Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛИРОВКАХ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Терещенко В. Я.

Предлагаются вариационные формулировки метода граничных элементов (МГЭ) для решения задач линейной теории упругости с известным тензором Грина. В отличие от существующих формулировок МГЭ, использующих метод взвешенных остатков [1] или граничные интегральные уравнения [2], рассматриваемые ниже формулировки используют вариационную постановку задач для граничных функционалов [3] на множестве допустимых функций в виде потенциалов двойного слоя, плотность которых задается в виде базисных функций МГЭ. Рассматривается также вариационная формулировка МГЭ на основе задач минимизации обобщенных функционалов Трефтца основных граничных задач линейной теории упругости [4]. Приводится обоснование формулировок. Использование предложенных формулировок МГЭ эффективно при решении гранично-контактных задач, поэтому численная реализация рассматривается на примере односторонней вариационной задачи (типа обобщенной задачи Синьорини [5]), соответствующей классической контактной задаче о внедрении штампа в упругую полуплоскость, при аппроксимации возможной границы контакта изопараметрическими граничными элементами.

1. Изложим вариационные постановки задач для граничных функционалов (ГФ), используемые в вариационных формулировках МГЭ. В [3] сформулированы двойственные вариационные задачи для ГФ линейной теории упругости в терминах поверхностных перемещений и напряжений, к решению которых по методу ортогональных разложений на границе области [6] приводится решение основных граничных задач линейной теории упругости.

Функционалы этих задач минимизируются (максимизируются) на решениях однородного уравнения равновесия упругой среды в перемещениях, которое естественно рассматривать как ограничение вариационных задач. Так, согласно [3], построение решения первой основной задачи (задача с закрепленной границей) приводится к нахождению вектора $\boldsymbol{\varphi}_0(x)$, $x \in \overline{G}$, который является решением вариационной задачи для ГФ

$$F_S(\boldsymbol{\varphi}) = \int\limits_S \boldsymbol{\varphi}\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi})\,ds - 2\int\limits_S \boldsymbol{\varphi}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,ds \tag{1.1}$$

определенного на подпространстве $W_2^{*1/2}(S) \subset W_2^{1/2}(S)$ следов решений уравнения равновесия $\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} = 0$ в области упругой среды G, где вектор $\mathbf{u}^*(x)$, $x \in \overline{G}$, который считается заданным, должен удовлетворять уравнению равновесия $\mathbf{A}\mathbf{u}^* = \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ — вектор массовых сил) и граничному условию на свободной части границы (так как в первой задаче вся граница закреплена, то такое условие отсутствует). Тогда, если вектор $\boldsymbol{\varphi}_0$ построен, то получаем [6] решение первой задачи: $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \boldsymbol{\varphi}_0$.

Односторонние граничные задачи (типа обобщенной задачи Синьорини [7]) согласно [5], а также при помощи вспомогательной смешанной граничной задачи для вектора $\mathbf{u}^*$ с нулевым граничным условием в точках границы возможного контакта S_1 приводятся к односторонней вариационной задаче для ГФ

$$F_{S_1}(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{S_1} \varphi \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\,ds + \int\limits_{S_1} \varphi \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,ds \tag{1.2}$$

определенного на выпуклом замкнутом множестве вектор-функций

$$V(S_1) = \{\varphi \in W_2^{*1/2}(S_1) \mid \varphi^{(\nu)}|_{S_1} \geqslant 0\}$$

где $W_2^{*1/2}(S_1)$ — подпространство следов вектор-функций φ, удовлетворяющих условиям [5]:

$$\mathbf{A}\varphi = 0 \text{ в } G, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)|_{S_2} = 0, \quad S_2 = S|_{S_1} \tag{1.3}$$

Возможна вариационная формулировка МГЭ на основе обобщенного метода Трефтца, так как минимизация обобщенных функционалов Трефтца (ОФТ) приводит к решению уравнений относительно граничных значений искомого решения. Например, для второй основной задачи линейной теории упругости (задача со свободной границей) ОФТ, по аналогии с ОФТ краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона [8], может быть принят в виде

$$\Phi(\mathbf{u}) = 2\int\limits_G W(\mathbf{u})\,dG + \frac{1}{\alpha}\int\limits_S (\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) - \alpha\mathbf{u})^2\,ds - \alpha\int\limits_S \mathbf{u}^2\,ds \tag{1.4}$$

Здесь $2W(\mathbf{u})$ — квадратичная форма линейной теории упругости [8], $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ — вектор поверхностных нормальных напряжений; α — некоторая положительная постоянная, значение которой выбирается из условия ограниченности снизу функционала $\Phi(\mathbf{u})$. Было приведено [4] обобщение функционала (1.4) для случая, когда в функционал вводятся нормы граничных значений перемещений и напряжений в классах функций соответственно $W_2^{1/2}(S)$ и $W_2^{-1/2}(S)$, что приводит к уточнению значения функционала на решении задачи по сравнению с функционалом вида (1.4).

ОФТ основных граничных задач линейной теории упругости минимизируются на решениях уравнения равновесия в перемещениях $\mathbf{Au} = \mathbf{K}$. В задачах со свободной границей допустимые функции вариационных задач должны быть подчинены известным условиям, обеспечивающим однозначную разрешимость задач, которые приводятся ниже в формулировках МГЭ.

