Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕЖФАЗНЫХ ГРАНИЦ В ТВЕРДЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Гринфельд М. А.

Развивается подход к анализу устойчивости равновесия гетерогенных термодинамических систем с поверхностями фазовых превращений первого рода, основанный на исследовании неотрицательной определенности второй вариации энергии. Дается вывод явных формул вторых вариаций соответствующих функционалов для случаев систем с твердыми однокомпонентными фазами при когерентных превращениях (мартенситного типа) и переходах с проскальзыванием. Общая процедура иллюстрируется примером исследования устойчивости при переходах с проскальзыванием в приближении асимптотики малой «собственной» деформации в изотермической системе с изотропными упругими фазами.

Предпринимаемые в последнее время многочисленные усилия привели к существенному прогрессу в понимании основных концепций механики сплошной среды применительно к проблеме фазовых превращений в твердых телах. Ясное осознание несостоятельности понятия скалярного химического потенциала твердого тела поставило вопрос о нахождении корректных условий фазового равновесия для превращений в твердом веществе, что в свою очередь привело к более детальной и ясной классификации фазовых переходов первого рода в твердом теле и разработке представлений о различных тензорах химического потенциала.

Вместе с тем, по-видимому, не существует сколько-нибудь последовательных конкретных результатов, относящихся к *устойчивости* равновесия при различных переходах первого рода в гетерогенных системах.

Естественно начать изучение устойчивости равновесия гетерогенных систем с поверхностями фазовых переходов со статики, положив в основу подход Гиббса [1], связанный с расчетами вторых вариаций соответствующих термодинамических функционалов в окрестности состояний равновесия. При этом понятие вариации должно быть внутренне согласовано с физической природой рассматриваемых границ раздела.

Ниже излагаются результаты исследования необходимых условий устойчивости (достаточных условий неустойчивости) для случаев когерентных фазовых превращений и фазовых переходов с проскальзыванием; часть этих результатов была анонсирована [2, 3]. Полученные условия устойчивости представляют собой условия неотрицательной определенности надлежащим образом понимаемых вторых вариаций соответствующих энергетических функционалов (в связи с критерием второй вариации в континуальных задачах см. [4]). Вначале дается краткий вывод второй вариации энергетического функционала в окрестности состояния равновесия на множестве допустимых конфигураций, диктуемом физической природой изучаемого превращения. Далее вопрос о неотрицательной определенности второй вариации сводится к проверке неотрицательности спектральных значений линейной однородной системы уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями. Затем проводится редукция спектральной задачи для случая асимптотики малой «собственной» деформации превращения — в этом приближении явный анализ устойчивости для простейших симметрий фаз приводит к вполне обозримым результатам. Это иллюстрируется явным анализом устойчивости межфазной границы в изотермической системе с изотропными фазами при переходах с проскальзыванием: здесь получено уравнение для критических деформаций (условие нейтрального равновесия), которые имеют порядок собственной деформации превращения.

1. Условия равновесия и устойчивости гетерогенных систем с поверхностями когерентных превращений. Полный термодинамический анализ равновесия и устойчивости теплоизолированной системы на базе принципов Гиббса [1] в случае простых упругих фаз в отсутствие внешних силовых полей сводится к исследованию минимума полной внутренней энергии E при фиксированной полной энтропии S

$$(1.1)\qquad E = \int_{\omega}' d\omega m e(u_{k|l}, \eta), \quad S = \int_{\omega}' d\omega m\eta$$

При исследовании когерентных превращений в данной работе всюду используется лагранжево описание сплошной среды: $u_k(x)$ — компоненты вектора перемещения в точке с лагранжевыми координатами x^i по базису начальной конфигурации; латинский индекс после вертикальной черты означает ковариантное дифференцирование на базе метрического тензора начальной конфигурации x_{ij}, x^{ij}, используемого также для «жонглирования» пространственными лагранжевыми индексами: m — плотность массы в начальной однородной (общей для обеих фаз) конфигурации: $e(u_{k|l}, \eta)$ — зависимость удельной (на единицу массы) внутренней энергии простых упругих фаз от градиентов перемещений $u_{k|l}$ и удельной энтропии η; ω — область, занимаемая системой в начальной конфигурации; $\int'$ — символ суммы интегралов по гладким частям системы.

В случае когерентных превращений поле перемещений на межфазной границе γ, по определению, непрерывно: $[u^i] = 0$ ($[a] = a_+ - a_-$); в силу этого для однопараметрического семейства допустимых полей перемещений $u^i(x, \tau)$ и положений поверхности разрыва $x^i(\xi, \tau)$ должны выполняться следующие соотношения совместности для разрывов производных:

$$(1.2)\qquad \begin{aligned}
&[u_{i|j}] = h_i n_j, \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial \tau}\right] = -ch_i, \quad h_i = [u_{i|k}]\, n^k\\
&[u_{i|jk}] = H_i n_j n_k + 2h_{i|\alpha} n_{(j} x_{k)}^{\cdot\alpha} - h_i b_{jk}, \quad H_i = [u_{i|kl}]\, n^k n^l\\
&\left[\frac{\partial u_{i|j}}{\partial \tau}\right] = -H_i c n_j + \frac{\delta h_i}{\delta \tau} n_j - (ch_i)_{|\alpha}\, x_j^{\cdot\alpha}\\
&\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2}\right] = H_i c^2 - 2c\frac{\delta h_i}{\delta \tau} - h_i \frac{\delta c}{\delta \tau}, \quad x^i_{\cdot\alpha} = \frac{\partial x^i(\xi, \tau)}{\partial \xi^\alpha}
\end{aligned}$$

