Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАХДИ — ХСУ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Бородачев А. Н.

Рассматривается следующая модель неоднородности упругого материала: модуль сдвига материала постоянен, а коэффициент Пуассона (или модуль упругости) произвольным образом зависит от трех декартовых координат. Вводится линейное преобразование векторных полей, являющееся обобщением известного преобразования Нахди — Хсу [1, 2] (ПНХ), которое позволяет указать представление решения уравнения равновесия теории упругости для тел с переменным коэффициентом Пуассона через векторную функцию (являющуюся гармонической при отсутствии объемных сил) и доказать его полноту. Попутно формулируется новый вариант ПНХ, в котором интегралы по объему тела заменены интегралами по его поверхности. Приводится в явном виде фундаментальное решение уравнения равновесия в перемещениях для неограниченного тела с неоднородностью рассматриваемого типа.

Некоторые задачи в данном направлении исследованы в [3—5].

1. Пусть изотропный упругий материал занимает ограниченную регулярную область V с границей S трехмерного вещественного евклидова пространства R^3, точки которого будем обозначать $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Модуль сдвига $\mu > 0$ упругого материала постоянный, а коэффициент Пуассона $\nu(\mathbf{x})$ — произвольная функция из класса C^1, удовлетворяющая стандартным условиям $-1 < \nu(\mathbf{x}) < {}^1/_2$ [6]. В этом случае модуль упругости материала $E(\mathbf{x}) = 2\mu[1 + \nu(\mathbf{x})]$ — положительно-определенная функция координат.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — векторы перемещений и объемных сил, Δ и ∇ — операторы Лапласа и градиента в R^3, $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Уравнение равновесия в перемещениях для данной модели неоднородности упругого материала имеет вид

$$(1.1)\qquad L\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mu^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in V$$
$$L\mathbf{u} \equiv \Delta\mathbf{u} + \nabla(\eta\nabla\cdot\mathbf{u}),\quad \eta(\mathbf{x}) = [1 - 2\nu(\mathbf{x})]^{-1}$$

Применяя операции дивергенции и ротора к уравнению (1.1), заключаем, что если $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ и $\nabla\times\mathbf{F} = 0$, то функции $(1+\eta)\nabla\cdot\mathbf{u}$ и $\nabla\times\mathbf{u}$ гармонические. В случае однородного материала гармоническими являются, как известно [6], функции $\nabla\cdot\mathbf{u}$ и $\nabla\times\mathbf{u}$.

Уравнение (1.1) удовлетворяется тождественно, если положить

$$(1.2)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \frac{1}{8\pi}\nabla\int_V \frac{\gamma(\mathbf{y})\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dV(\mathbf{y})$$
$$\gamma(\mathbf{x}) = [1 - \nu(\mathbf{x})]^{-1}$$
$$\Delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\mu^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in V$$

где второе слагаемое в первом соотношении (1.2) — градиент частного решения уравнения Пуассона $\Delta b = -{}^1/_2\gamma\nabla\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{x}\in V$.

Иной подход к построению решения уравнения (1.1) через четыре скалярные функции изложен в [7].

В случае однородного материала соотношения (1.2) сводятся к известному решению Нахди—Хсу [1], связь которого с представлениями Папковича—Нейбера и Галеркина установлена в [2].

Далее введем линейное преобразование, обобщающее ПНХ [2] и тесно связанное с уравнением (1.1). Его использование позволяет, в частности, доказать полноту представления (1.2).

Лемма. Произвольное векторное поле $\mathbf{N}$ в V допускает единственное представление типа

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \frac{1}{8\pi}\nabla\int_V \frac{\gamma(\mathbf{y})\nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,dV(\mathbf{y}) \tag{1.3}$$

где

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi}\nabla\int_V \frac{\eta(\mathbf{y})\nabla\cdot\mathbf{N}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,dV(\mathbf{y}) \tag{1.4}$$

Обратно, если $\mathbf{H}$ — произвольное векторное поле в V, то оно допускает единственное представление типа (1.4), где $\mathbf{N}$ определяется формулой (1.3).

Доказательство. Применяя операцию дивергенции к (1.4) с использованием соотношения [8]

$$\Delta\int_V \varphi(\mathbf{y})\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}dV(\mathbf{y}) = -4\pi\varphi(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

где φ — произвольная функция, находим $\nabla\cdot\mathbf{N} = (2\eta)^{-1}\,\gamma\nabla\cdot\mathbf{H}$. Подставляя это выражение в (1.4), получаем представление (1.3).

Для доказательства единственности допустим, что имеется два представления типа (1.3): $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$. Тогда, составляя разность правых частей (1.3) и вычисляя ее дивергенцию при помощи (1.5), находим: $\nabla\cdot(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$, после чего заключаем, что $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$.

