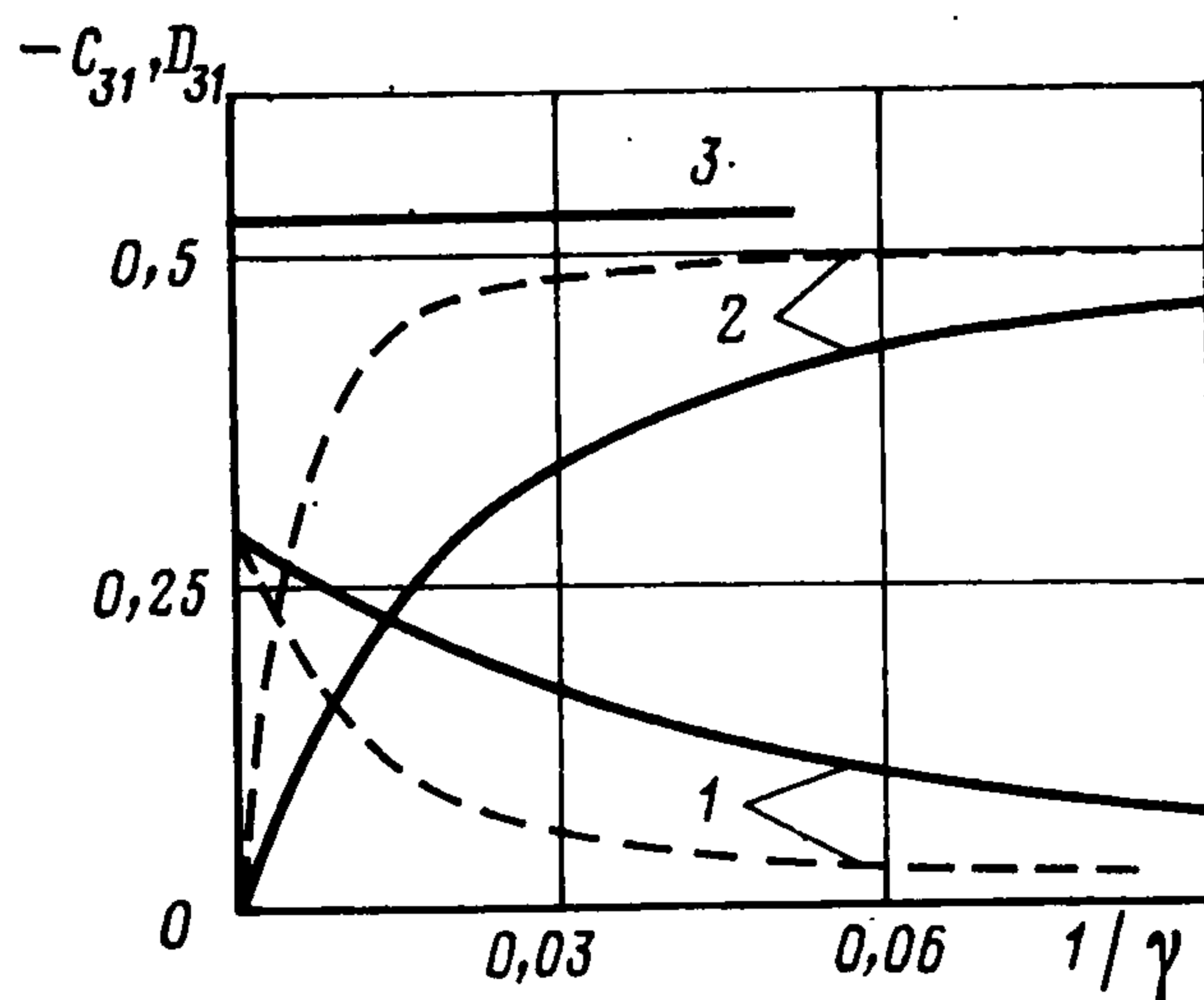
Напряженно-деформированное состояние композита в окрестности края включения в диапазонах 2 и 3 определяются соотношениями (4.8). Коэффициенты C_{j1} , D_{j1} ($j = 2, 3$), входящие в эти соотношения, определяются в процессе решения внешних задач (п. 3).

