Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 532.526

О СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Сычев В. В., Сычев Вик. В.

Методом сращиваемых асимптотических разложений исследуется течение в турбулентном пограничном слое (ПС) при числе Рейнольдса $R \to \infty$. Устанавливается трехслойная асимптотическая структура ПС, включающая помимо вязкой пристеночной области и области дефекта скорости промежуточную область, в которой осуществляется баланс сил инерции, давления и турбулентного трения и которая ответственна за возникновение отрыва потока под действием неблагоприятного градиента давления.

Исследование структуры турбулентного ПС на основе асимптотического анализа незамкнутой системы уравнений Рейнольдса было предметом ряда исследований. По существу уже ранние работы [1, 2] содержали известные элементы такого анализа. Первой попыткой систематического подхода к проблеме построения сращиваемых асимптотических разложений для осредненных функций течения в турбулентном ПС при $R \to \infty$ была работа [3]. Ее дальнейшим развитием явились работы [4—6]. Во всех этих исследованиях структура турбулентного ПС с градиентом давления или без градиента давления обосновывалась как двухслойная, состоящая из внутренней (пристеночной) и внешней областей. Течение в первой из них определяется известным законом стенки Прандтля: сумма напряжений трения, обусловленных действием вязкости и турбулентными пульсациями скорости, остается неизменной поперек этой зоны. Течение во внешней области описывается законом дефекта скорости Кармана и представляет собой слабовозмущенный потенциальный поток вблизи твердой поверхности. Возможность формального сращивания решений для этих областей обычно рассматривается как свидетельство существования области их перекрытия с логарифмическим профилем скорости. Условия сращивания позволяют при этом найти, что относительная толщина области дефекта скорости — величина порядка $1/\ln R$, а толщина вязкого пристеночного слоя — величина порядка $\ln R/R$ [3].

Однако проведенное ниже более детальное рассмотрение течения в пристеночной области показывает, что двухслойная схема течения не имеет места в действительности. Она не содержит области, где силы внутреннего трения, градиент давления и силы инерции имеют одинаковый порядок величины при $R \to \infty$, т. е. как раз той области, которая по определению Прандтля и является собственно ПС. Это исключает, в частности, возможность объяснения отрыва потока под действием неблагоприятного градиента давления. В самом деле, течение в области дефекта скорости в первом приближении не подвержено действию сил трения, а течение в области закона стенки не подвержено действию градиента давления (поскольку последний должен для этого иметь нереально большие значения порядка $R/\ln^3 R$).

В [7] на основании экспериментальных наблюдений был введен в рассмотрение закон следа, удачно связывающий законы стенки и дефекта скорости. Согласно этому закону, профиль скорости в ПС существенно зависит от градиента давления и изменяется таким образом, что по мере приближения к точке отрыва он приобретает форму профиля в следе. Закон следа поэтому может рассматриваться как свидетельство того, что структура ПС не является двухслойной, т. е. область перекрытия законов стенки и дефекта скорости в действительности отсутствует (даже для течения без градиента давления), и следовательно, необходимо введение, по крайней мере, еще одной промежуточной зоны.

Попытка построить асимптотическую теорию турбулентного ПС путем введения такой зоны была предпринята в работе [8]. Однако использование в ней в качестве условия сращивания логарифмического закона поведения дефекта скорости по существу означало возврат к схеме [3], поскольку осредненная продольная скорость течения в промежуточной зоне оказалась при этом, в главном члене, равной скорости потенциального потока на внешней границе ПС.

1. Анализ течения в пограничном слое начнем с рассмотрения его пристеночной области. В соответствии с законом стенки определяющим параметром здесь является динамическая скорость $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, где τ_w — трение на стенке, ρ — плотность среды. Отношение характерного значения этой скорости u_0^* к характерной скорости внешнего невязкого течения U_∞ будем, как обычно, считать малым параметром задачи $\varepsilon = u_0^*/U_\infty$. Полагая безразмерные осредненные значения продольной составляющей вектора скорости и трения в пристеночной области соответственно величинами порядка ε и ε^2, можно определить порядки величин различных членов уравнений Рейнольдса.

