

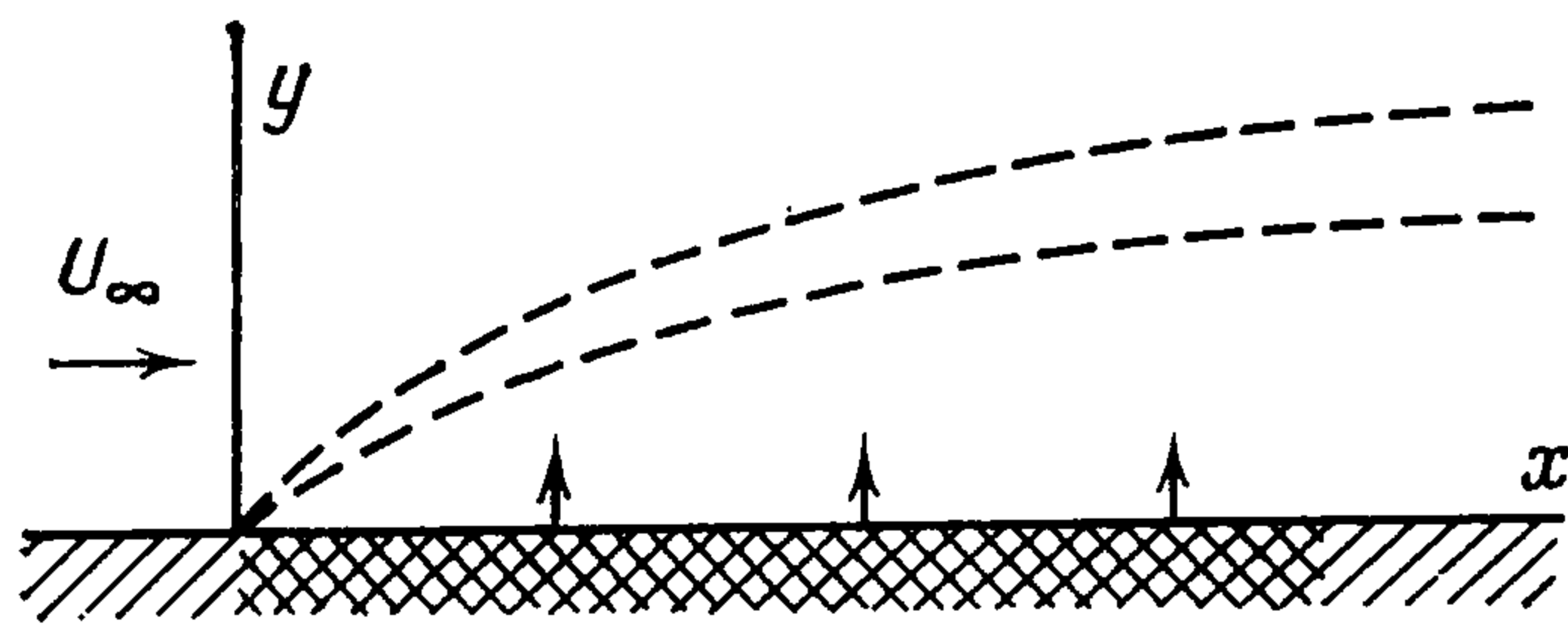
УДК 533.6.011

СИЛЬНЫЙ ВДУВ ГАЗА В СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ СМЕШЕНИИ

Вигдорович И. И.

Исследуется сильный распределенный вдув газа в сверхзвуковой поток через пронцаемую пластину, когда пограничный слой (ПС) оттеснен от обтекаемой поверхности и вдуваемый газ в невязкой пристеночной области отделен от набегающего потока турбулентным слоем смешения (СС). Формулируется критерий отсоединения турбулентного ПС при вдуве и правило подобия, отражающее зависимость течения на пластине от условий в конце пронцаемого участка. Даются универсальные кривые для распределения давления и толщины слоя вдува, рассчитываются силовые характеристики потока. Устанавливается применимость, с соответствующей поправкой на турбулентное смешение, решения, полученного на основе более простой модели течения, в которой СС заменен поверхностью контактного разрыва.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание плоской пластины, расположенной под нулевым углом атаки к набегающему потоку, при вдуве газа через пронцаемый участок на ее поверхности. Газ



Фиг. 1

вдувается равномерно по нормали к пластине с постоянными расходом q_w и температурой газа на стенке T_w . Предположим, что в результате вдува ПС оттеснен от всей пронцаемой поверхности, так что вдуваемый газ в невязкой пристеночной области 1 (фиг.

1) отделен от внешнего потока турбулентным СС 2, развивающимся от начала пронцаемого участка. Такая схема течения соответствует экспериментальным данным, например [1, 2].

Обозначим ϵ и δ порядки относительных толщин СС и невязкой части слоя вдува. Поскольку ПС оттеснен от стенки за счет вдува, поперечная компонента потока масса в пристеночной области по порядку величины не меньше чем в СС. Продольная компонента, наоборот, не больше чем в СС. Отсюда и из уравнения неразрывности следует, что $\delta \geq O(\epsilon)$.

Рассмотрим невязкую часть слоя вдува. Будем использовать безразмерные переменные. Декартовы координаты отнесем к длине пронцаемого участка l , давление — к P_∞ , плотность — к $m_w P_\infty / (kT_w)$, компоненты скорости — к $\sqrt{kT_w/m_w}$, функцию тока — к $lP_\infty \sqrt{m_w / (kT_w)}$, где k — постоянная Больцмана, m_w — молекулярный вес вдуваемого газа; индексом ∞ обозначены параметры невозмущенного набегающего потока. Согласно концепции «тонкого слоя» [2, 3], будем считать $\delta \ll 1$. При умеренных сверхзвуковых скоростях набегающего потока по линейной теории в слое вдува $p - 1 = O(\delta)$, отсюда на основании интегралов адиабатичности и Бернулли, а затем уравнения неразрывности в пристеночной области

$$p - 1 = O(\delta), u = O(\delta^{1/2}), v = O(\delta^{3/2}), \psi = O(\delta^{3/2})$$

Из оценки для поперечной скорости и граничного условия на теле следует, что можно принять $\delta = (q_w / P_\infty)^{2/3} (kT_w / m_w)^{1/3}$.