2. Пусть $G \subset E_m$ $(m = 2, 3)$ — область упругой среды с достаточно гладкой границей S. Произведем дискретизацию границы S на граничные элементы согласно [2]: пусть S_Δ — граница, аппроксимирующая S, состоит из граничных элементов Δs_n, т. е.

$$S_\Delta = \bigcup_{n=1}^{N} \Delta s_n \tag{2.1}$$

и $G_\Delta \subset G$ — область, ограниченная S_Δ; будем считать, что $G_\Delta \to G$ при $\operatorname{diam} \Delta s_n \to 0$. Пусть поле перемещений в точках $y \in \Delta s_n$ интерполируется по узловым значениям перемещений при помощи вектор-функции

$$\mathbf{w}_n(y) = [\mathbf{W}]\,\mathbf{\Psi}, \quad n = 1, \ldots, N$$

где $[\mathbf{W}]$ — матрица узловых перемещений элемента Δs_n, а $\mathbf{\Psi}$ — вектор базисных функций, т. е. каждая компонента перемещений точек $\eta \in \Delta s_n$ имеет вид

$$w_{in}(y(\eta)) = \sum_{k=1}^{K} W_{ik}\psi_K(\eta), \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.2}$$

Здесь $k = 1, \ldots, K$ — число узлов элемента Δs_n; W_{ik} — элементы матрицы узловых перемещений; $\psi_k(\eta)$ — базисная функция, соответствующая узлу k, где $\{\eta\}$ — локальная система координат точек граничного элемента Δs_n, плоская или криволинейная в зависимости от типа граничных элементов. Связь системы координат $\{\eta\}$ с глобальной (декартовой) системой координат $\{y\}$ для точек элемента Δs_n устанавливается [2] через матрицу Якоби $[J]$ преобразования, которое определяется уравнением $y = y(\eta)$, $\eta \in \Delta s_n$, так что $dy = [J]\, d\eta$.

Предполагается полнота в $L_2(S_\Delta)$ последовательности интерполяционных функций $\{w_{in}\}_{n=1,2,\ldots}$ вида (2.2), которая обеспечивается [2] представлением $w_{in}(\eta)$ на элементе конечного размера Δs_n в виде полного полинома переменной $\eta \in \Delta s_n$ и понимается в смысле сходимости в среднем линейной комбинации $\alpha_1 w_{i1} + \alpha_2 w_{i2} + \ldots + \alpha_N w_{iN}$ за счет выбора постоянных α_n к некоторой функции w_i $(i = 1, \ldots, m)$ при $N \to \infty$ $(\operatorname{diam} \Delta s_n \to 0)$.

Далее будем рассматривать случай однородной изотропной упругой среды. Используя тензор Грина первой основной задачи статики $\mathbf{\Gamma}_{(1)}(x, y)$ (достаточно полные условия существования такого тензора приведены в [9]), построим последовательность функций

$$(2.3)\qquad \{\beta_{in}\}_{n=1,2,\ldots}, \quad i = 1, \ldots, m$$

в виде потенциалов двойного слоя (обозначения заимствованы из [9])

$$(2.4)\qquad \beta_{in}(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{S_\Delta} [\mathbf{T}(\partial/\partial y, \mathbf{v}(y))\,\mathbf{\Gamma}_{(1)}(x, y)]^*\, w_{in}(y)\, ds(y), \qquad x \in G_\Delta$$

где $\mathbf{T}$ — граничный векторный оператор дифференцирования по направлению положительной нормали $\mathbf{v}$ к поверхности (2.1). Плотность потенциалов (2.4) определяется через компоненты перемещений вида (2.2) точек элементов Δs_n, следовательно, $\beta_{in}(x)$ — по сути, компоненты перемещений точек $x \in G_\Delta$ упругой среды.

Исследуем интеграл в (2.4). Во-первых, интегральное представление (2.4) обосновано [9] для случая кусочно-гладкой границы (2.1). Во-вторых, так как носитель базисных функций $\psi_k(\eta)$ (под носителем, как обычно, понимается множество точек $\eta \in S_\Delta$, в которых $\psi_k \neq 0$) есть граничный элемент Δs_n, то фактически интеграл в (2.4) распространяется только по ячейке Δs_n (для каждого n) и существует [9] для непрерывного поля перемещений в точках элемента Δs_n, что выполняется, если интерполяционные функции $w_{in}(\eta)$ представлены в виде полинома первой (и выше) степени переменной $\eta \in \Delta s_n$.

Функции $\beta_{in}(x)$, $x \in G_\Delta$, определяемые согласно (2.4), имеют все свойства, присущие поверхностному потенциалу двойного слоя, в частности, определены и конечны $\forall x \in G_\Delta$ и являются [9] решениями (при каждом n) первой задачи статики в области G_Δ с границей S_Δ:

$$(2.5)\qquad \mathbf{A}\beta_{in}(x) = 0, \quad x \in G_\Delta, \quad \beta_{in}|_{S_\Delta} = w_{in}(y), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\mathbf{A} \equiv \mu\Delta + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}$$

($\mathbf{A}$ — оператор изотропной теории упругости). Обоснование постановки задачи (2.5) для случая кусочно-гладкой границы (2.1) есть следствие обоснования формулы (2.4). Предполагая использовать в дальнейшем функции $\beta_{in}(x)$ в качестве базисных функций процесса Ритца в вариационной формулировке МГЭ, использующей ГФ (1.1), (1.2), необходимо установить свойства базисности последовательности (2.3).