Пусть u и v — безразмерные осредненные значения компонент вектора скорости вдоль осей Ox и Oy прямоугольной декартовой системы координат, связанной с плоской гладкой поверхностью тел $y = 0$, а p и τ_{ij} — безразмерные значения осредненного перепада давления и турбулентных напряжений; L — характерный размер тела, выбранный в качестве единицы измерения длины. Запишем уравнения Рейнольдса для плоского течения в виде

$$
(1.1)\qquad
\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\\
u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad R = \frac{U_\infty L}{\nu}
\end{gathered}
$$

Пристеночный слой характеризуется тем, что вязкие и турбулентные напряжения трения имеют здесь одинаковый порядок величины, т. е. $R^{-1}\partial u / \partial y \sim \tau_{xy}$. Используя упомянутые выше оценки для величин продольной составляющей вектора скорости u и трения, находим, что толщина вязкого пристеночного слоя

$$
(1.2)\qquad \delta = O\,(1/(\varepsilon R))
$$

и соответствующие члены в первом уравнении количества движения (1.1)

$$
R^{-1}\partial^2 u/\partial y^2 \sim \partial\tau_{xy} / \partial y \sim \varepsilon^3 R
$$

Будем предполагать, что безразмерный продольный градиент давления в пограничном слое — величина порядка единицы; вклад инерционных членов, например $u\partial u / \partial x$, на основании приведенных выше оценок будет порядка ε^2. Поэтому, используя исходные уравнения (1.1), можно для течения в пристеночной области пограничного слоя написать следующие асимптотические разложения искомых функций:

$$
(1.3)\qquad
\begin{gathered}
u = \varepsilon\left(u_1^+ + \frac{1}{\varepsilon^3 R}u_2^+ + \frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon R}u_3^+ + \frac{1}{\varepsilon R}u_4^+ + \ldots\right)\\
v = \frac{1}{R}\left(v_1^+ + \frac{1}{\varepsilon^3 R}v_2^+ + \frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon R}v_3^+ + \frac{1}{\varepsilon R}v_4^+ + \ldots\right)\\
p = p_1^+ + \varepsilon^2\ln\varepsilon p_2^+ + \varepsilon^2 p_3^+ + \ldots\\
\tau_{xy} = \varepsilon^2\left(\tau_1^+ + \frac{1}{\varepsilon^3 R}\tau_2^+ + \frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon R}\tau_3^+ + \frac{1}{\varepsilon R}\tau_4^+ + \ldots\right)\\
\tau_{xx} = \varepsilon^2\pi_1^+ + \ldots, \quad \tau_{yy} = \varepsilon^2\sigma_1^+ + \ldots
\end{gathered}
$$

Независимыми переменными порядка единицы здесь являются

$$
(1.4)\qquad x,\ y^+ = \varepsilon R y
$$

Появление в (1.3) членов, содержащих $\ln \varepsilon$, как будет показано ниже, обусловлено изменениями давления из-за вытесняющего действия пограничного слоя. (Напомним, что для простоты рассматривается случай обтекания плоской поверхности; в случае течения около криволинейной стенки в разложении для давления появится еще член порядка ε.)

В результате подстановки (1.3), (1.4) в (1.1) приходим к следующей системе соотношений:

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad & \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial y^{+2}} + \frac{\partial \tau_1^+}{\partial y^+} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2^+}{\partial y^{+2}} + \frac{\partial \tau_2^+}{\partial y^+} = \frac{\partial p_1^+}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_1^+}{\partial y^+} = 0 \\
& \frac{\partial^2 u_3^+}{\partial y^{+2}} + \frac{\partial \tau_3^+}{\partial y^+} = \frac{\partial p_2^+}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_2^+}{\partial y^+} = 0 \\
& \frac{\partial^2 u_4^+}{\partial y^{+2}} + \frac{\partial \tau_4^+}{\partial y^+} + \frac{\partial \pi_1^+}{\partial x} = \frac{\partial p_3^+}{\partial x} + u_1^+ \frac{\partial u_1^+}{\partial x} + v_1^+ \frac{\partial u_1^+}{\partial y^+} \\
& \frac{\partial p_3^+}{\partial y^+} = \frac{\partial \sigma_1^+}{\partial y^+}; \quad \frac{\partial u_k^+}{\partial x} + \frac{\partial v_k^+}{\partial y^+} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

На поверхности тела $y^+ = 0$ функции должны удовлетворять условию прилипания.

Из этой системы можно определить поведение входящих в нее функций при $y^+ \to \infty$. Так, для функций первого приближения при $y^+ \to \infty$, как обычно, положим

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad & u_1^+ = h_1(x) \ln y^+ + f_1(x) + \ldots, \tau_1^+ = \\
& = g_1(x) - h_1(x) / y^+ + \ldots
\end{aligned}
$$

Здесь $g_1(x)$ — безразмерное трение на стенке, а $h_1(x)$ и $f_1(x)$ — некоторые произвольные функции. Во втором из этих разложений использовалось предположение о том, что влияние вязкости на величину внутреннего трения во внешней части пристеночного подслоя убывает обратно пропорционально y^+. Это предположение соответствует логарифмическому закону, благодаря выполнению которого, как известно, величина продольной составляющей u вне вязкого подслоя становится величиной порядка единицы и, кроме того, внутренний предел этой функции здесь отличен от нуля.