Из условия равенства порядков величин поперечной скорости в пристеночной области и СС получим $\varepsilon = O(\delta^{3/2})$. Иными словами, при отсоединении ПС от стенки его толщина много меньше толщины невязкой части слоя вдува, а расход газа в них, в общем случае, одного порядка. Главную роль в СС играют силы вязкости. Поскольку возмущение давления мало, а течение в пристеночной области медленное, в пределе при $\delta \rightarrow 0$ для СС имеет место задача об изобарическом смешении сверхзвукового потока с покоящимся газом, имеющим физические параметры вдуваемого газа на стенке [3, 4]. Если толщина ПС в месте начала вдува пренебрежимо мала, задача автомодельна. Автомодельность профилей скорости в слое вдува наблюдалась в экспериментах [5].

Обозначим q_0 расход газа, поступающего в автомодельный СС со стороны области покоя. Величина q_0 / q_∞ , где q_∞ — расход сверхзвукового потока, в общем случае будет зависеть от отношения температур и молекулярных весов вдуваемого газа и набегающего потока, показателей адиабаты, числа Маха, турбулентных чисел Прандтля и Шмидта. Конкретный вид такой зависимости может быть получен из решения соответствующей системы уравнений для СС при наличии данных о входящих в эту систему эмпирических постоянных. Однако в настоящее время эти данные весьма ограничены.

Если предположить, что скоростной напор эжектируемого газа целиком определяется числом Маха и скоростным напором набегающего потока [6], можно использовать следующую приближенную формулу:

$$(1.1) \quad q_0/q_\infty = b (M_\infty) \sqrt{m_w T_\infty / (m_\infty T_w)}$$

Такая зависимость при $M_\infty = 0$ предложена [7] как результат расчетов на основе гипотезы о пути смешения. Кроме того, в близкой задаче об осесимметричной затопленной струе пропорциональность присоединенного расхода квадратному корню из отношения плотностей хорошо подтверждается прямыми измерениями [8]. Коэффициент b убывает с ростом числа Маха. По данным [7], $b \simeq 0,03$ для $M_\infty = 0$ и, по-видимому, меньше этой величины в несколько раз при сверхзвуковых числах Маха [9].

В соответствии с приведенными выше оценками газодинамических функций введем в пристеночной области новые независимые переменные Мизеса x и $\Psi = \delta^{-3/2}\psi$, а зависимые переменные разложим в асимптотические ряды по малому параметру δ . Эти асимптотические разложения, а также система уравнений первого приближения с граничными условиями на пластине и внешней границе пристеночной области, примыкающей к СС, имеют вид [10].

$$(1.2) \quad \begin{aligned} y &\sim \delta Y + \dots, & p &\sim 1 + \delta P + \dots, & \rho &\sim 1 + \delta R + \dots \\ u &\sim \delta^{1/2} U + \dots, & v &\sim \delta^{3/2} V + \dots \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} (1/2 U + P)_x &= 0, & P_\Psi &= 0, & (P - \gamma_w R)_x &= 0 \\ Y_\Psi &= 1/U, & Y_x &= V/U \\ \Psi &= -x, & 0 \leq x \leq 1: & Y = 0, & U = 0, & V = 1, & R = P \\ \Psi &= -q_0 x / q_w, & 0 \leq x \leq 1: & P = \gamma_\infty M_\infty^2 (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} \times dY/dx \end{aligned}$$

Уравнения тонкого слоя (1.3) получены подстановкой разложений (1.2) в уравнения Эйлера, граничное условие на внешней границе задается по формуле Аккерета для давления на тонком профиле. При этом учтено,

что толщина вытеснения СС пренебрежимо мала по сравнению с толщиной всего слоя вдува.

2. Критерий отсоединения ПС. Правило подобия. Выражение для функции тока на внешней границе невязкой области можно переписать в виде

$$\Psi = -\frac{B_* x}{B}, \quad B = \frac{q_w}{q_\infty} \sqrt{\frac{m_\infty T_w}{m_w T_\infty}}, \quad B_* = \frac{q_0}{q_\infty} \sqrt{\frac{m_\infty T_w}{m_w T_\infty}}$$

Невязкая область вблизи стенки возникает, когда параметр вдува $B > B_*$. Величину B_* можно рассматривать как критическое значение параметра вдува, при котором происходит отсоединение турбулентного ПС от начала проницаемого участка, где толщина натекающего ПС пренебрежимо мала. Если для величины q_0 использовать формулу (1.1), то величина $B_* = b(M_\infty)$ зависит только от числа Маха набегающего потока.

Интегрирование уравнений тонкого слоя (1.3) дает следующее интегральное уравнение для давления на пластине [10]:

$$(2.1) \quad \int_{x/\omega}^x [P(\xi) - P(x)]^{-1/2} d\xi = \frac{\sqrt{2(M_\infty^2 - 1)}}{\gamma_\infty M_\infty^2} \times \\ \times \int_0^x P(\xi) d\xi, \quad \omega = \frac{B}{B_*}$$

Поскольку вектор скорости вдуваемого газа направлен по нормали к поверхности, в соответствии с линейной теорией сверхзвукового обтекания $P(0) = +\infty$. Переходя в (2.1) к независимой переменной $t = -(M_\infty^2 - 1)^{1/3} (\gamma_\infty M_\infty^2)^{-2/3} P$, получим систему уравнений для функций $x(t)$ и $r(t)$

$$(2.2) \quad \int_{r(t)}^t \frac{x'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = -\sqrt{2} \int_{-\infty}^t \tau x'(\tau) d\tau, \quad x[r(t)] = \frac{x(t)}{\omega}$$

содержащую единственный параметр ω , изменяющийся в диапазоне $1 < \omega < \infty$. Относительный параметр вдува ω выражает отношение расходов газа, протекающих через поверхность пластины и нижнюю границу СС. Условие $\omega \rightarrow 1$ соответствует околоскритическому вдуву. Другой предельный случай $\omega = \infty$ имеет место при достаточно большом вдуве, когда расход газа, подсасываемого в зону смешения, сравнительно мал, и СС можно принять за контактную поверхность.