На фиг. 1 кривыми 1 и 2 проиллюстрированы зависимости коэффициентов C_{21} и D_{21} от γ при $\varepsilon = 0,005$ и $\varepsilon = 0,01$ (штриховые и сплошные линии соответственно); $\alpha_* = 10$, $z_0 = 2$, $g(r) = 2(1 - r^2)$. Видна следующая закономерность: при $\gamma_2 = \gamma/\varepsilon \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициент $C_{21} \rightarrow C_1$ (линия 3), а $D_{21} \rightarrow 0$. Такая закономерность имеет место во всех примерах осесимметричного кручения аналогичных упругих систем и следует из наличия диапазона изменения параметра γ , в котором решения, полученные в случаях 1 и 2, перекрываются с определенной степенью точности. Действительно, учитывая приведенную выше закономерность, а также сравнивая значения тангенциальных смещений, определенные по формулам (4.7) и (4.8), видим, что разница между этими значениями в указанном выше диапазоне перекрытия имеет вид $(1 + C\rho^\lambda) O(\varepsilon)$, $\rho \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где $C = \text{const}$, λ — корень уравнения (4.5).

Аналогичная закономерность имеет место и для коэффициентов C_{31} , D_{31} , зависимость которых от $1/\gamma$ при указанных выше значениях ε , $g(r)$, α_* и z_0 изображена



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 2 кривыми 1 и 2 соответственно. При $\gamma_3 = \varepsilon\gamma \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $C_{31} \rightarrow 0$, $D_{31} \rightarrow D_1$ (линия 3), что свидетельствует о существовании области значений γ , в которой внутренние асимптотические представления, полученные в диапазонах 1 и 3, совпадают с точностью до величин меньшего порядка, чем порядок найденных главных членов внутренних асимптотических разложений.

Отметим, что полученное внутреннее разложение не является пограничным слоем, а лишь уточняет показатель сингулярности напряжений возле края включения.

Автор благодарит Я. С. Подстригача и А. П. Поддубняка за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.
2. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Мат. сб. 1976. Т. 99. № 4. С. 514—537.
3. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1981. 206 с.
4. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз. 1963. 686 с.
5. Кунец Я. И. Осесимметричная задача кручения упругого пространства с тонким упругим включением // Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 2. С. 36—39.
6. Канаун С. К. О сингулярных моделях тонкого включения в однородной упругой среде // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 81—91.
7. Канаун С. К. Тонкий дефект в однородной упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 74—83.
8. Caillerie D. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. V. 2. No. 3. P. 251—270.
9. Подстригач Я. С. Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном упругом включении в сплошной среде // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 12. С. 30—32.
10. Поддубняк А. П. Кручение упругой среды с упругой шайбой // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 11. С. 119—123.
11. Поддубняк А. П., Кунец Я. И. Осесимметричное кручение упругого полупространства с упругой шайбой // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 7. С. 66—70.
12. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
13. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 520—529.
14. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487 с.
15. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. 1967. 402 с.
16. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. 1. Рига: Зинатне. 1974. 390 с.
17. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформированного основания. Киев; Одесса: Вища шк. 1982. 167 с.
18. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука. 1982. 342 с.
19. Земанян А. Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1974. 399 с.
20. Fraenkel L. E. On the method of matched asymptotic expansions. 1. A matching principle // Proc. Camb. Phil. Soc. 1969. V. 65. No. 1. P. 209—231.
21. Sinclair G. B. On the singular eigenfunctions for plane harmonic problems in composite regions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1980. V. 47. No. 1. P. 87—92.

Львов

Поступила в редакцию
17.IV.1986