Ввиду линейности интегрального преобразования (2.4) функции β_{in} образуют последовательность линейно независимых функций. Свойство полноты в $L_2(S_\Delta)$ последовательности (2.3) следует из равенства $\beta_{in} \mid S_\Delta = w_{in}$ (см. (2.5)) и предполагаемой полноты в $L_2(S_\Delta)$ последовательности интерполяционных функций $\{w_{in}\}_{n=1,2,\ldots}$. Вариационной задаче для ГФ (1.1) с интегралами по границе S_Δ и с ограничением $\mathbf{A}\varphi = 0$ в G_Δ соответствует [3] граничная задача с заданными напряжениями на границе S_Δ: $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)|_{S_\Delta} = \mathbf{t}^{(\nu)^*}(\mathbf{u}^*)$. При решении такой задачи энергетическим методом, как известно [8], применение процесса Ритца предполагает полноту последовательности базисных функций «по энергии» оператора граничной задачи. Эта полнота последовательности (2.3) будет иметь место (см. [8], с. 360) в силу положительной определенности оператора второй основной задачи (в области G_Δ с границей S_Δ) при условии полноты последовательности (2.3) в пространстве $L_2(G_\Delta)$.

Последнее устанавливается следующим образом. Пусть имеет место оценка

$$c_0^2 = \iint\limits_{G_\Delta S_\Delta} [\mathbf{T}(\partial/\partial y, \nu(y))\,\Gamma_{(1)}(x, y)]^{*2}\, ds(y)\, dG_\Delta(x) < \infty$$

что, по сути, означает: $[\mathbf{T}(\partial/\partial y, \nu(y))\,\Gamma_{(1)}(x, y)]^* \in L_2(G_\Delta) \times L_2(S_\Delta)$ и выполняется [10] в задачах теории потенциала. Возведем в квадрат обе части равенства (2.4) и применим к правой части неравенство Буняковского. Интегрируя затем обе части этого неравенства по G_Δ, получим неравенство

$$\|\beta_{in}\|^2_{L_2(G_\Delta)} \leqslant {}^1/_4\, c_0^2 \|w_{in}\|^2_{L_2(S_\Delta)}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

на основании которого из полноты в $L_2(S_\Delta)$ последовательности функций $\{w_{in}\}_{n=1,2,\ldots}$ следует полнота последовательности (2.3) в $L_2(G_\Delta)$.

3. Приступим к формулировке МГЭ на основе вариационной задачи для ГФ (1.1) с ограничением на допустимые вектор-функции $\mathbf{A}\varphi(x) = 0$, $x \in G$. Гранично-элементная аппроксимация этой задачи использует дискретизацию границы S в виде (2.1) согласно п. 2 и приближения решения «по Ритцу» на базисных функциях в виде потенциалов (2.4).

Пусть Φ_{ik} — компоненты искомых узловых перемещений, тогда i-я компонента приближенного решения будет иметь вид

$$\varphi_{iN} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \Phi_{ik}\beta_{nk}(x), \quad x \in G_\Delta, \quad i = 1, \ldots, m \tag{3.1}$$

где функции β_{nk}, определяемые согласно (2.4), при учете представления интерполяционных функций $\varphi_{in}(y(\eta))$, $\eta \in \Delta S_n$ в виде (2.2) будут определяться по формуле

$$\beta_{nk}(x) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S_n} \left[\mathbf{T}\left(\frac{\partial}{\partial y(\eta)}, \nu_n(y(\eta))\right)\Gamma_{(1)}(x, y(\eta))\right]^* \times$$
$$\times\, \psi_k(\eta)\,|J|\,ds_n(\eta) \quad n = 1, \ldots, N, \; k = 1, \ldots, K \tag{3.2}$$

($|J|$ — детерминант матрицы Якоби $[J]$, преобразующей $ds(\eta)$ в $ds(y)$).

Из условия минимума функционала $F_{S_\Delta}(\varphi_{iN})$ следует система Ритца линейных алгебраических уравнений для нахождения узловых значений Φ_{ik}

$$\sum_{n=1}^{N} \left[\int\limits_{\Delta s_n(y)} \mathbf{t}^{(\nu_n)}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} \Phi_{ik}\beta_{nk}\right)\beta_{rp}\, ds_n(y) - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\Delta s_n(y)} \mathbf{t}^{(\nu_n)}(\mathbf{u}_n^*)\,\beta_{rp}\, ds_n(y)\right] = 0 \quad r = 1, \ldots, N, \; p = 1, \ldots, K \tag{3.3}$$

($\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{u}_n{}^*$ — положительная нормаль и значение заданного вектора $\mathbf{u}^*$ в точках $y \in \Delta s_n$). Условие разрешимости гранично-элементной аппроксимации вариационной задачи для функционала $F_{S_\Delta}(\varphi_{iN})$ запишется в виде ($\mathbf{r}_n$ — радиус-вектор точки $y \in \Delta s_n$)

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{\Delta S_n} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_n)}(\mathbf{u}_n^*)\,dS_n = \sum_{n=1}^{N} \int_{\Delta s_n} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_n)}(\mathbf{u}_n^*) \times \mathbf{r}_n\,ds_n = 0$$

Преобразуем систему (3.3) к окончательной системе уравнений МГЭ. Для этого следует учесть, что граничные значения функций $\beta_{nk}(x)$ ($x \in G_\Delta$), определяемых согласно (3.2), таковы:

$$\beta_{nk}(\eta)|_{\Delta s_n} = \psi_k(\eta), \quad \eta \in \Delta s_n, \quad k = 1, \ldots, K \tag{3.4}$$

Для оператора граничных напряжений в точках элемента Δs_n получим

$$\mathbf{T}\left(\frac{\partial}{\partial y(\eta)}, \mathbf{v}_n(y(\eta))\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} \Phi_{ik}\beta_{nk}(\eta)\right) \equiv \tag{3.5}$$

$$\equiv \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_n)}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} \Phi_{ik}\beta_{nk}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} \Phi_{ik} c(\lambda, \mu)\frac{\partial \beta_{nk}}{\partial \mathbf{v}_n}$$

где $c(\lambda, \mu)$ — постоянный множитель, зависящий от постоянных Ламе.