Функция $x(t)$ в (2.2) определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. Это указывает на необходимость постановки дополнительного краевого условия [3, 10], в качестве которого можно задать, например, давление в месте прекращения вдува. Решение уравнения (2.2) $x_0(t, \omega)$ на всей прямой $-\infty < t < +\infty$, удовлетворяющее граничному условию $x_0(+\infty, \omega) = 1$, имеет универсальный характер. Любое решение уравнения (2.2), соответствующее некоторому давлению на конце проницаемого участка t_1 , выражается через него по формуле $x(t) = x_0(t, \omega)/x_0(t_1, \omega)$, $-\infty < t \leq t_1$. Само универсальное решение $x_0(t, \omega)$ отвечает распределению давления с особенностью в месте прекращения вдува $P(1) = -\infty$. Такая ситуация возникает, например, если проницаемая пластина заканчивается уступом, за которым создано достаточно низкое донное давление [3].!

Сказанное можно сформулировать как правило подобия для исследуемого течения, согласно которому распределение самоиндуцированного давления на пластине можно представить в следующем параметрическом виде:

$$(2.3) \quad x = x_0(c_p', \omega)/x_0(c_{p1}', \omega), \quad c_p' = -2t \\ c_p = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} B^{1/2} c_p'$$

где c_{p1}' — значение преобразованного коэффициента давления в месте прекращения вдува. Для распределения толщины слоя вдува y_δ , а также коэффициентов силы и момента будем иметь

$$(2.4) \quad y_\delta = (M_\infty^2 - 1)^{1/2} B^{1/2} y_0(c_p', \omega)/x_0(c_{p1}', \omega) \\ c_y' = (M_\infty^2 - 1)^{1/2} B^{-1/2} c_y = 2y_0(c_{p1}', \omega)/x_0(c_{p1}', \omega) \\ c_m' = (M_\infty^2 - 1)^{1/2} B^{-1/2} c_m = 2z_0(c_{p1}', \omega)/x_0^2(c_{p1}', \omega) \\ y_0(t, \omega) = - \int_{-\infty}^t \tau x_0'(\tau, \omega) d\tau, \quad z_0(t, \omega) = \int_{-\infty}^t x_0(\tau, \omega) y_0'(\tau, \omega) d\tau$$

Более простая приближенная форма правила подобия (2.3) будет дана в п. 7.

3. Асимптотика решения при $t \rightarrow -\infty$. В частном случае $\omega = \infty$ имеем $r(t) \equiv -\infty$, и интегральное уравнение (2.2) допускает аналитическое решение, полученное [11] операционным методом. Его асимптотическое разложение при $t \rightarrow -\infty$ имеет вид ¹

$$(3.1) \quad x_0(t, \infty) \sim \frac{\sqrt{2}}{2} (-t)^{-1/2} \exp\left(\frac{2t^3}{3\pi}\right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\pi^n (6n+1)!!}{3(2n+1)! 6^{2n}} + \frac{2}{3} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^n (2n-1)!! \sum_{m=0}^n \frac{(1/6)_m (5/6)_m}{(3/2)_m m!} \right] t^{3n}$$

($(a)_m$ — символы Похгаммера [12]). Асимптотическое представление решения уравнения (2.2) в общем случае будем искать в аналогичном (3.1) виде

$$(3.2) \quad x_0(t, \omega) \sim 1/2 \sqrt{2} N (-t)^{-\beta} \exp(\alpha t^3) [1 - a_1 t^{-3} + a_2 t^{-6} + \dots]$$

$$(3.3) \quad r(t) \sim t - b_1 t^{-2} + b_2 t^{-5} - b_3 t^{-8} + \dots, \quad t \rightarrow -\infty$$

где коэффициенты α , β , a_n , b_n подлежат определению, N будет выбрано в дальнейшем из условия $x_0(+\infty, \omega) = 1$. Прологарифмировав второе соотношение (2.2) и подставив в него (3.2), (3.3), после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях и логарифмах t получим

$$b_1 = \lambda (3\alpha)^{-1}, \quad b_2 = -\lambda (\lambda + \beta) (3\alpha)^{-2} \\ b_3 = (5/3 \lambda^3 + 7/2 \beta \lambda^2 + \beta^2 \lambda - 9\alpha \lambda a_1) (3\alpha)^{-3}, \quad \lambda = \ln \omega$$

Из (3.2) будем иметь

$$(3.4) \quad x_0'(t, \omega) \sim 3/2 \sqrt{2} \alpha N (-t)^{2-\beta} \exp(\alpha t^3) \times \\ \times \left[1 - \left(a_1 + \frac{\beta}{3\alpha}\right) t^{-3} + \left(a_2 + \frac{\beta+3}{3\alpha} a_1\right) t^{-6} + \dots \right]$$

$$(3.5) \quad y_0(t, \omega) \sim 1/2 \sqrt{2} N (-t)^{1-\beta} \exp(\alpha t^3) \times \\ \times \left[1 - \left(a_1 + \frac{1}{3\alpha}\right) t^{-3} + \left(a_2 + \frac{a_1}{3\alpha} - \frac{\beta+2}{9\alpha^2}\right) t^{-6} + \dots \right]$$

¹ Вигдорovich И. И. Сверхзвуковое обтекание тел при наличии интенсивного вдува: Дис.... канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т механики МГУ, 1981. 145 с.

Уравнение (2.2) удобно преобразовать к виду

$$(3.6) \quad \sqrt{2} y_0(t, \omega) = \sqrt{t - r(t)} \int_0^1 x_0'[(t - r(t))\tau - t, \omega] \tau^{-1/2} d\tau$$

Разложим при помощи (3.3)—(3.5) обе части уравнения (3.6) в ряд до членов порядка t^{-6} . После интегрирования из сравнения асимптотических разложений в обеих частях уравнения для искоемых коэффициентов получим

$$(3.7) \quad \alpha = \frac{2}{3\pi} (\operatorname{erf} \sqrt{\lambda})^{-2}, \quad \beta = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} (\omega \operatorname{erf} \sqrt{\lambda})^{-1}$$

$$a_1 = -\frac{7\lambda}{24\omega^2} - \frac{17\pi}{24} \operatorname{erf}^2 \sqrt{\lambda} - \frac{\sqrt{\pi}}{24\omega} \left(\frac{11}{3} \lambda + \frac{37}{2} \right) \operatorname{erf} \sqrt{\lambda}$$

Предельный переход при $\omega \rightarrow \infty$ дает для коэффициентов (3.7) величины, соответствующие разложению (3.1). Согласно (3.2), распределение давления имеет слабую логарифмическую особенность в начале проницаемого участка при $x = 0$.