Здесь ξ^α — координаты на межфазной границе γ; греческий индекс после вертикальной черты обозначает ковариантное дифференцирование на базе метрического тензора поверхности-прообраза актуальной границы в начальной конфигурации (при помощи этого же тензора осуществляется «жонглирование» поверхностными индексами при рассмотрении когерентных превращений); $b_{ij} = b_{\alpha\beta}(\xi, \tau)\, x_i^{\cdot\alpha} x_j^{\cdot\beta}$ ($b_{\alpha\beta}$ — тензор коэффициентов второй квадратичной формы поверхности-прообраза); c — индуцируемая изменением параметра варьирования τ скорость этой поверхности в направлении единичной нормали n_i; $\delta/\delta\tau$ — символ ковариантного дифференцирования по параметру на движущейся поверхности, понимаемого так же, как в работе [5] (соответствующее определение для некоторых типов тензоров существенно отличается от предложенных ранее [6, 7]). Соотношения совместности для разрывов производных, восходящие к работам Вейнгартена, Аппеля, Леви-Чивиты и Адамара, были значительно усовершенствованы Томасом, которому принадлежат формулы (1.2) (см., например, [6]).

Варьируя функционал $I = E + \Lambda S$ (Λ — неопределенный множитель Лагранжа), следуя [8], получаем

$$(1.3)\qquad \frac{dI}{d\tau} = \int_{\omega}' d\omega m \left\{(e_\eta + \Lambda)\frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} - e^{ij}_{|j}\frac{\partial u_i(x, \tau)}{\partial \tau}\right\} +$$

$$+\int\limits_{\gamma} d\gamma m\left\{c\,[e+\Lambda\eta]+\left[e^{ij}\frac{\partial u_i(x,\tau)}{\partial\tau}\right]n_j\right\}$$

(здесь и в дальнейшем опущены интегралы по внешней границе системы).

Используя соотношения совместности для разрывов производных первого порядка на когерентной границе (1.2) и отделяя независимые вариации, на основании (1.3) приходим к следующим условиям равновесия:

$$(1.4)\qquad \begin{gathered} e_\eta=\theta=-\Lambda,\ p^{ji}_{|j}=0 \text{ внутри фаз}\\ [p^{ji}]\,n_j=0,\ [\mu^{ij}]\,n_in_j=0 \text{ на межфазной границе}\\ \mu^{ij}=(e-\theta\eta)\,x^{ij}-m^{-1}p^{jk}\,(\delta^i_k+u_{k|}{}^{i})\end{gathered}$$

где $p^{ji}=me^{ij}$ — тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, μ^{ij} — несимметричный тензор химического потенциала [9]; здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения для производных термодинамических функций по своим аргументам:

$$e_\eta=\frac{\partial e}{\partial\eta},\quad e^{ij}=\frac{\partial e}{\partial u_{i|j}},\quad e^{ijkl}=\frac{\partial^2 e}{\partial u_{i|j}\partial u_{k|l}}\ldots$$

Дифференцируя (1.3) по τ и используя уравнения равновесия (1.4), при $\tau=0$ приходим к следующей формуле для второй вариации I [2]:

$$(1.5)\qquad \begin{gathered}\delta^2 I=\int\limits_{\omega}' d\omega m\,(e^{ijkl}a_{i|j}a_{k|l}+2e_\eta{}^{ij}a_{i|j}b+e_{\eta\eta}b^2)+\\ +\int\limits_{\gamma} d\gamma\,(cx_j^{\cdot\alpha}\,[e^{ij}a_{i|\alpha}]+c^2x_j^{\cdot\alpha}\,[e^{ij}u_{i|l\alpha}]\,n^l-[e^{ij}a_i]\,x_j^{\cdot\alpha}c_{|\alpha})\\ a^i(x)=\frac{\partial u^i(x,0)}{\partial\tau},\qquad b(x)=\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial\tau}\end{gathered}$$

Здесь a^i, b — вариации перемещений и энтропии соответственно. При выводе (1.5) необходимо воспользоваться соотношениями совместности (1.2) и свойствами $\delta/\delta\tau$-производной, в частности соотношениями

$$\frac{\delta c\,[e+\Lambda\eta]}{\delta\tau}=\frac{\delta c}{\delta\tau}[e+\Lambda\eta]+c\left[e^{ij}\frac{\partial u_{i|j}}{\partial\tau}\right]+c^2n^k\,[e^{ij}u_{i|jk}]$$

$$\begin{gathered}\frac{\delta}{\delta\tau}\left(\left[e^{ij}\frac{\partial u_i}{\partial\tau}\right]n_j\right)=-\left(\left[e^{ij}\frac{\partial u_i}{\partial\tau}\right]cx_j^{\cdot\alpha}\right)_{|\alpha}+\left[e^{ij}\frac{\partial u_i}{\partial\tau}\right]n_jcb^\alpha_\alpha+\\ +c\left[e^{ij}\frac{\partial u_{i|j}}{\partial\tau}\right]+\left[e^{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial\tau^2}+\left(e^{ijkl}\frac{\partial u_{k|l}}{\partial\tau}+e_\eta^{ij}\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)\frac{\partial u_i}{\partial\tau}\right]\end{gathered}$$

Согласно принципу Гиббса, для устойчивости равновесия тепло- и механически изолированной системы с поверхностями когерентных превращений необходима неотрицательность функционала $\delta^2 I$ на вариациях поля перемещений частиц a_i, границы c и энтропии b, удовлетворяющих соотношениям

$$(1.6)\qquad [a^i]=-c\,[u^i_{\cdot|j}]\,n^j,\ \int\limits_{\omega}' d\omega mb+\int\limits_{\gamma} d\gamma mc\,[\eta]=0$$

первое из которых — следствие условия когерентности, а второе — фиксированности полной энтропии.