Учитывая равенство (3.4), результат дифференцирования его по $\mathbf{v}_n(\eta)$ и выражение (3.5), систему (3.3) относительно неизвестных Φ_{ik} приводим к системе уравнений МГЭ

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} \Phi_{ik} \int_{\Delta s_n(\eta)} c(\lambda, \mu)\frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{v}_n}\psi_p |J|\,ds_n(\eta) = \tag{3.6}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{K} \int_{\Delta S_n(\eta)} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_n)}(\mathbf{u}_n^*)\psi_p |J|\,ds_n(\eta), \quad i = 1, \ldots, m$$

Вектор φ_N приближенного решения «по Ритцу» гранично-элементной аппроксимации вариационной задачи для функционала $F_{S_\Delta}(\varphi_N)$ должен быть подчинен условию однозначности

$$\int_{G_\Delta} \varphi_N\,dG_\Delta = \int_{G_\Delta} \operatorname{rot}\varphi_N\,dG_\Delta = 0 \tag{3.7}$$

Матрица системы (3.6), элементы которой вычисляются через интегралы вида

$$\int_{\Delta s_n(\eta)} \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{v}_n}\psi_p |J|\,ds_n(\eta), \quad p = 1, \ldots, K$$

симметрична (как обычно при вариационной формулировке задачи). Положительная определенность матрицы следует из положительной определенности квадратичной формы $2\int_{G\Delta} W(\varphi_N)\,dG_\Delta$ для векторов φ_N, удовлетворяющих условию (3.7). Из симметричности и положительной определенности матрицы следует однозначная разрешимость системы уравнений МГЭ (3.6).

При обосновании изложенной формулировки МГЭ следует учесть, что вариационная задача для ГФ (1.1) с ограничением на допустимые функции $\mathbf{A}\varphi = 0$ в G эквивалентна второй основной задаче в вариационной формулировке для функционала энергии и гранично-элементные приближения вида (3.1) являются приближениями «по Ритцу» решения этой задачи в области G_Δ с границей S_Δ. Действительно, достаточно проверить выполнение условий, которым подчиняются базисные функции β_{in} гранично-элементных приближений φ_{iN} в процессе Ритца ([8], с. 96).

1°. При любом N элементы $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{iN}$ линейно независимы.

2°. Элементы β_{in} должны принадлежать энергетическому пространству второй основной задачи линейной теории упругости, поставленной в области G_Δ с границей S_Δ, которым, как известно [8], является подпространство соболевского класса вектор-функций $W_2{}^1(G_\Delta)$, удовлетворяющих условию (3.7). Элементы $\beta_{in}(x)$ $(x \in G_\Delta)$, определяемые согласно (2.4), по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемы в области G_Δ с кусочно-гладкой границей S_Δ (в силу (2.5)); такое множество функций в силу теорем вложения [8] непрерывно вкладывается в пространство $W_2{}^1(G_\Delta)$.

3°. Последовательность (2.3) полна «по энергии» оператора второй основной задачи линейной теории упругости, что доказано в п. 2.

На основании изложенного приближения вида (3.1), где коэффициенты Φ_{ik} определяются из системы уравнений МГЭ (3.6) при условии (3.7), образуют минимизирующую последовательность процесса Ритца задачи минимизации функционала энергии второй граничной задачи в области G_Δ с границей S_Δ. Вопрос о сходимости минимизирующей последовательности $\{\varphi_{iN}\}$ при уменьшении размера граничного элемента $(\operatorname{diam} \Delta s_n \to 0 \Rightarrow N \to \infty)$ к точному (энергетическому) решению φ_0 второй задачи должен рассматриваться [2, 11] при выполнении некоторых условий на интерполяционные функции φ_{in} $(i = 1, \ldots, m)$ вида (2.2) граничного элемента $\Delta s_n \subset S_\Delta$.

Именно, сходимость гранично-элементных приближений при уменьшении размера граничного элемента обеспечивается [2, 11] условием полноты базисных функций элемента и условием согласованности элементов, которое заключается в том, что при переходе через границу между элементами должны быть непрерывны интерполяционная функция и ее производные вплоть до порядка $q - 1$ включительно, где q — наивысший порядок производных, содержащихся в функционале. В [11] приведены критерии полноты базисных функций конечного элемента и согласованности конечных элементов, обеспечивающие сходимость МКЭ в вариационной формулировке «по Ритцу». Так как рассмотренная выше гранично-элементная аппроксимация вариационных задач для ГФ вида (1.1), по сути, двумерная конечноэлементная аппроксимация, то указанные выше критерии могут быть использованы и здесь. В частности, критерий полноты базисных функций граничного элемента выполняется, если интерполяционные функции φ_{in} $(i = 1, \ldots, m)$ вида (2.2) представлены в виде полного полинома, как минимум, первой степени переменной $\eta \in \Delta s_n$, а критерий согласованности граничных элементов выполняется в процессе записи уравнений МГЭ за счет равенства узловых значений искомого решения в общих узлах смежных элементов (см. п. 5).

Реализация предложенной вариационной формулировки МГЭ рассматривается в п. 6 на примере алгоритма решения односторонней вариационной задачи для ГФ (1.2).