4. Асимптотика решения при $t \rightarrow +\infty$. Аналитическое решение уравнения (3.2) имеет при $t \rightarrow +\infty$ асимптотическое разложение [11]

$$(4.1) \quad x_0(t, \infty) \sim 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2} (-\pi)^n (6n+1)!!}{(2n+1)! 6^{2n+1}} t^{-3/2-3n}$$

В общем случае по аналогии с (4.1) положим

$$(4.2) \quad x_0(t, \omega) = 1 - At^{-3/2} + O(t^{-5/2}), \quad t \rightarrow +\infty$$

Введем обозначения $R = r(+\infty)$, $Y = y_0(R, \omega)$, $w = t - R$. Подставляя (4.2) во второе соотношение (2.2), будем иметь

$$(4.3) \quad \varepsilon(w) \equiv R - r(w) = \frac{Aw^{-3/2}}{\omega x_0'(R, \omega)} + O(w^{-5/2}), \quad w \rightarrow +\infty$$

Перепишем интегральное уравнение (2.2) в виде

$$(4.4) \quad \int_0^w \frac{x_0'(R + \tau, \omega)}{\sqrt{2(\omega - \tau)}} d\tau + g(w) = Y - \int_0^w (R + \tau) x_0'(R + \tau, \omega) d\tau$$

$$(4.5) \quad g(w) = \int_0^1 \frac{x_0'(R - \varepsilon(w)\tau, \omega)}{\sqrt{2(w + \varepsilon(w)\tau)}} d\tau, \quad w \geq 0$$

$$(4.6) \quad g(w) = \frac{A\sqrt{2}}{2\omega w^2} + O(w^{-3}), \quad w \rightarrow +\infty$$

Асимптотическое представление (4.6) получено в результате подстановки (4.3) в интеграл (4.5). Применим к интегральному уравнению (4.4) преобразование Лапласа [13].

Обозначим $X(z)$, $G(z)$ изображения по Лапласу функций $x_0'(R + w, \omega)$ и $g(w)$ соответственно. По теореме о свертке [13] для $X(z)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого

$$X(z) = \left[C + \int_0^z (\zeta G(\zeta) - Y) H(\zeta) d\zeta \right] / H(z)$$

$$C = \int_0^{\infty} (Y - zG(z)) H(z) dz, \quad H(z) = \exp\left(-\frac{\sqrt{2\pi}}{3} z^{3/2} - Rz\right)$$

Теперь функцию $x_0(t, \omega)$ при помощи интеграла обращения Меллина [13] можно представить в виде

$$(4.7) \quad x_0(t, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(z) \exp(zt) \frac{dz}{z}, \quad \sigma > 0, \quad t \geq R$$

$$Z(z) = (X(z) + x_0(R, \omega)) \exp(-Rz)$$

Асимптотическое представление (4.6) позволяет написать [14]

$$G(z) = G_0 + \frac{1}{2} \sqrt{2A} \omega^{-1} z \ln z + G_1 z + O(z^2 \ln z), \quad z \rightarrow 0$$

где G_0, G_1 — некоторые постоянные, зависящие от поведения функции $g(w)$ на всей полуоси $0 \leq w < +\infty$. Разложим функцию $Z(z)$ в асимптотический ряд при $z \rightarrow 0$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} Z(z) = & C + 1/\omega - (Y + R/\omega)z + \frac{1}{3}C \sqrt{2\pi} z^{3/2} + \\ & + \frac{1}{2}(G_0 + RY + R^2/\omega)z^2 - \frac{1}{5}Y \sqrt{2\pi} z^{5/2} + \\ & + \frac{1}{6}A \sqrt{2} z^3 \ln z/\omega + \frac{1}{3}(G_1 - G_0 R - \frac{1}{2}YR^2 - \\ & - \frac{1}{6}A \sqrt{2}/\omega + \frac{1}{9}C\pi - \frac{1}{6}R^3/\omega)z^3 + \frac{1}{3}\sqrt{2\pi} (\frac{1}{2}RY + \\ & + \frac{3}{14}G_0) z^{7/2} + O(z^4 \ln z) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в силу определения величины R и второго соотношения (2.2.) $x_0(R, \omega) = 1/\omega$. Подставим теперь (4.8) в интеграл (4.7) и изменим порядок интегрирования и суммирования. В результате получим асимптотическое разложение универсальной функции $x_0(t, \omega)$ при $t \rightarrow +\infty$ [13]. Члены суммы (4.8) с целыми степенями z не дают вклада в асимптотику оригинала. После сопоставления полученного таким образом асимптотического ряда с (4.2) определим искомые коэффициенты. Окончательно будем иметь

$$(4.9) \quad \begin{aligned} x_0(t, \omega) = & 1 - \frac{(\omega-1)\sqrt{2}}{6\omega} t^{-3/2} - \frac{3\sqrt{2}}{20} Y t^{-5/2} + \\ & + \frac{\omega-1}{9\omega^2} t^{-3} + O(t^{-7/2}), \quad y_0(t, \omega) = \frac{(\omega-1)\sqrt{2}}{2\omega} t^{-1/2} + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{4} Y t^{-3/2} - \frac{\omega-1}{6\omega^2} t^{-2} + O(t^{-5/2}), \quad t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Величина Y остается неопределенной. Так как $Y \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, в пределе первое соотношение (4.9) совпадает с (4.1). Второе асимптотическое разложение (4.9) получено из первого на основании (2.4).