Рассматривая уравнения (1.5) для второго и третьего приближений, можно установить, что

$$
(1.7)\qquad \tau_2^+ = p_1^{+\prime}(x) y^+ + \ldots, \tau_3^+ = p_2^{+\prime}(x) y^+ + \ldots \; (y^+ \to \infty)
$$

а в результате подстановки (1.6) в правую часть уравнения для функций четвертого приближения в (1.5) получаем

$$
(1.8)\qquad \tau_4^+ = h_1(x) h_1'(x) y^+ \ln^2 y^+ + O(y^+ \ln y^+) \; (y^+ \to \infty)
$$

На основании асимптотических представлений (1.6), (1.7) для τ_1^+ и τ_2^+ при $y^+ \to \infty$ находим, что соответствующие члены разложения (1.3) для τ_{xy} становятся одного порядка при $y^+ = O(\varepsilon^3 R)$. Четвертый член этого разложения будет здесь того же порядка малости, если $\varepsilon \ln(\varepsilon^3 R) = O(1)$. Заметим, что тогда величина продольной составляющей u, согласно (1.3), (1.6), становится при $y^+ = O(\varepsilon^3 R)$ величиной порядка единицы. Поэтому без ограничения общности можем положить

$$
(1.9)\qquad \varepsilon = 1 / \ln(\varepsilon^3 R) = 1 / \ln R + \ldots
$$

что соответствует упомянутому выше результату работы [3].

Таким образом, получаем, что разложение (1.3) для τ_{xy} перестает быть справедливым в области с относительным поперечным размером $\varepsilon^3 R\delta$ или ε^2 (согласно (1.2)).

Сделаем теперь предположение, что области неприменимости разложений для u и τ_{xy} совпадают, т. е. члены разложения (1.3) для u сравниваются по порядку величины также при $y^+ = O(\varepsilon^3 R)$ или $y = O(\varepsilon^2)$. По существу это предположение неявно постулирует наличие некоторой дополнительной зависимости между функциями течения, помимо системы уравнений (1.5). Однако такая зависимость гораздо менее ограничительна, чем любое условие замыкания этой системы (поскольку она может быть нелокальной).

Главные члены асимптотических представлений u_2^+, u_3^+ и u_4^+ при $y^+ \to \infty$ должны иметь вид

$$(1.10) \qquad u_2^+ = h_2(x)\, y^+ \ln y^+ + \ldots, \quad u_3^+ = h_3(x)\, y^+ \ln y^+ + \ldots$$
$$u_4^+ = h_4(x)\, y^+ \ln^3 y^+ + \ldots$$

где $h_2(x)$, $h_3(x)$, $h_4(x)$ — произвольные функции. Так как асимптотические представления (1.10) и (1.7), (1.8) должны соответствовать друг другу, то на основании уравнений (1.5) можно определить следующие члены в выражениях (1.7), которые соответственно будут $-h_2(x) \ln y^+$ и $-h_3(x) \ln y^+$.

2. Введем в рассмотрение область течения с независимыми переменными

$$(2.1) \qquad x, \; Y = y / \varepsilon^2 = y^+ / (\varepsilon^3 R)$$

На основании асимптотических разложений (1.3) и выражений (1.6) — (1.10), а также используя условия сращивания решений для областей $y^+ = O(1)$ и $Y = O(1)$, можем записать разложения для параметров течения в области $Y = O(1)$ в форме

$$(2.2) \qquad u = u_1 + \varepsilon u_2 + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon), \quad v = \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon^3 v_2 +$$
$$+ O(\varepsilon^4 \ln \varepsilon), \quad p = p_1 + \varepsilon^2 \ln \varepsilon p_2 + O(\varepsilon^2)$$
$$\tau_{xy} = \varepsilon^2 \tau_1 + \varepsilon^3 \tau_2 + O(\varepsilon^4 \ln \varepsilon)$$
$$\tau_{xx} = \varepsilon^2 \pi_1 + O(\varepsilon^3), \quad \tau_{yy} = \varepsilon^2 \sigma_1 + O(\varepsilon^3)$$

Подставляя эти разложения в уравнения Рейнольдса (1.1), переписанные в переменных (2.1), получим для главных членов (2.2) систему уравнений пограничного слоя в виде

$$(2.3) \qquad u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial \tau_1}{\partial Y}$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial Y} = 0$$

Граничные условия, которым должны удовлетворять функции (2.3) при $Y = 0$, определяются условиями сращивания с решением для вязкого пристеночного подслоя. На основании (1.3), (1.6)—(1.10), (2.1) находим, что

$$p_1(x) = p_1^+(x), \quad v_1(x, 0) = 0; \quad u_1 = h_1(x) + O(Y)$$
$$\tau_1 = g_1(x) + [p_1'(x) + h_1(x)\, h_1'(x)]\, Y + \ldots \quad (Y \to 0)$$