4. Рассмотрим формулировку МГЭ на основе вариационной задачи для ОФТ (1.4). Соответствующий билинейный функционал имеет вид

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\int_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dG + \frac{1}{\alpha}\int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\,\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\, ds - \int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\,\mathbf{v}\, ds - \int_S \mathbf{u}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\, ds \tag{4.1}$$

Функционал $\Phi(\mathbf{u})$ минимизируется (см. п. 1) на решениях уравнения $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{K}$ в области G, которое естественно рассматривать как ограничение задачи нахождения $\min \Phi(\mathbf{u})$. Эта задача однозначно разрешима [8] при соответствующих условиях однозначной разрешимости второй граничной задачи линейной теории упругости. Будем рассматривать случай однородной изотропной упругой среды. Для решения задачи нахождения $\min \Phi(u)$ используем гранично-элементную аппроксимацию из пп. 2, 3 в виде границы (2.1), области $G_\Delta \subset G$ и приближений

$$\mathbf{u}_N(x) = \boldsymbol{\delta}(x) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} U_{ik}\beta_{nk}(x), \quad x \in G_\Delta \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\delta}(x) = \int_{G_\Delta} \mathbf{\Gamma}(x, y)\,\mathbf{K}(y)\,dG_\Delta(y), \quad y \in G_\Delta$$

Здесь U_{ik} — компоненты искомых узловых перемещений граничного элемента Δs_n, функции β_{nk} определяются по формуле (3.2), $\boldsymbol{\delta}(x)$ — объемный потенциал однородной изотропной упругой среды, $\mathbf{\Gamma}(x, y)$ — матрица фундаментальных решений уравнений статики линейной теории упругости [9].

В дальнейшем используется равенство, вытекающее из изложенного в п. 2

$$\sum_{k=1}^{K} U_{ik}\beta_{nk} = \beta_{in}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad n = 1, \ldots, N$$

Объемный потенциал $\boldsymbol{\delta}(x)$ — регулярная функция [9] (при $x \neq y$) и при любых $x \in G_\Delta$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{K}(x)$; функции $\beta_{in}(x)$ $(x \in G_\Delta)$ удовлетворяют уравнению $\mathbf{A}\beta_{in} = 0$ (см. (2.5)). Тогда приближения (4.2) при каждом N удовлетворяют в области G_Δ почти везде ограничению $\mathbf{A}\mathbf{u}_N = \mathbf{K}$ вариационной задачи для функционала $\Phi_{G_\Delta}(\mathbf{u}_N)$, аппроксимирующего функционал $\Phi(\mathbf{u})$.

Далее понадобятся соотношения, которые следуют из сказанного и формулы Бетти [8]

$$2\int_{G_\Delta} W(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{v})\,dG_\Delta = \int_{S_\Delta} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_n)}(\boldsymbol{\delta})\,\mathbf{v}\,ds(y) + \int_{G_\Delta} \mathbf{K}\mathbf{v}\,dG_\Delta \tag{4.3}$$

$$2\int_{G_\Delta} W\Big(\sum_{i=1}^{m}\beta_{iN}, \mathbf{v}\Big)dG_\Delta = \int_{S_\Delta} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_n)}\Big(\sum_{i=1}^{m}\beta_{iN}\Big)\mathbf{v}\,ds(y), \quad \beta_{iN} = \sum_{n=1}^{N}\beta_{in}.$$

и справедливы для вектор-функций $\mathbf{v}$, достаточно гладких в $G_\Delta + S_\Delta$.

Из условия минимума функционала $\Phi_{G_\Delta}(\mathbf{u}_N)$ получаем систему Ритца для определения коэффициентов U_{ik}, которая в общем виде записывается так:

$$\Phi_{G_\Delta}\Big(\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} U_{ik}\beta_{nk} + \boldsymbol{\delta}, \beta_{rp}\Big) = 0, \quad r = 1, \ldots, N, \quad p = 1, \ldots, K \tag{4.4}$$

Используя выражение билинейного функционала, аппроксимирующего на приближениях (4.2) функционал (4.1), и соотношения (4.3) для исключения из (4.4) объемных интегралов вида $2\int_{G_\Delta} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,dG_\Delta$, а также, используя соотношения (3.4), (3.5), систему (4.4) приведем к системе уравнений МГЭ относительно искомых узловых значений U_{ik} $(i = 1, \ldots, m)$

$$\sum_{n=1}^{N}\Big\{\sum_{k=1}^{K} U_{ik}\Big[-\frac{1}{\alpha}\int_{\Delta s_n(\eta)} c(\lambda, \mu)\frac{\partial\psi_k}{\partial\mathbf{v}_n}c(\lambda, \mu)\frac{\partial\psi_p}{\partial\mathbf{v}_n}|J|\,ds_n(\eta) - \tag{4.5}$$

$$-\int\limits_{\Delta s_n(\eta)} \psi_k c(\lambda,\mu)\frac{\partial\psi_p}{\partial \mathbf{v}_n}|J|\,ds_n(\eta)\Big]\Big\}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{N}\Big\{\sum_{p=1}^{K}\Big[\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\Delta s_n(\eta)} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_n)}(\boldsymbol{\delta})\,c(\lambda,\mu)\frac{\partial\psi_p}{\partial \mathbf{v}_n}|J|\,ds_n(\eta)-$$

$$-\int\limits_{\Delta s_n(\eta)} \boldsymbol{\delta} c(\lambda,\mu)\frac{\partial\psi_p}{\partial \mathbf{v}_n}|J|\,ds_n(\eta)\Big]\Big\}+\int\limits_{G_\Delta}\mathbf{K}\beta_{NK}\,dG_\Delta$$

$$\beta_{NK}=\sum_{r=1}^{N}\sum_{p=1}^{K}\beta_{rp}$$

где функции $\beta_{rp}(x)$ определяются по формуле (3.2).