5. Околокритический вдув. Для исследования асимптотики решения при $\omega \rightarrow 1$ удобно использовать уравнение (2.1), переписанное в виде

$$(5.1) \quad \sqrt{2} y_0(x_0, \omega) = \int_{x_0/\omega}^{x_0} [y_0'(\xi, \omega) - y_0'(x_0, \omega)]^{-1/2} d\xi$$

Будем искать решение (5.1) в форме следующего асимптотического ряда:

$$(5.2) \quad y_0(x_0, \omega) = \mu^{1/3} [\eta_1(x_0) + \mu \eta_2(x_0) + O(\mu^2)], \quad \mu = 1 - 1/\omega$$

Перейдем в (5.1) к переменной интегрирования τ по формуле $\xi - x_0 = -\mu x_0 \tau^2$ и разложим стоящую под корнем разность в ряд Тейлора в точке x_0

$$\begin{aligned} y_0'(\xi, \omega) - y_0'(x_0, \omega) = & \mu^{1/3} [-\mu x_0 \tau^2 \eta_1''(x_0) + \\ & + \frac{1}{2} \mu^2 x_0^2 \tau^4 \eta_1'''(x_0) - \mu^2 x_0 \tau^2 \eta_2''(x_0) + O(\mu^3)] \end{aligned}$$

Подставив это разложение в (5.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим обыкновенные дифферен-

циальные уравнения для искомых функций

$$(5.3) \quad \eta_1 \sqrt{-\eta_1''} = \sqrt{2x_0}, \quad 2\eta_2 (-\eta_1'')^{3/2} = \sqrt{2x_0} (\eta_2'' - 1/6 x_0 \eta_1''')$$

Понизив порядок уравнения первого приближения при помощи подстановки [15]

$$(5.4) \quad x_0 = \exp\left(\int^u \frac{du}{z(u)}\right), \quad \eta_1 = ux_0(u)$$

получим уравнение Абеля второго рода

$$(5.5) \quad zz' + z + 2u^{-2} = 0$$

Если решение уравнения (5.5) известно, последующие члены ряда (5.2) могут быть получены в квадратурах. Действительно, уравнение второго приближения (5.3) после подстановки $\eta_2 = v(u)x_0(u)$ преобразуется к виду

$$(5.6) \quad u^3 z^2(u) v'' - 2uv' - 4v = 1/3 u + 2/3 z(u)$$

а соответствующие уравнения для членов разложения (5.2) более высокого порядка будут отличаться от (5.6) лишь правой частью. Теперь достаточно заметить, что функция $z(u)$ есть частное решение однородного уравнения (5.6), после чего его общий интеграл можно выписать в виде [15]

$$v = z(u) \left\{ \int^u \left[\int^{u_1} \frac{2}{3} z(u_2) x_0(u_2) \frac{du_2}{u_2^3} \right] \frac{du_1}{z^3(u_1) x_0(u_1)} \right\} - \frac{u}{18}$$

Следующая цепочка преобразований:

$$(5.7) \quad z = -u - 2w, \quad u' + u^3 + 2wu^2 = 0$$

$$(5.8) \quad \xi = w^2 - 1/u, \quad w' = \xi - w^2$$

переводит (5.5) в специальное уравнение Рикатти (5.8) [15], которое, в свою очередь, после замены переменной $w = (\ln A(\xi))'$ приводится к уравнению Эйри $A'' = \xi A$ [16]. На основании (5.7), (5.8), (5.4) будем иметь

$$u = -1/w', \quad z = 1/w' - 2w = (\ln w')'$$

$$\int^u \frac{du}{z(u)} = \int^{\xi} \frac{d\xi}{w'(\xi)} = 2 \ln A(\xi) + \ln w'(\xi)$$

$$(5.9) \quad x_0 = -w'(\xi) A^2(\xi) = A'^2(\xi) - \xi A^2(\xi), \quad \eta_1 = A^2(\xi)$$

Общее решение уравнения Эйри есть линейная комбинация функций Эйри первого и второго рода $Ai(\xi)$, $Bi(\xi)$ [16]. Определим интервал изменения параметра ξ и постоянные интегрирования, исходя из физических условий задачи. Как следует из (5.9), в точке ξ_0 , для которой $x_0 = 0$, $\eta_1 = 0$, должно быть $A(\xi_0) = 0$, $A'(\xi_0) = 0$. Эти условия не могут выполняться при конечном значении ξ_0 , поскольку уравнение Эйри не имеет особенностей в конечной плоскости. При $\xi \rightarrow -\infty$ функции Эйри осциллируют, так что $x_0(\xi)$ не стремится к нулю. При $\xi \rightarrow +\infty$ функция $Ai(\xi)$ экспоненциально убывает, а $Bi(\xi)$ возрастает, откуда следует, что $A(\xi) = D Ai(\xi)$, D — постоянная. Величины D и ξ_1 — левую границу интервала изменения ξ , определим из условий $x_0(\xi_1) = 1$, $\eta_1(\xi_1) = 0$. Это дает $\xi_1 \simeq -2,33811$ — наибольший корень функции Эйри первого рода, $D = 1/A'i(\xi_1) \simeq 1,4262$ [17].

Теперь предельное при $\omega \rightarrow 1$ распределение давления и толщины слоя вдува можно представить в следующем параметрическом виде:

$$(5.10) \quad c_p' = -4\mu^{1/3} \frac{A'i(\xi)}{Ai(\xi)} + O(\mu^{1/3})$$

$$y_0 = \mu^{1/3} [DAi(\xi)]^2 + O(\mu^{4/3})$$

$$x_0 = D^2 [Ai'^2(\xi) - \xi Ai^2(\xi)], \quad \xi_1 \leq \xi < +\infty$$

Отсюда, используя асимптотику функции Эйри при $\xi \rightarrow +\infty$ [16], получим асимптотическое представление универсальной функции, справедливое при $\omega = 1, s \rightarrow +\infty$

$$(5.11) \quad x_0 \sim \frac{D^2}{2\pi} s^{-2} \exp\left(\frac{1}{6}s^3 + 1\right) \left(1 + \frac{14}{3}s^{-3} + \frac{470}{9}s^{-6} + \dots\right),$$

$$s = \mu^{-1/3}t$$

Этот результат полностью согласуется с (3.2), (3.7), поскольку предельный переход $\omega \rightarrow 1$ в (3.7) дает $\mu\alpha = 1/6, \beta = 2, a_1\mu^{-1} = -14/3$. Кроме того, из сопоставления разложений (3.2), (5.11) будем иметь

$$(5.12) \quad N \sim \nu\mu^{\beta/3}, \quad \nu = \frac{D^2 e \sqrt{2}}{2\pi} (1 + O(\mu)), \quad \omega \rightarrow 1$$

Заметим, что асимптотическое представление универсальной функции при $\omega \rightarrow 1, s \rightarrow +\infty$, которое можно получить из (5.10) и разложения функции Эйри в нуле, не совпадает с предельной при $\omega \rightarrow 1$ формой разложения (4.9). Причиной этого является неравномерный характер асимптотического ряда (5.2) в окрестности точки $x_0 = 1$.