При исследовании изотермической устойчивости постоянство абсолютной температуры в различных точках системы не выводится, но постулируется априори, при этом вместо принципа Гиббса можно воспользоваться принципом (безусловного) минимума полной свободной энергии системы F. В дальнейшем будет рассматриваться только этот вопрос (незначительные дополнительные трудности, связанные с наличием ограничения, соответствующего второму соотношению (1.6) в случае теплоизолированной системы, могут быть учтены аналогично тому, как это делается в проблеме термодинамических неравенств [10]). Считая также равновесное состояние каждой из фаз однородным, а межфазную границу плоской, приходим к формуле для второй вариации полной свободной энергии системы в окрестности равновесной конфигурации [2]

$$\delta^2 F = \int_\omega' d\omega \psi^{ijkl} a_{i|j} a_{k|l} + \int_\gamma d\gamma m x_j^{\cdot\alpha} (c[\psi^{ij} a_{i|\alpha}] - c_{|\alpha} [\psi^{ij} a_i]) \tag{1.7}$$

где $\psi(u_{i|j}, \theta)$ — зависимость плотности свободной энергии фаз от градиентов перемещений и абсолютной температуры Θ (которая, в силу предположения, является заданным параметром).

Найдем экстремальные значения второй вариации свободной энергии $\delta^2 F$ на множестве виртуальных полей a^i, c, удовлетворяющих первому из условий (1.6) и условию нормировки

$$G = \int_\omega' d\omega m a^i a_i = 1 \tag{1.8}$$

В случае устойчивого равновесия, очевидно, необходимо, чтобы эти экстремальные значения были неотрицательны. Ограничение (1.8) изопериметрического типа можно учесть методом множителя Лагранжа, переходя к исследованию безусловного экстремума функционала $\Pi = \delta^2 F + \pi G$ (π — неопределенный множитель). Условия обращения в нуль первой вариации функционала Π сводятся к выполнению следующих соотношений [2]:

$$\psi^{ijkl} a_{k|lj} + \pi a^i = 0 \quad \text{внутри фаз} \tag{1.9}$$

$$[\psi^{ijkl} a_{k|l}] n_j = c_{|\alpha} x_j^{\cdot\alpha} [\psi^{ij}], \qquad x_j^{\cdot\alpha} ([\psi^{ij} a_{i|\alpha}] + c_{|\alpha} [\psi^{ij} u_{i|k}] n^k) = \\ = [\psi^{ijkl} u_{i|p} a_{k|l}] n^p n_l \quad \text{на межфазной границе} \tag{1.10}$$

Система (1.9), (1.10) дополняется также первым из соотношений (1.6) и соответствующими условиями на внешней границе. Значения параметра π, при которых указанная линейная однородная система имеет нетривиальные решения, назовем спектральными. Аналогично тому, как это делалось при исследовании термодинамических неравенств [10], можно доказать следующие утверждения (которые справедливы, конечно, и для неоднородных равновесных состояний и случая теплоизолированной системы): а) спектральные значения π вещественны, б) на нетривиальном вещественном поле a^i, c, принадлежащем собственному значению π и удовлетворяющем условию нормировки (1.8), вторая вариация $\delta^2 F$ принимает значение, равное π. Таким образом, для изотермической устойчивости системы необходима неотрицательность спектральных значений π.

Скажем, что когерентная межфазная граница локально устойчива в некоторой точке, характеризующейся локальными градиентами фаз $u^{\pm}_{i|j}$, если неотрицательны соответствующие собственные значения π системы, образованной первым из соотношений (1.6), а также (1.9), (1.10), отвечающие собственным функциям, экспоненциально затухающим в глубь соответствующих полупространств и имеющим колебательный характер в направлении межфазной границы. Изучение локальной устойчивости межфазной границы, сводящееся к изучению уравнений с постоянными коэффициентами, существенно проще анализа устойчивости системы в целом и не может гарантировать подобной устойчивости. В то же время обнаружение локальной неустойчивости границы позволяет вынести суждение о неустойчивости системы в целом, так как для достаточно коротких возмущений локальной кривизной границы и неоднородностью равновесной конфигурации можно пренебречь. Таким образом, здесь существует та же связь, которая характеризует отношение между термодинамической устойчивостью материала и устойчивостью изготовленной из него конкретной конструкции.