Однозначная разрешимость системы (4.5) (при условии разрешимости соответствующей граничной задачи в области G_Δ с границей S_Δ) устанавливается, во-первых, на основании симметричности матрицы системы, которая следует из симметричности билинейного функционала $\Phi_{G_\Delta}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)$ и второго соотношения из (4.3), во-вторых, на основании положительной определенности матрицы, которая следует из положительной определенности функционала $\Phi_{G_\Delta}(\mathbf{u}_N)$ для векторов $\mathbf{u}_N$ вида (4.2), удовлетворяющих условию однозначности (3.7).

Разрешимость системы Ритца, получаемой при минимизации ОФТ с граничными нормами $\|\mathbf{u}\|_{W_2^{1/2}(S)}$, $\|\mathbf{t}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{u})\|_{W_2^{-1/2}(S)}$ (см. п. 1), исследована в [12]; также исследована устойчивость процесса Ритца и даны рекомендации для решения систем уравнений вида (4.5) методом итераций.

Обоснование предложенной формулировки МГЭ, использующей ОФТ второй граничной задачи линейной теории упругости, основывается на том, что гранично-элементные приближения (4.2) решения вариационной задачи для этого функционала являются приближениями «по Ритцу» (см. п. 3). Сходимость приближений «по Ритцу» в задачах минимизации ОФТ граничных задач линейной теории упругости доказана в [4].

5. Перейдем к вопросам, касающимся численной реализации предложенных вариационных формулировок МГЭ. Рассмотрим случай аппроксимации границы области изопараметрическими криволинейными граничными элементами [2]. Тогда геометрические узлы при аппроксимации границы и функциональные узлы при аппроксимации решения совпадают и для аппроксимации используются одни и те же системы базисных функций МГЭ. Покажем, что в этом случае коэффициенты при неизвестных системы уравнений МГЭ вида (3.6) определяются идентично коэффициентам классической системы Ритца [8] задачи минимизации ГФ вида (1.1) с ограничением $\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}=0$ в G.

Для простоты будем рассматривать двумерный случай, соответствующий плоской задаче теории упругости. Тогда для аппроксимации границы используем одномерные изопараметрические криволинейные граничные элементы с квадратичным изменением базисных функций МГЭ в точках элемента; такой элемент имеет три узла. Произведем некоторые вспомогательные построения, которые связаны с элементами дифференциальной геометрии поверхностей, в частности со свойствами якобианов взаимно обратных дифференцируемых отображений [13]. В случае одномерных граничных элементов Δs_n отображение $\Delta s_n(y)\to\Delta s_n(\eta)$ характеризуется якобианом

$$(5.1)\qquad |J| = \{(\partial_\eta y_1)^2 + (\partial_\eta y_2)^2\}^{1/2}, \qquad \partial_\eta y_i \equiv \frac{\partial y_i}{\partial \eta}, \qquad i = 1, 2$$

Напомним (см. п. 2), что $y = (y_1, y_2)$ — декартовы координаты, а η — локальная координата точек, принадлежащих граничному элементу Δs_n.

Связь декартовых координат (y_1, y_2) с локальной координатой η в случае изопараметрического элемента $\Delta s_n(\eta)$ следующая:

$$(5.2)\qquad y_i = \sum_{k=1}^{K} y_{ik}\psi_k(\eta), \qquad i = 1, 2, \qquad \eta \in \Delta s_n, \qquad n = 1, \ldots, N$$

где (y_{1k}, y_{2k}) — декартовы координаты узла k элемента Δs_n, а $\psi_k(\eta)$ — базисные функции МГЭ второго порядка относительно η и $K = 3$ — число узлов интерполяции в пределах каждого элемента Δs_n. В точках аппроксимирующей границы (2.1) с внешней нормалью $\mathbf{v}_n(y_1, y_2)$ нормальная производная базисных функций $\psi_k(y_1, y_2)$ определяется так:

$$(5.3)\qquad \partial_{\mathbf{v}_n}\psi_k = \partial_{y_1}\psi_k \cos(\mathbf{v}_n, y_1) + \partial_{y_2}\psi_k \cos(\mathbf{v}_n, y_2), \qquad \partial_{\mathbf{v}_n} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n}$$

Далее используем выражение ([13], с. 87) для направляющих косинусов нормали $\mathbf{v}_n$ в точках элемента Δs_n, геометрия которого аппроксимируется при помощи базисных функций $\psi_k(\eta)$ соотношениями (5.2)

$$\cos(\mathbf{v}_n, y_i) = \partial_{y_i}\psi_k \{(\partial_{y_1}\psi_k)^2 + (\partial_{y_2}\psi_k)^2\}^{-1/2}, \qquad i = 1, 2$$

Подставив эти соотношения в (5.3) и учитывая равенства $\partial_{y_i}\psi_k = \partial_\eta\psi_k\partial_{y_i}\eta$ $(i = 1, 2)$, получим

$$\partial_{\mathbf{v}_n}\psi_k = \partial_\eta\psi_k \{(\partial_{y_1}\eta)^2 + (\partial_{y_2}\eta)^2\}^{1/2} = \partial_\eta\psi_k |J|^{-1}$$

где $|J|^{-1}$ — якобиан обратного отображения $\Delta s_n(\eta) \to \Delta s_n(y)$ (см. (5.1)).