6. Численное решение интегрального уравнения. Используя независимую переменную s , перепишем интегрально уравнение (2.2) в виде

$$\int_{-\infty}^s \frac{x'(\tau)}{\sqrt{s-\tau}} d\tau = \int_{-\infty}^s \left\{ \frac{1}{\omega} [s-q(\tau)]^{-1/2} - \sqrt{2\mu}\tau \right\} x'(\tau) d\tau$$

$$s = \mu^{-1/3}t, \quad q(s) = \mu^{-1/3}r(t)$$

и разрешим его относительно функции $x(s)$, стоящей в левой части, как уравнение Абеля [13]. В результате получим

$$(6.1) \quad x(s) + \int_{-\infty}^s x(\tau) dK(s, \tau, q(\tau)) = 0, \quad x[q(s)] = \frac{x(s)}{\omega}$$

$$K(s, \tau, q(\tau)) = \frac{2}{\pi\omega} \arcsin \sqrt{\frac{s-\tau}{s-q(\tau)}} - \frac{2}{\pi} \tau \sqrt{2\mu(s-\tau)}$$

Для достаточно большого по абсолютной величине отрицательного числа a можно приближенно написать

$$(6.2) \quad x(s) + \int_a^s x(\tau) dK(s, \tau, q(\tau)) = - \int_{-\infty}^a E(\tau) dK(s, \tau, q(\tau))$$

$$E(s) = 1/2 \sqrt{2} (-s)^{-\beta} \exp(\alpha\mu s^3) (1 - a_1\mu^{-1}s^{-3})$$

Здесь функция $E(s)$ выбрана в соответствии с асимптотическим разложением (3.2) и формулой (5.12), функция $q(s)$ в правой части (6.2) задается асимптотическим рядом (3.3). Погрешность в результате замены решения $x(s)$ его приближенным значением $E(s)$ можно оценить по первому отброшенному члену асимптотики (3.2), равному $a_2/(\mu^2 s^6)$, учитывая при этом, что в соответствии с (3.1), (5.11) при $\omega = \infty$ имеем $a_2\mu^{-2} = 1801\pi^2/1152$, а при $\omega = 1$ будет $a_2\mu^{-2} = 470/9$. Чтобы искомая функция имела порядок единицы, на интервале $[a, b]$, где функция $E(s)$ достаточно близка к решению, воспользуемся заменой переменной $x(s) = E(s)\chi(s)$.

Уравнение (6.2) будем решать как уравнение Вольтерры второго рода, заменяя интеграл конечной суммой. Например, для $a < s \leq b$ будем использовать следующую квадратурную формулу первой алгебраической степени точности с двукратным разложением остатка квадратуры по Эйлеру [18]:

$$(6.3) \quad \int_a^{s_n} \chi(\tau) P(s_n, \tau) d\tau \approx \sum_{k=1}^m A_{2k-1} \chi(s_{2k-1}) + C_0 [\chi(s_n) - \chi(a)] + C_1 [\chi'(s_n) - \chi'(a)]$$

$$P(s, \tau) = E(\tau) \frac{d}{d\tau} K(s, \tau, q(\tau))$$

$$(6.4) \quad A_k = \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} P(s_n, \tau) d\tau, \quad C_i = \frac{(s_n - a)^i}{(i+1)!} \left[\int_a^{s_n} B_{i+1} \left(\frac{\tau - a}{s_n - a} \right) P(s_n, \tau) d\tau - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^m A_{2k-1} B_{i+1} \left(\frac{s_{2k-1} - a}{s_n - a} \right) \right], \quad i = 0, 1; \quad s_n = a + nh$$

Здесь $B_i(x)$ — многочлены Бернулли [18], h — шаг интегрирования. Производная искомой функции в (6.3) аппроксимируется конечной разностью. Формулы (6.3), (6.4) записаны для $n = 2m$ и при нечетных значениях n аналогичны.

Теперь можно последовательно по рекуррентным формулам определить на каждом шаге величины $\chi(s_n)$, $x(s_n)$, а после этого из второго уравнения (6.1) — $q(s_n)$.

ω	1	1,1	1,5	2	4	∞
ν	1,2444	1,22	1,21	1,17	1,11	1
$-c_{m1}'' \cdot 10^3$	834,9	850	893	899	902	957

При вычислении интегралов (6.4) функция $q(s)$ интерполировалась полиномом третьей степени.