2. Устойчивость равновесия при когерентных переходах в случае малой собственной деформации превращения. Для краткости предполагаем, что в опорных конфигурациях (см. [11, 12]) фазы не напряжены, а температура системы Θ соответствует совпадению плотностей свободных энергий фаз на единицу массы. Аффинную деформацию, связывающую опорные конфигурации фаз, будем считать малой

$$w_i = \varepsilon \Delta_{ij} x^j, \quad \Delta_{ij} \sim 1, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{2.1}$$

В такой ситуации естественно ожидать, что найдутся равновесные конфигурации, содержащие обе фазы, разделенные межфазной границей, причем физические параметры обеих фаз будут мало отличаться от опорных и совместно с уравнением границы представляться в виде рядов по малому параметру

$$v_{\pm}{}^i = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N v^i_{N\pm}, \quad x^i(\xi, \varepsilon) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N x^i_N(\xi) \tag{2.2}$$

(здесь v^i — дополнительные к w^i поля перемещений фаз).

В рассматриваемой ситуации коэффициенты спектральной задачи, описываемой первым из соотношений (1.6), а также (1.9), (1.10), оказываются функциями малого параметра ε. В результате ее решения можно искать в виде рядов

$$\pi = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N \pi_N, \quad a^i = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N a_N{}^i, \quad c = \sum_{N=-1}^{\infty} \varepsilon^N c_N \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1)—(2.3) в указанную систему, в низшем по ε приближении приводим спектральную задачу к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&\overline{\psi}^{*ijkl} a_{0k|lj} + \pi_0 a_0{}^i = 0 \ \text{внутри фаз} \\
&[a_0{}^i] = -c_{-1}[v_{1\cdot|j}^{\,i} + \Delta^{i}_{\cdot j}]\, n^j \ \text{на межфазной границе} \\
&[\overline{\psi}^{*ijkl} a_{0k|l}]\, n_{j0} = c_{-1|\alpha} \dot{x}^{\alpha}_{j0} [\overline{\psi}^{*ijkl} v_{1k|l}] \\
&([\overline{\psi}^{*ijkl} v_{1k|l} a_{0i|\alpha}] + [\overline{\psi}^{*ijkl} v_{1k|l}(v_{1i|p} + \Delta_{ip})]\, n^p c_{-1|\alpha})\, \dot{x}^{\alpha}_{j0} = \\
&= [\overline{\psi}^{*ijkl}(v_{1i|p} + \Delta_{ip})\, a_{0k|l}]\, n_0{}^p n_{j0}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Функции $\psi_{\pm}{}^*$ задают плотности свободной энергии фаз в зависимости от величин $v_{i|j\pm}$, θ; здесь черта сверху означает, что значение соответствующей производной вычисляется при $\varepsilon = 0$.

3. Необходимые условия равновесия и устойчивости при фазовых переходах с проскальзыванием. Рассмотрение изотермического равновесия и устойчивости простой термоупругой системы, в которой может происходить фазовый переход с проскальзыванием, в отсутствие внешних силовых полей может быть основано на исследовании минимума полной свободной энергии

$$F = \int_{\Omega}' d\Omega \rho \psi \tag{3.1}$$

Описание в этом случае удобно вести в эйлеровых координатах z^i: z_{ij}, z^{ij} — метрические тензоры системы отсчета, при помощи которых осуществляется жонглирование пространственными индексами системы отсчета, а также осуществляется ковариантное дифференцирование, обозначаемое символом ∇_i; U_i — компоненты эйлерова поля перемещений частиц, ρ — актуальная плотность вещества; ковариантное дифференцирование по координатам ξ^α на актуальной межфазной границе Σ обозначается символом ∇_α (при помощи метрического тензора актуальной поверхности в дальнейшем осуществляется также жонглирование поверхностными индексами).

В дальнейшем, имея в виду доведение вычислений до явных алгебраических соотношений, ограничимся случаем изотропных нелинейно-упругих простых фаз. В этом случае плотность свободной энергии фаз зависит от градиентов перемещений сложным образом, и, в зависимости от удобства и целей, может рассматриваться как функция главных инвариантов I_M, главных удлинений Λ_M, тензора конечных деформаций U_{ij}, метрического тензора начальной конфигурации $z_{ij}{}^0$ и т. д. в силу геометрических соотношений

$$(3.2)\qquad z_{ij}{}^0 = z_{ij} - 2U_{ij}, \qquad 2U_{ij} = \nabla_i U_j + \nabla_j U_i - \nabla_i U_k \nabla_j U^k$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{|z|}{|z^0|} z^{ijk} z^{pqr} z^0_{ip} z^0_{jq} z_{kr} = \Lambda_1{}^2 + \Lambda_2{}^2 + \Lambda_3{}^2, \quad |z| = |z_{ij}|$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{|z|}{|z^0|} z^{ijk} z^{pqz} z^0_{ip} z_{jq} z_{kr} = \Lambda_1{}^2\Lambda_2{}^2 + \Lambda_2{}^2\Lambda_3{}^2 + \Lambda_3{}^2\Lambda_1{}^2$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\frac{|z|}{|z^0|} z^{ijk} z^{pqr} z_{ip} z_{jq} z_{kr} = \Lambda_1{}^2\Lambda_2{}^2\Lambda_3{}^2$$

(независимо от выбора аргументов для обозначения плотности свободной энергии будет использоваться одна буква).

Следуя [9], при анализе фазовых переходов с проскальзыванием воспользуемся техникой варьирования, связанной с рассмотрением возможных скоростей частиц f^i и актуальной границы C, которые удовлетворяют локальному условию сохранения массы на сингулярной поверхности

$$(3.3)\qquad C\,[\rho] = [\rho f^i]\, N_i$$

Здесь N_i — компоненты единичной нормали к актуальной границе.