Якобианы взаимно обратных непрерывно дифференцируемых отображений связаны соотношением $|J|^{-1}|J| = 1$ ([13], с. 62). Тогда коэффициенты при неизвестных в системе (3.6) преобразуются следующим образом:

$$\int_{\Delta s_n(\eta)} \partial_{\mathbf{v}_n}\psi_k\psi_p |J| \, d\eta = \int_{\Delta s_n(\eta)} \partial_\eta\psi_k\psi_p \, d\eta, \qquad k, p = 1, \ldots, K$$

Приведем методику составления уравнений, входящих в систему (3.6). Так как каждая из базисных функций ψ_k n-го элемента тождественно равна нулю в точках смежных $(n-1)$-го и $(n+1)$-го элементов, то каждое из уравнений системы будет содержать слагаемые при $n = z$, остальные слагаемые обращаются в нуль. Имеется два типа уравнений. Для среднего узла n-го элемента левая часть уравнения записывается в виде

$$(5.4)\qquad -\Phi_{i1}I_1^- + \Phi_{i2}(I_2^- + I_2^+) - \Phi_{i3}I_3^+$$

$$I_k^\pm = \int_0^{\pm 1} \partial_\eta\psi_k\psi_k \, d\eta; \qquad k = 1, 2, 3; \qquad i = 1, 2$$

где Φ_{ik} — искомые узловые значения, а η — безразмерная координата, изменяющаяся в пределах элемента от -1 до $+1$. Для общего узла смежных n-го и $(n+1)$-го элементов левая часть уравнения будет иметь вид

$$(5.5)\qquad \Phi_{i2}I_2^+ - \Phi_{i1}^{(n+1)}(I_1^{(n+1)-} + I_3^+) + \Phi_{i2}^{(n+1)}I_2^{(n+1)-}$$

$$I_k^{(n+1)-} = \int_0^{-1} \partial_\eta\psi_k^{(n+1)}\psi_k^{(n+1)} \, d\eta; \qquad k, i = 1, 2$$

При этом $\Phi_{i1}^{(n+1)} = \Phi_{i3}^{(n)}$, т. е. искомое узловое значение для первого узла $(n+1)$-го элемента совпадает с узловым значением для третьего узла n-го элемента (нумерация узлов против хода часовой стрелки). Таким образом, в точках аппроксимирующей границы S_Δ решение будет непрерывным, следовательно, выполняется условие согласованности граничных элементов Δs_n (см. п. 3).

6. Односторонняя вариационная задача для ГФ (1.2) на множестве вектор-функций $\varphi \in V(S_1)$ при линейных ограничениях (1.3) эквивалентна [5] односторонней граничной задаче

$$(6.1) \qquad \mathbf{A}\varphi = 0 \text{ в } G, \quad \varphi^{(\nu)}|_{S_1} \geqslant 0, \quad [\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})]_{S_1} \geqslant 0$$

$$(\varphi^{(\nu)}[\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})]_{S_1} = 0), \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\,|_{S_2} = 0$$

где $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ — заданный вектор нормальных напряжений в точках границы возможного контакта S_1 (здесь вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ не связывается с вектором перемещений $\mathbf{u}^*$ (см. п. 1)). Задача (6.1) это задача типа обобщенной задачи Синьорини, которая разрешима [7] при условии $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\,|_{S_1} < 0$.

Численная реализация предложенной формулировки МГЭ на основе вариационной задачи для ГФ рассматривается на примере классической контактной плоской задачи о внедрении (без учета трения) абсолютно жесткого штампа в упругую изотропную полуплоскость, которая может быть поставлена как задача (6.1). Для решения этой задачи как вариационной для ГФ вида (1.2) с линейными и выпуклыми ограничениями на допустимые функции использован алгоритм двойственности (типа алгоритма Удзавы — Эрроу — Гурвица [14]), основанный на двойственной постановке задачи на максимин лагранжиана. Множители Лагранжа $\{\lambda_j\}_{j=0,1,2,\ldots}$ использовались для снятия ограничения выпуклости $\varphi \in V(S_1)$, и механическая интерпретация этих множителей такова: λ_j — интенсивность распределенной опорной нормальной реакции в точках множества $S_1^\circ \subset S_1$ (априори неизвестного), в которых контакт штампа с границей S_1 существует, при этом $\varphi_0^{(\nu)}\,|_{S_1^\circ} = 0$, где $\varphi_0 \in V(S_1)$ — решение задачи (6.1).

При решении двойственной задачи на минимум (с фиксированными множителями Лагранжа) использован процесс Ритца на базисных функциях в виде потенциалов (2.4), удовлетворяющих линейному ограничению задачи — уравнению равновесия. При этом граница S_1 возможного контакта аппроксимировалась изопараметрическими граничными элементами второго порядка и решение гранично-элементной аппроксимации задачи на минимум на базисных функциях МГЭ [2]

$$\psi_1 = {}^1/_2\eta\,(1-\eta), \quad \psi_2 = (1-\eta)(1+\eta), \quad \psi_3 = {}^1/_2\eta\,(1+\eta)$$

осуществлялось согласно изложенному в пп. 2, 3, 5. При записи гранично-элементных уравнений, согласно (5.4), (5.5), в крайних узлах дискретизированной границы контакта $S_{1\Delta}$ узловые значения вектора напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)$ принимались равными нулю.