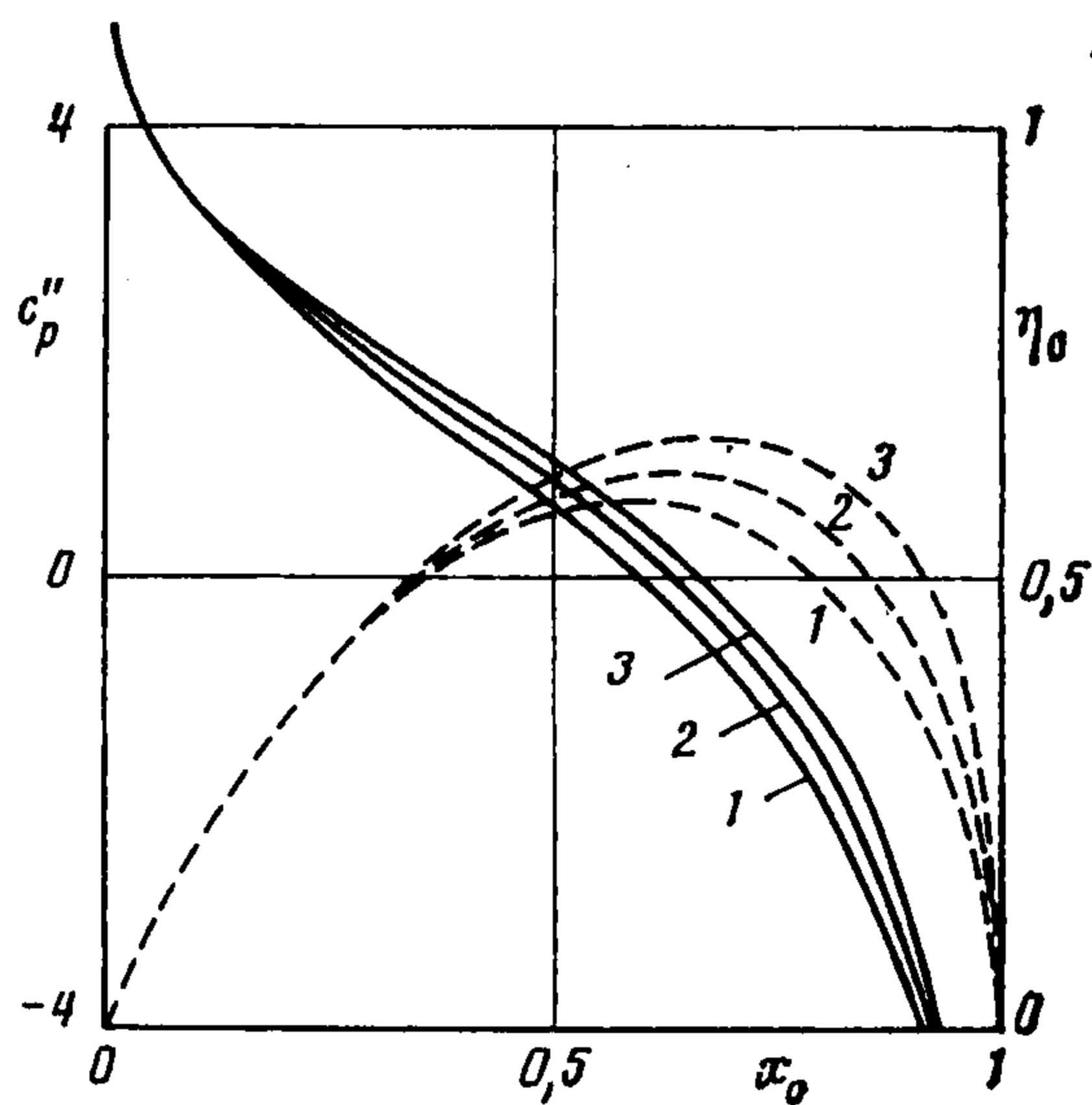
Для нормировки численного решения, т. е. для определения при каждом ω величины ν в (5.12), воспользуемся при достаточно большом s асимптотическим разложением (4.9), в которое подставим $x_0(t, \omega) = \nu x(s)$, $Y = \nu y(q(s)) + O(s^{-3/2})$. Значения ν для разных параметров вдува даны в таблице.

Точность описанного метода проверялась на предельных аналитических решениях. Так, при $\omega = \infty$, $a = -5$, $b = -1,8$, $h = 0,01$ численное решение отличается от точного [11] меньше чем на 0,1%.

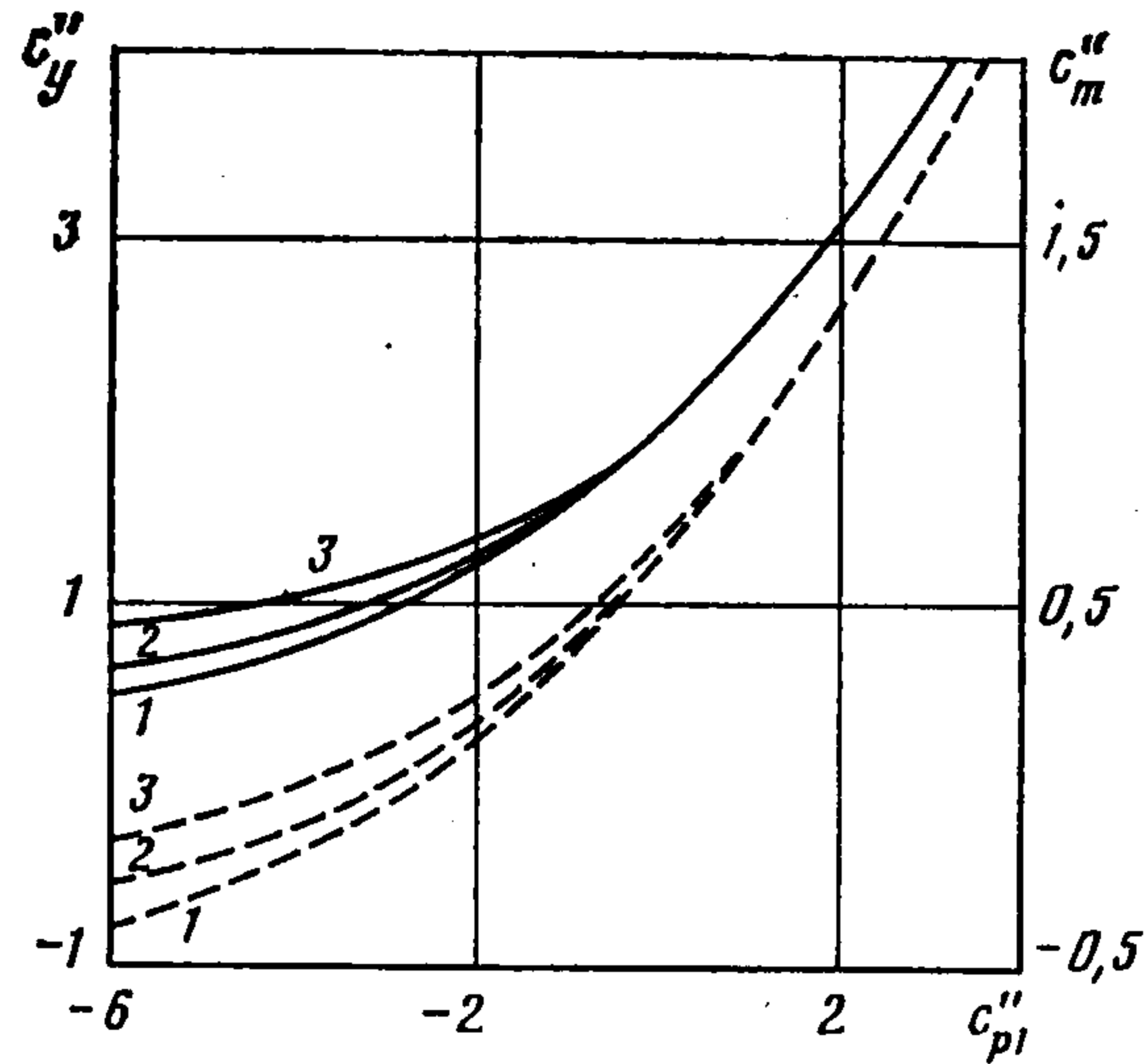
7. Результаты расчета и выводы. Переменные подобия удобно представить в виде