Доказательство обратного утверждения леммы проводится аналогично.

Соотношения (1.3) и (1.4), связывающие векторные поля $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H}$, будем называть обобщенным преобразованием Нахди—Хсу (ОПНХ).

Определим пространства $N = \{\mathbf{N}(\mathbf{x})\colon L\mathbf{N}(\mathbf{x}) = -\mu^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in V\}$ и $H = \{\mathbf{H}(\mathbf{x})\colon \Delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\mu^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in V\}$. Связь ОПНХ с уравнением (1.1) устанавливает следующая

Теорема. ОПНХ (1.3) и (1.4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами N и H.

Доказательство. Действуя оператором L на (1.3) или оператором Δ на (1.4), получаем тождество $L\mathbf{N}(\mathbf{x}) \equiv \Delta\mathbf{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in V$. Доказательство теоремы завершается с использованием леммы и этого тождества.

В качестве следствия из теоремы заключаем, что представление решения уравнения (1.1) в виде (1.2) является полным. Более того, векторная функция $\mathbf{B}$, гармоническая при отсутствии объемных сил, определяется по полю перемещений единственным образом:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi}\nabla\int_V \frac{\eta(\mathbf{y})\,\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,dV(\mathbf{y}) \tag{1.6}$$

Вычисляя дивергенцию и ротор от (1.2) или (1.6), находим

$$(1+\eta)\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{B},\quad \nabla\times\mathbf{u} = \nabla\times\mathbf{B}$$

С использованием формул связи напряжений и перемещений [7] и (1.2) получаем представления компонентов тензора напряжений через векторную функцию $\mathbf{B}$ (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\mu^{-1}\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}\nu(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \frac{\partial B_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int_V \frac{\gamma(\mathbf{y})\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dV(\mathbf{y}) \tag{1.7}$$

2. В случае однородного материала, когда $\nu(\mathbf{x}) = \nu \equiv \text{const}$, формулы (1.2) и (1.6) переходят в известное ПНХ [2]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\nabla\int_V \frac{\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dV(\mathbf{y}) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi(1-2\nu)}\nabla\int_V \frac{\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dV(\mathbf{y})$$

Покажем, что при отсутствии объемных сил объемные интегралы в соотношениях (2.1) могут быть заменены интегралами по поверхности S. Действительно, для произвольной гармонической функции $\varphi(\mathbf{x})$ имеем [9] ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S)

$$\int_V \frac{\varphi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dV(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\int_S \left[\varphi(\mathbf{y})\frac{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\partial\varphi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right]dS(\mathbf{y}) \tag{2.2}$$

Учитывая, что при $\mathbf{F} = 0$ функции $\nabla\cdot\mathbf{u}$ и $\nabla\cdot\mathbf{B}$ гармонические в V, и используя (2.2), приводим (2.1) к виду

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \frac{1}{16\pi(1-\nu)}\nabla\int_S \left\{[\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y})]\frac{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\partial[\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y})]}{\partial\mathbf{n}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right\}dS(\mathbf{y}) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{8\pi(1-2\nu)}\nabla\int_S \left\{[\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{y})]\frac{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\partial[\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{y})]}{\partial\mathbf{n}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right\}dS(\mathbf{y})$$

Соотношения (2.3) представляют собой новый вариант ПНХ, в котором интегралы по объему тела V заменены интегралами по его поверхности S.

Как уже отмечалось, векторная функция $\mathbf{B}$ определяется по полю перемещений единственным образом. Это позволяет, как указано в [2], использовать ПНХ (2.1) при решении конкретных задач методом конечных элементов. Применение для этих целей потенциальных функций Папковича—Нейбера не представляется возможным [10], так как они определяются по полю перемещений неединственным образом. В связи с этим отметим, что модификация ПНХ (2.3) может, по-видимому, оказаться полезной при решении краевых задач методом граничных элементов [11], основу которого составляет приведение задачи к интегральным уравнениям по поверхности тела.

3. До сих пор предполагалось, что область V ограниченная. Для неограниченных областей представление решения (1.2) остается справедливым, если ввести оператор градиента под знак интеграла. В результате получаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \frac{1}{8\pi}\int_V \gamma(\mathbf{y})\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y})\nabla_x(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1})dV(\mathbf{y}) \tag{3.1}$$

или, при учете соотношения $\nabla_x(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}) = -\nabla_y(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1})$

$$(3.2)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \frac{1}{8\pi}\int_V \gamma(\mathbf{y})\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y})\nabla_y(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1})\,dV(\mathbf{y})$$

Действительно, $\gamma(\mathbf{y}) = O(1)$, $\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{y}) = O(|\mathbf{y}|^{-2})$, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} = O(|\mathbf{y}|^{-1})$, $\nabla(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}) = O(|\mathbf{y}|^{-2})$ при $|\mathbf{y}| \to \infty$ и подынтегральные выражения в (3.1) и (3.2) имеют порядок $|\mathbf{y}|^{-4}$ при $|\mathbf{y}| \to \infty$ (в отличие от подынтегрального выражения в (1.2), имеющего порядок $|\mathbf{y}|^{-3}$ при $|\mathbf{y}| \to \infty$), так что интегралы в (3.1) и (3.2) сходятся.