Рассматривая плотность свободной энергии фаз как функции тензора конечных деформаций, следуя [9], приводим первую вариацию свободной энергии к виду

$$(3.4)\qquad \frac{dF}{d\tau} = -\int\limits_{\Omega}' d\Omega f_i \nabla_j P^{ji} + \int\limits_{\Sigma} d\Sigma\, [f_i (P^{ij} - Dz^{ji})]\, N_j$$

Здесь P^{ji} — тензор напряжений Коши; скаляр D характеризует наклон кривой фазового равновесия:

$$P^{ij} = \rho z^{ik} z^0_{kl} \frac{\partial\psi}{\partial U_{(lj)}}, \qquad D = \frac{[\psi]}{[\rho^{-1}]}$$

Из условия обращения первой вариации свободной энергии в нуль приходим к уравнениям равновесия [9]

$$(3.5)\qquad \nabla_j P^{ji} = 0 \text{ внутри фаз}$$

$$P_{\pm}{}^{ji}|_\Sigma N_j = DN^i \text{ на межфазной границе}$$

В дальнейшем будет изучаться изотермическая устойчивость конфигураций с плоской границей раздела и однородными в состоянии равновесия напряженно-деформированными состояниями фаз. Дифференцируя соотношение (3.4) в окрестности такой конфигурации и используя условия равновесия (3.5), приходим к формуле для второй вариации свободной энергии [2]

$$\delta^2 F = \int\limits_{\Omega}' d\Omega C^{ijkl} \nabla_j f_i \nabla_l f_k + \int\limits_{\Sigma} d\Sigma z_j^{\cdot\alpha} (2C [d^{jk} \nabla_\alpha f_i] - [d^{ji} f^k \nabla_\alpha f_i] N_k) \tag{3.6}$$

$$d^{ji} = P^{ji} - Dz^{ji}, \quad C^{ijkl} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial U_{(lj)}} z^0_{mq} z^{kq} z^{mi} + \tag{3.7}$$

$$+ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial U_{(nj)} \partial U_{(pl)}} z^0_{mn} z^0_{qp} z^{mi} z^{qk} - P^{ji} z^{kl} - P^{jk} z^{il}$$

При выводе формулы второй вариации используется однородность исследуемого состояния равновесия, свойства $\delta/\delta\tau$ -производной, а также следующие соотношения:

$$\frac{\delta N_i}{\delta\tau} = - z_i^{\cdot\alpha} \nabla_\alpha C, \qquad \frac{\delta P^{ji}}{\delta\tau} = C^{ijkl} \nabla_l f_k$$

$$\frac{\delta}{\delta\tau} \frac{[\psi]}{[\rho^{-1}]} = \frac{1}{[\rho^{-1}]} \left[\frac{d^{ji}}{\rho} \nabla_j f_i \right]$$

4. Спектральная задача для проверки неотрицательности второй вариации свободной энергии. Следуя [2], рассмотрим экстремальные значения второй вариации свободной энергии (3.6) на множестве кинематически допустимых виртуальных скоростей частиц f^i и межфазной границы C, удовлетворяющих условию нормировки

$$G^* = \int\limits_{\Omega}' d\Omega \rho f^i f_i = 1 \tag{4.1}$$

Так же как и в случае когерентных превращений, последний вопрос сводится к исследованию безусловного минимума функционала $\Pi^* = \delta^2 F - \pi G^*$, варьируя который на множестве кинематически допустимых полей (т. е. таких, которые удовлетворяют условию (3.3)), получаем

$$\delta\Pi^* = -2 \int\limits_{\Omega}' d\Omega \delta f_i (\nabla_j C'^{ijkl} \nabla_l f_k + \pi\rho f^i) + \tag{4.2}$$

$$+ \int\limits_{\Sigma} d\Sigma \{2N_j [C'^{ijkl} \nabla_l f_k \delta f_i] + z_j^{\cdot\alpha} (2\delta C [d^{ji} \nabla_\alpha f_i] -$$

$$- [d^{ji} \delta f^k \nabla_\alpha f_i] N_k + [d^{ji} \delta f_i \nabla_\alpha f^k] N_k - 2 [d^{ji} \delta f_i] \nabla_\alpha C)\}$$

$$C'^{ijkl} = \frac{1}{2} (C^{ijkl} + C^{klij})$$

Отделяя в (4.2) независимые вариации, приходим к условиям стационарности

$$\nabla_j C'^{ijkl}_{\pm} \nabla_l f_{k\pm} + \pi \rho_{\pm} f_{\pm}{}^i = 0 \quad \text{внутри фаз} \tag{4.3}$$

$$N_j C'^{ijkl}_{\pm} \nabla_l f_{k\pm} + z_j^{\cdot\alpha} \Big\{ [d^{jk} \nabla_\alpha f_k] \frac{\rho_\pm}{[\rho]} N^i - d_\pm{}^{ji} \nabla_\alpha C -$$

$$- \frac{1}{2} d_\pm{}^{jk} N^i \nabla_\alpha f_{k\pm} + \frac{1}{2} d_\pm{}^{ji} N_k \nabla_\alpha f_\pm{}^k \Big\} = 0 \ \text{на межфазной границе}$$

Так же как и в случае когерентных превращений, можно показать, что: а) спектральные значения π системы (4.3) (с естественными условиями на внешней границе) вещественны; б) на нетривиальном вещественном поле f^i, принадлежащем собственному значению π и удовлетворяющем условию нормировки (4.1), вторая вариация свободной энергии (3.6) принимает значение, равное π. Таким образом, для изотермической устойчивости при фазовых переходах с проскальзыванием необходима неотрицательность спектральных значений системы (4.3). Не останавливаемся здесь на определении локальной устойчивости границы фазового перехода с проскальзыванием, которое вполне аналогично случаю когерентных превращений.