Задача на максимум при ограничениях выпуклости на множители Лагранжа решалась методом градиентного спуска (обобщение метода Франка — Вулфа [14]). Условие останова итерационного процесса по λ_j задавалось так:

$$(6.2) \qquad \sum_{n=1}^{N} \Big| \int\limits_{\Delta s_n} \varphi_{\lambda_j n}\,[\mathbf{t}^{(\nu_n)}(\varphi_{\lambda_j n}) - \mathbf{p}]\,ds_n \Big| < \varepsilon$$

где ε — заданное положительное число, определяющее требуемую точность итерационного процесса по числу итераций j при фиксированном числе N граничных элементов Δs_n границы $S_{1\Delta}$. Вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ (см. (6.1)) задавался так: $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) = -\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}(y) > 0$ $(y \in S_1)$ — функция контактного нормального давления под штампом с определенной геометрией поверхности штампа в зоне контакта при действии на штамп силы

$$P = \int\limits_{-a}^{a} \mathbf{p}(y)\,dy$$

где a — полуширина симметричной относительно оси штампа возможной зоны контакта [15]. Функция $\mathbf{p}(y)$ для кругового штампа, ограниченного в пределах возможной зоны контакта S_1 кривой второго порядка $f(y) = y^2/(2R)$, была взята из [15] (с. 65). При принятой наибольшей (по оси симметрии штампа) глубине внедрения штампа $h = 0{,}02R$ и соответствующей полуширине возможной зоны контакта $a = 0{,}2R$ рассматривалось два варианта разбиения границы контакта S_1 на граничные элементы. При шести элементах и $\varepsilon = 5\cdot 10^{-2}$ в условии (6.2) наибольшая (в точке $y = 0$, лежащей на оси симметрии штампа) погрешность значений $\mathbf{p}$ и $\mathbf{t}^{(\mathbf{v})}(\varphi_{\lambda_j N})$ составила $\delta \approx 16\%$ ($j = 14$). При двенадцати элементах получены следующие значения погрешности: при $\varepsilon = 5\cdot 10^{-2}$ — $\delta \approx 14{,}5\%$ ($j = 18$); при $\varepsilon = 1\cdot 10^{-2}$ — $\delta \approx 8\%$ ($j = 29$); при $\varepsilon = 1\cdot 10^{-3}$ — $\delta \approx 1{,}5\%$ ($j = 55$) (расчеты производились на ЕС-1022). Установлено, что увеличение числа итераций j в большей степени влияет на уменьшение погрешности δ, чем увеличение числа граничных элементов N.

Рассмотренный пример является, по сути, проверочным для использованного алгоритма двойственности в том смысле, что заданные контактные напряжения $\mathbf{p}(y)$, полученные в результате решения плоской контактной задачи методом теории функций комплексного переменного [15], сравниваются с контактными напряжениями $\mathbf{t}^{(\mathbf{v})}(\varphi_{\lambda_j N})$, полученными в результате решения односторонней вариационной задачи для ГФ (1.2).

7. Сделаем некоторые выводы. В отличие от формулировок МГЭ, упомянутых в начале статьи, в предложенных вариационных формулировках системы уравнений МГЭ имеют симметричные матрицы. В сравнении с формулировкой МГЭ, использующей граничные интегральные уравнения, отсутствует сингулярность при вычислении поверхностных интегралов на этапе формирования матрицы систем. Для апостериорной оценки погрешности гранично-элементных приближений могут быть использованы значения обобщенного функционала Трефтца решаемой задачи, вычисленные на приближенных решениях [4], или значения функционала двойственной вариационной задачи [3] (в формулировке МГЭ, использующей граничные функционалы).

В то же время возможности практического использования предложенных формулировок МГЭ ограничены краевыми задачами, для которых существуют функции Грина. Если учесть, что функция Грина в явном виде требуется для получения решения в точках области по найденным граничным значениям, то возможно применение формулировок МГЭ в контактных задачах линейной теории упругости, в которых интересуются распределением перемещений и напряжений в точках границы контакта. Для таких задач достаточно выполнения условий на данные задачи, при которых существует функция Грина, построение же ее в явном виде не обязательно.

Следует отметить возможность двойственной формулировки МГЭ на основе двойственной вариационной задачи для граничных функционалов в терминах поверхностных напряжений [3].

В заключение отметим, что изложенные вариационные формулировки МГЭ для задач линейной теории упругости могут быть применены также для других эллиптических краевых задач с использованием вариационной постановки задач для граничных функционалов, вытекающей из ортогональных разложений на границе области в эллиптических краевых задачах [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир. 1982. 248 с.
2. *Бенерджи П. К., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир. 1984. 494 с.
3. *Терещенко В. Я.* Двойственные вариационные задачи для граничных функционалов линейной теории упругости // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1053—1059.
4. *Терещенко В. Я.* Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории

упругости // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1976. Т. 16. № 4. С. 996—1005.
5. *Терещенко В. Я.* Об одном подходе к исследованию задачи Синьорини, использующем идеи двойственности // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 116—123.
6. *Терещенко В. Я.* Метод ортогональных разложений на границе области в трехмерных задачах линейной теории упругости // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 688—697.
7. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир. 1974. 159 с.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 1970. 512 с.
9. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1968. 627 с.
10. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз. 1962. 254 с.
11. *Норри Д. Фриз Ж. де.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
12. *Терещенко В. Я.* О процессе Ритца при построении приближенных решений задач теории упругости обобщенным методом Трефтца // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 4. С. 1063—1066.
13. *Бермант А. Ф.* Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. М.: Физматгиз. 1958. 306 с.
14. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир. 1973. 244 с.
15. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат. 1953. 264 с.
16. *Терещенко В. Я.* Ортогональные разложения на границе области в эллиптических краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 3. С. 476—486.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
11.III.1987