Представление (3.2) (или (3.1)) позволяет построить в явном виде фундаментальное решение уравнения равновесия для неограниченного упругого тела, модуль сдвига которого постоянный, а коэффициент Пуассона (или модуль упругости) произвольным образом зависит от трех декартовых координат.

Пусть $V = R^3$ и в некоторой точке $\xi \in R^3$ действует единичная сосредоточенная сила, направленная параллельно оси Ox_k. В этом случае компоненты вектора объемных сил имеют вид

$$F_i = \delta(\mathbf{x}-\xi)\,\delta_{ik}\qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — трехмерная функция Дирака, а векторная функция $\mathbf{B}^{(k)}$ определяется из уравнений

$$\Delta_x B_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi) = -\mu^{-1}\delta(\mathbf{x}-\xi)\,\delta_{ik}$$

частные решения которых, затухающие на бесконечности, имеют вид

$$(3.3)\qquad B_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\delta_{ik}}{4\pi\mu|\mathbf{x}-\xi|}$$

При помощи (3.3) вычисляем

$$(3.4)\qquad \nabla_x\cdot\mathbf{B}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial}{\partial x_k}(|\mathbf{x}-\xi|^{-1})$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), получаем представление для поля перемещений, вызванных единичной сосредоточенной силой, приложенной в точке ξ и направленной параллельно оси Ox_k

$$(3.5)\qquad u_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\delta_{ik}}{4\pi\mu|\mathbf{x}-\xi|} - \frac{v_{ik}(\mathbf{x}, \xi)}{32\pi^2\mu}$$

$$v_{ik}(\mathbf{x}, \xi) = \int_{R^3}\gamma(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_k}(|\mathbf{y}-\xi|^{-1})\frac{\partial}{\partial y_i}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1})\,dV(\mathbf{y})$$

Несобственные интегралы в (3.5) сходятся при $\mathbf{x} \neq \xi$, а в точке $\mathbf{x} = \xi$ имеют особенность типа $|\mathbf{x}-\xi|^{-1}$. Следовательно, как и в случае однородного материала, фундаментальное решение (3.5) имеет в точке приложения силы особенность порядка $|\mathbf{x}-\xi|^{-1}$.

При $\nu(\mathbf{x}) = \nu \equiv \mathrm{const}$ функции v_{ik} вычисляются в явном виде при помощи трехмерного интегрального преобразования Фурье:

$$v_{ik}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{2\pi}{1-\nu}\frac{\partial^2|\mathbf{x}-\xi|}{\partial x_i\partial x_k}$$

Отсюда получаем известное представление фундаментального решения уравнения равновесия однородной теории упругости — матрицу Кельвина [6].

Заметим, что при помощи соотношений (1.7), (3.3) и (3.4) можно вычислить поле напряжений, вызванное действием единичной сосредоточенной силы в неограниченном упругом теле с неоднородностью рассматриваемого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Naghdi P. M., Hsu C. S.* On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions // J. Math. Mech. 1961. V. 10. No. 2. P. 233—245.
2. *Wang M. Z.* The Naghdi — Hsu solution and the Naghdi — Hsu transformation// J. Elast. 1985. V. 15. No. 1. P. 103—108.
3. *Бородачев А. Н., Дудинский В. И.* Контактная задача для упругого полупространства с переменным коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 86—91.
4. *Плевако В. П.* Двумерная обратная задача теории упругости неоднородных сред в полярных координатах // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 775—783.
5. *Gibson R. E., Sills G. C.* On the loaded elastic half-space with a depth varying Poisson's ratio // Z. angew. Math. und Phys. 1969. B. 20. H. 5. S. 691—695.
6. *Gurtin M. E.* The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik. B., e.a.: Springer. 1972. V. VIa/2. P. 1—295.
7. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ. 1976. 367 с.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 1958. 439 с.
9. *Stippes M., Rizzo F. J.* A note on the body force integral of classical elastostatics // Z. angew. Math. und Phys. 1977. B. 28. H. 2. S. 339—341.
10. *Benthem J. P.* Note on the Boussinesq — Papkovich stress-functions // J. Elast. 1979. V. 9. No. 2. P. 201—206.
11. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.

Киев

Поступила в редакцию
22.IV.1986