Используя (3.7), систему (4.3) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$(4.4)\qquad \nabla_j C_\pm^{ijkl}\nabla_l f_{k\pm} + \pi\rho_\pm f_\pm{}^i = 0$$

$$(4.5)\qquad \left(C_\pm^{ijkl}\nabla_l f_{k\pm} - \frac{1}{[\rho^{-1}]}\left[\frac{d^{kl}}{\rho}\nabla_k f_l\right] z^{ji}\right) N_j = d_\pm{}^{ji} z_j^{\alpha}\nabla_\alpha C$$

5. Локальная устойчивость фазовой границы при переходах с проскальзыванием в случае малой собственной деформации превращения. В дальнейшем предполагаем, что разность плотностей изотропных фаз в опорных конфигурациях весьма мала, а относительные удлинения вещества фаз при переходе из опорной конфигурации в исследуемую на устойчивость равновесную — близки к единице:

$$(5.1)\qquad \rho_-{}^0 = \rho_+{}^0 - \varepsilon\delta, \qquad \Lambda_{M\pm} = 1 + \varepsilon e_{M\pm}, \qquad \varepsilon \ll 1; \qquad e_{M\pm}, \qquad \delta \sim 1$$

Ограничимся двумерным случаем, считая компоненты $U_\pm{}^3$, $f_\pm{}^3$ перемещений и виртуальных скоростей равными нулю, а остальные компоненты $U_\pm{}^1$, $U_\pm{}^2$, $f_\pm{}^1$, $f_\pm{}^2$ не зависящими от z^3. Обозначим горизонтальную координату z^1 через x, а вертикальную — через $z = z^2$. Решения системы (3.3), (4.4) (4.5) будем искать в виде следующих рядов:

$$(5.2)\qquad f_\pm{}^i = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N f^i_{N\pm}, \qquad C = \sum_{N=-1}^{\infty} \varepsilon^N C_N, \qquad \pi = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N \pi_N$$

Подставляя (5.1), (5.2) в указанную выше систему и исключая C при помощи (3.3), в низшем по ε приближении приходим к соотношениям

$$(5.3)\qquad \rho_+{}^0\pi_0 f^1_{0\pm} + (\lambda_\pm + \mu_\pm)\left(\frac{\partial f^1_{0\pm}}{\partial x} + \frac{\partial f^2_{0\pm}}{\partial z}\right) + \mu_\pm\left(\frac{\partial^2 f^1_{0\pm}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f^1_{0\pm}}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\rho_+{}^0\pi_0 f^2_{0\pm} + (\lambda_\pm + \mu_\pm)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f^1_{0\pm}}{\partial x} + \frac{\partial f^2_{0\pm}}{\partial z}\right) +$$

$$+ \mu_\pm\left(\frac{\partial^2 f^2_{0\pm}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f^2_{0\pm}}{\partial x^2}\right) = 0 \text{ внутри фаз}$$

$$(5.4)\qquad \mu_\pm\left(\frac{\partial f^1_{0\pm}}{\partial z} + \frac{\partial f^2_{0\pm}}{\partial x}\right) - \left[\frac{\partial f_0{}^2}{\partial x}\right] h_\pm{}^{11} = 0$$

$$\lambda_\pm\left(\frac{\partial f^1_{0\pm}}{\partial x} + \frac{\partial f^2_{0\pm}}{\partial z}\right) + 2\mu_\pm\frac{\partial f^2_{0\pm}}{\partial z} + \left[h^{11}\frac{\partial f_0{}^1}{\partial x}\right] = 0 \text{ на межфазной границе}$$

Здесь использованы следующие формулы для ненулевых компонент тензоров $C_\pm{}^{ijkl}$ в опорных конфигурациях:

$$(5.5)\qquad C^{1111}_{0\pm} = C^{2222}_{0\pm} = \lambda_\pm + 2\mu_\pm, \qquad C^{1122}_{0\pm} = C^{2211}_{0\pm} = \lambda_\pm$$

$$C^{1212}_{0\pm} = C^{2121}_{0\pm} = C^{1212}_{0\pm} = C^{1221}_{0\pm} = \mu_\pm$$

При выводе (5.5) используются соотношения (3.2), при этом производные плотности свободной энергии по инвариантам в опорной конфигурации отождествляются с модулями Ламе с таким расчетом, чтобы при линеаризации точных нелинейных уравнений равновесия изотропной среды получались уравнения классической линейной теории упругости.