$$c_p' = \mu^{1/3} c_p'', \quad y_0 = \mu_0^{1/3} \eta_0, \quad c_y' = \mu^{1/3} c_y'', \quad c_m' = \mu^{1/3} c_m'' \\ (\mu = 1 - 1/\omega)$$

На фиг. 2 изображены универсальные кривые, дающие распределение по длине пластины преобразованного коэффициента давления c_p'' (сплошные линии) и толщины слоя вдува η_0 (штриховые линии) при разных значениях параметра ω . Для получения распределения давления и толщины слоя вдува, соответствующих некоторому коэффициенту давления в месте прекращения вдува c_{p1}'' , следует растянуть сплошные кривые на фиг. 2 по оси абсцисс, а штриховые кривые также и по оси ординат в $1/x_0(c_{p1}'', \omega)$ раз и взять их части, соответствующие промежутку $0 \leq x \leq 1$. На фиг. 3 даны зависимости коэффициентов силы (сплошные линии) и момента (штриховые линии) от давления на конце пронизаемого участка. На фиг. 2, 3 кривые 1—3 отвечают значениям относительного параметра вдува $\omega = 1; 1,5; \infty$ соответственно. Избыточная сила, действующая на пластину, как это следует из (2.4), (4.9), стремится к нулю, когда $c_{p1}'' \rightarrow -\infty$, иными словами, при низком давлении на конце пронизаемого участка области с повышенным и пониженным давлением почти компенсируют одна другую. Коэффициент момента c_m'' , вычисленный относительно начала координат, при $c_{p1}'' \rightarrow -\infty$ стремится к отрицательной величине c_{m1}'' , модуль которой равен удвоенной площади под соответствующей кривой



Фиг. 2



Фиг. 3

$\eta_0(x_0)$ на фиг. 2. Значение c_{m1}'' для разных параметров вдува даны в таблице.

На фиг. 2 кривые подобия, отвечающие предельным значениям параметра вдува 1 и ∞ , близки между собой. Конкретные зависимости давления от продольной координаты при фиксированном c_{p1}'' и разных ω получаются путем растяжения соответствующих отрезков универсальных кривых по оси абсцисс, при котором их концы совмещаются, а графики этих зависимостей еще больше сближаются между собой. Следовательно, при одинаковых значениях давления в месте прекращения вдува c_{p1}'' распределение преобразованного коэффициента давления c_p'' по длине пластины практически не будет зависеть от параметра вдува. Это позволяет дать более простую формулировку правила подобия (2.3):

$$(7.1) \quad x = x_0(c_p'')/x_0(c_{p1}''), \quad c_p = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} [B(B - B_*)]^{1/2} c_p''$$

Таким образом, результаты по распределению давления, полученные в идеальной постановке, когда СС рассматривается как поверхность контактного разрыва, пригодны во всем сверхкритическом диапазоне параметра вдува, если c_p' заменить на c_p'' . При больших вдувах c_p'' мало отличается от c_p' . В этом случае, как показано в [2], правило подобия (7.1) и расчетные зависимости, представленные на фиг. 2, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Допустимые пределы изменения параметра вдува определяются, с одной стороны, условием малости толщины СС по сравнению с толщиной невязкой пристеночной области, с другой — справедливостью приближения тонкого слоя и линейной теории сверхзвукового обтекания. За характерные значения толщины СС и невязкой части слоя вдува можно принять соответственно lq_0/q_∞ и $l(M_\infty - 1)^{1/2} [B(B - B_*)]^{1/2}$. Тогда ограничения на определяющие параметры задачи формулируются в виде

$$[\omega(\omega - 1)/B_*]^{1/2} (M_\infty^2 - 1)^{1/2} \gg \sqrt{m_w T_\infty / (m_\infty T_w)}$$

$$[B(B - B_*)]^{1/2} (M_\infty^2 - 1)^{1/2} \ll 1, \quad [B(B - B_*)]^{1/2} (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} \ll 1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bott J. E. Massive blowing experiments // AIAA Journal. 1968. V. 6. No. 4. P. 613—618.
2. Вигдорович И. И., Виноградов Ю. А., Левин В. А., Рождественский В. И. Закон подобия при сверхзвуковом обтекании плоских поверхностей с сильным распределенным вдувом // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1986. Т. 289. № 3. С. 564—567.
3. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1528. 125 с.
4. Липатов И. И. Отсоединение пограничного слоя при равномерном вдувании газа в сверхзвуковой поток // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1864. С. 8—15.

5. *Fernandez F. L., Zukoski E. E.* Experiments in supersonic turbulent flow with large distributed surface injection // *AIAA Journal*. 1969. V. 7. No. 9. P. 1759—1767.
6. *Вулис Л. А., Кашкаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
7. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука. 1974. 272 с.
8. *Ricou F. P., Spalding D. B.* Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 11. Pt. 1. P. 21—32.
9. *Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др.* Теория турбулентных струй. М.: Наука. 1984. 716 с.
10. *Левин В. А.* Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1973. № 5. С. 97—104.
11. *Вигдорovich И. И., Левин В. А.* Сильный вдув жидкости в сверхзвуковой поток с поверхности пластины конечной длины // *Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке*. М.: Изд-во МГУ. 1978. С. 51—73.
12. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир. 1980. 608 с.
13. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Физматгиз. 1958. 207 с.
14. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1977. 287 с.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1976. 576 с.
16. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз. 1963. 358 с.
17. *Фок В. А.* Таблицы функций Эйри. М. 1946. 53 с.
18. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз. 1959. 327 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.V.1986