Входящие в граничные условия (5.4) величины $h_\pm{}^{11}$ характеризуют степень негидростатичности равновесных состояний фаз:

$$(5.6)\qquad h_\pm{}^{11} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d_\pm{}^{11}\rho_+}{\rho_+ - \rho_-} = \frac{2\mu_\pm(e_{1\pm} - e_{2\pm})}{e_{1-} + e_{2-} + \delta/\rho_+{}^0 - e_{1+} - e_{2+}}$$

При получении (5.6) следует воспользоваться правилом Лопиталя, а также соотношениями (3.2), (3.5), (5.1).

Колеблющиеся в направлении x и экспоненциально затухающие в глубь верхнего (индекс плюс) и нижнего (индекс минус) полупространств решения уравнений (5.3) имеют вид

$$
(5.7)\qquad \begin{aligned}
&f_{0\pm}^{2} = (B_1^{\pm}\exp(\mp k\xi_1^{\pm}z) + B_2^{\pm}\exp(\mp k\xi_2^{\pm}z))\exp(-ikx)\\
&f_{0\pm}^{1} = \pm(B_1^{\pm}\xi_1^{\pm}\exp(\mp k\xi_1^{\pm}z) + B_2^{\pm}\xi_2^{\pm}\exp(\mp k\xi_2^{\pm}z))\, i\exp(-ikx)\\
&\xi_1^{\pm} = (1-\pi_0/(a_{\parallel\pm}^2 k^2))^{1/2}, \qquad \xi_2^{\pm} = (1-\pi_0/(a_{\perp\pm}^2 k^2))^{1/2}
\end{aligned}
$$

где $a_{\parallel\pm}$, $a_{\perp\pm}$ — скорости продольных и поперечных объемных волн внутри соответствующих полупространств.

Подставляя решения (5.7) в граничные условия (5.4), получаем линейную однородную систему относительно $B_{1,2}^{\pm}$. Из условия обращения ее дискриминанта в нуль приходим к следующему уравнению для определения спектрального значения $q = \pi_0/k^2$:

$$
(5.8)\qquad \begin{aligned}
&\left\{(2-h_+)^2\xi_1^+\xi_2^+ - \left(2-\frac{q}{a_{\perp+}^2}-h_+\right)^2\right\}\left\{(2+h_-)^2\xi_1^-\xi_2^- -\right.\\
&\left.-\left(2-\frac{q}{a_{\perp-}^2}+h_-\right)^2\right\} + h_+^2h_-^2(1-\xi_1^+\xi_2^+)(1-\xi_1^-\xi_2^-) -\\
&-\frac{q^2}{a_{\perp+}^2a_{\perp-}^2}\left(h_+^2\frac{\mu_+}{\mu_-}\xi_2^+\xi_1^- + h_-^2\frac{\mu_-}{\mu_+}\xi_2^-\xi_1^+\right) -\\
&-2h_+h_-\left\{(2-h_+)\xi_1^+\xi_2^+ - \left(2-\frac{q}{a_{\perp+}^2}-h_+\right)\right\}\times\\
&\times\left\{(2+h_-)\xi_1^-\xi_2^- - \left(2-\frac{q}{a_{\perp-}^2}+h_-\right)\right\} = 0
\end{aligned}
$$

где $h_{\pm} = h_{\pm}^{11}/\mu_{\pm}$ — безразмерные параметры негидростатичности.

При $h_{\pm} = 0$ уравнение (5.8) распадается на два уравнения Релея для поверхностных волн в изотропном полупространстве. Этим уравнениям соответствуют, как известно [13], лишь положительные вещественные корни. Для нахождения уравнения нейтрального равновесия в (5.8) следует положить $q = 0$. Раскрывая возникающую при этом неопределенность по правилу Лопиталя, получаем

$$
(5.9)\qquad \begin{aligned}
&h_+^2\{(\varkappa_+ + 1)(\varkappa_- - 1) - \chi\} + h_-^2\{(\varkappa_+ - 1)(\varkappa_- + 1) - \chi^{-1}\} -\\
&-2h_-h_+\varkappa_+\varkappa_- - 4h_+\varkappa_+(\varkappa_- - 1) + 4h_-\varkappa_-(\varkappa_+ - 1) +\\
&+4(\varkappa_+ - 1)(\varkappa_- - 1) = 0; \qquad \varkappa_{\pm} = a_{\perp\pm}^2/a_{\parallel\pm}^2, \qquad \chi = a_{\perp+}^2/a_{\perp-}^2
\end{aligned}
$$

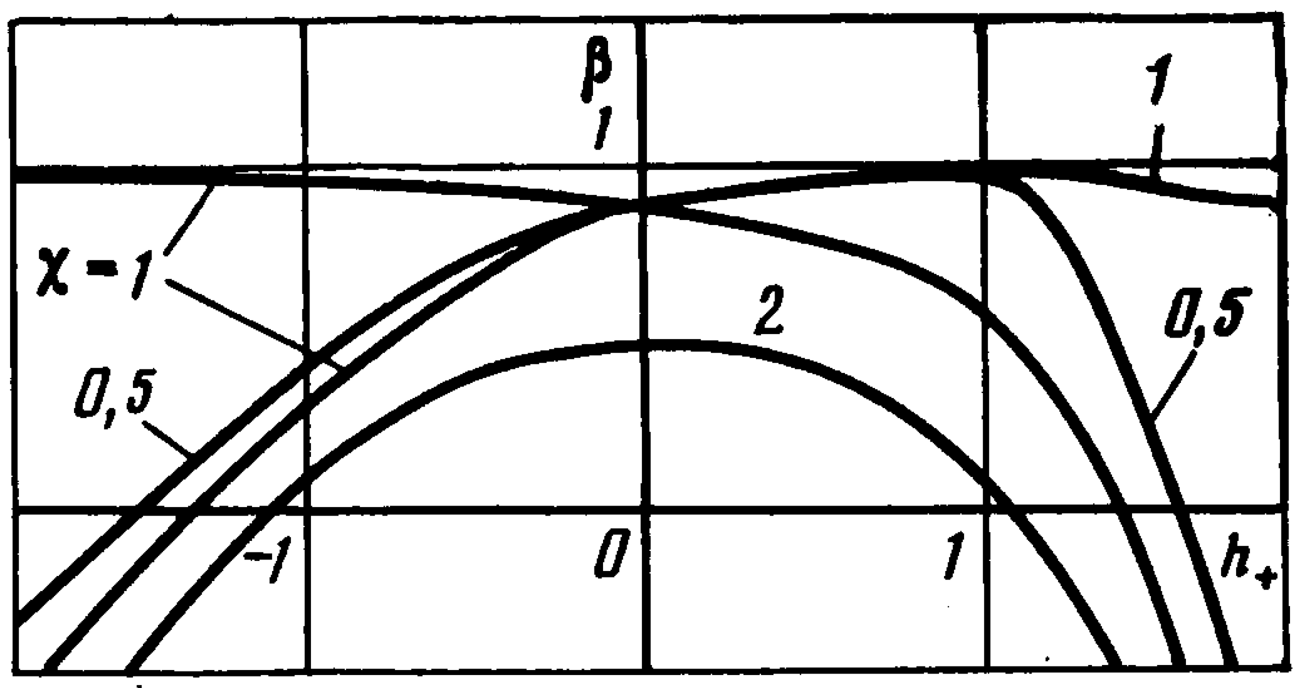
Соотношения (5.8), (5.9) значительно упрощаются в случае несжимаемых фаз ($a_{\parallel\pm} = \infty$), когда в одной из фаз (например, в нижнем полупространстве) главные усилия совпадают: $P_-^{11} = P_-^{22}$ (при этом, очевидно, $h_- = 0$). В указанной ситуации уравнения (5.8), (5.9) принимают вид

$$
(5.10)\qquad \begin{aligned}
&\{(2-h_+)^2\sqrt{1-\beta} - (2-\beta-h_+)^2\}\{4\sqrt{1-\chi\beta} - (2-\chi\beta)^2\} -\\
&-\chi^2\beta^2\sqrt{1-\beta}\,h_+^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
(5.11)\qquad h_+^2 = \frac{4}{1+\chi}, \qquad \beta = \frac{q}{a_{\perp+}^2}
$$

Соотношение для критической негидростатической деформации (5.11) совпадает с указанным ранее [3].

Уравнение (5.10) решалось на ЭВМ. На фигуре представлены зависимости корней β от безразмерной негидростатической деформации h_+ для трех значений параметра χ (при выполнении условий «мгновенной кинетики» на межфазной границе, когда на ней в процессе движения успевает устанавливаться равновесие в соответствии со второй группой условий (3.5), эти корни могут интерпретироваться как отношение квадрата скорости поверхностной волны к квадрату скорости поперечных объемных волн в фазе «плюс»). Видно, что при достаточно больших негидростатических деформациях в этой фазе межфазная граница теряет устойчивость. Пороговое значение негидростатической деформации стремится к нулю при стремлении к нулю модуля сдвига в фазе «минус», что вполне согласуется с обнаруженной



в [3] неустойчивостью в системе негидростатически напряженное твердое тело — расплав (которая проявляется при сколь угодно малых негидростатических напряжениях).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиббс Дж. В.* Термодинамические работы. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 492 с.
2. *Гринфельд М. А.* Устойчивость гетерогенного равновесия в системах, содержащих твердые упругие фазы // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1982. Т. 265. № 4. С. 836—840.
3. *Гринфельд М. А.* Неустойчивость границы раздела между негидростатически напряженным упругим телом и расплавом // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1986. Т. 290. № 6. С. 1358—1363.
4. *Ball J. M.*, *Marsden J. E.* Quasiconvexity at the boundary, positivi of the second variation and elastic stability // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1984. V. 86. No. 3. P. 252—277.
5. *Гринфельд М. А.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 883—898.
6. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир. 1964. 308 с.
7. *Truesdell C. A.*, *Toupin R. A.* The classical field theories // Handbuch der Physik. B.: Springer. 1960. V. 3/1. P. 226—793.
8. *Гринфельд М. П.* Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1980. Т. 251. № 4. С. 824—828.
9. *Grinfel'd M. A.* On heterogeneous equilibrium of nonlinear elastic phases and chemical potential tensors // Intern. J. Eng. Sci. 1981. V. 19. No. 7. P. 1031—1039.
10. *Гринфельд М. А.* Принцип Гиббса и термодинамические неравенства для нелинейно-упругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 72—79.
11. *Гринфельд М. А.* Об одной новой задаче математической физики, связанной с проблемой когерентных фазовых превращений // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 279. № 1. С. 72—76.
12. *Гринфельд М. А.* Асимптотика малой разности плотностей в проблеме когерентных фазовых превращений // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 582—592.
13. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Главная ред. общетехн. лит. и номогр., ОНТИ. 1935. 674 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1985