Для функций следующего приближения в разложениях (2.2) из сращивания с решением в области $y^+ = O(1)$ следует, что

$$p_2(x) = p_2^+(x), \quad v_2(x, 0) = 0$$
$$u_2 = h_1(x) \ln Y + f_1(x) + O(Y \ln Y)$$
$$\tau_2 = 2h_1(x)\, h_1'(x)\, Y \ln Y + O(Y) \qquad (Y \to 0)$$

3. Граничные условия при $Y \to \infty$ определяются условиями сращивания с решением для области дефекта скорости. Поэтому необходимо

рассмотреть течение в этой области. Продольная составляющая вектора скорости u равняется здесь в первом приближении скорости $U_e(x)$ внешнего потенциального потока, и турбулентное трение оказывает влияние на ее величину лишь во втором приближении. Относительная толщина этой области является, как известно, величиной порядка ε [3]. Поэтому в качестве независимых переменных порядка единицы здесь следует ввести

$$x,\ y^* = y / \varepsilon = \varepsilon Y \tag{3.1}$$

Осредненные функции течения представим в виде разложений

$$\begin{aligned} u &= U_e + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 \ln \varepsilon\, U_2 + \varepsilon^2 U_3 + \ldots \\ v &= \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 \ln \varepsilon V_2 + \varepsilon^2 V_3 + \ldots \\ p &= P_1 + \varepsilon^2 \ln \varepsilon P_2 + \varepsilon^2 P_3 + \ldots \\ \tau_{xy} &= \varepsilon^2 T_1 + \varepsilon^3 \ln \varepsilon T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \ldots \\ \tau_{xx} &= \varepsilon^2 \Pi_1 + \ldots,\ \tau_{yy} = \varepsilon^2 \Sigma_1 + \ldots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставив эти разложения вместе с (3.1) в уравнения (1.1), получим

$$\begin{aligned} & P_1' = p_e'(x) = -U_e(x) U_e'(x), \quad V_1 = -U_e'(x) y^*, \quad V_2 = H_2(x) \\ & U_e' U_1 + U_e \frac{\partial U_1}{\partial x} - U_e' y^* \frac{\partial U_1}{\partial y^*} = \frac{\partial T_1}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_3}{\partial y^*} = 0 \\ & U_e' U_2 + U_e \frac{\partial U_2}{\partial x} - U_e' y^* \frac{\partial U_2}{\partial y^*} + H_2 \frac{\partial U_1}{\partial y^*} + \frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial y^*} \\ & U_e' U_3 + U_e \frac{\partial U_3}{\partial x} - U_e' y^* \frac{\partial U_3}{\partial y^*} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_3 \frac{\partial U_1}{\partial y^*} + \frac{\partial P_3}{\partial x} = \\ & = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial P_2}{\partial y^*} = 0 \\ & (U_e'^2 - U_e U_e'') y^* + \frac{\partial P_3}{\partial y^*} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial y^*} \end{aligned} \tag{3.3}$$

В области, где $y = O(\varepsilon^2)$, проявляется нелинейность исходных уравнений, поэтому следует предположить, что разложения (3.2), как и разложения (1.3), станут здесь несправедливыми. Это означает, что при $y^* \to 0$

$$U_1 = F_1(x^*) / y^* + \ldots \tag{3.4}$$

Подставим это выражение в (3.3) и потребуем, чтобы

$$T_1 = G_1(x) + \ldots, \quad y^* \to 0 \tag{3.5}$$

т. е. было выполнено условие сращивания для главного члена разложения функции τ_{xy} при $Y \to \infty$ и $y^* \to 0$. Тогда для функции $F_1(x)$ получаем уравнение $U_e F_1' + 2U_e' F_1 = 0$, интегрируя которое находим, что

$$F_1 = c_1 / U_e^2(x) \tag{3.6}$$

где c — произвольная постоянная. Из уравнения неразрывности в (3.3) следует, что

$$V_3 = -F_1'(x) \ln y^* + H_3(x) + \ldots, \quad y^* \to 0 \tag{3.7}$$

Для проведения сращивания разложений (2.2) и (3.2) для функции v перепишем (3.7) через переменную Y:

$$V_3 = -F_1'(x) \ln \varepsilon - F_1'(x) \ln Y + \ldots$$

и так как член порядка $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ в разложении (2.2) для v отсутствует, то необходимо положить

$$H_2(x) = F_1'(x) = -2c_1 U_e'(x) / U_e^3(x) \tag{3.8}$$

Асимптотическое сращивание для следующих членов разложений (3.2), которое осуществляется с использованием выражений (3.4), (3.6)—

(3.8) и уравнений (3.3), позволяет установить, что при $y^* \to 0$

$$U_2 = \frac{F_2(x)}{y^{*2}} + \ldots, \quad U_3 = -\frac{F_2(x)}{y^{*2}} \ln y^* + \frac{F_3(x)}{y^{*2}} + \ldots$$
$$\mathrm{T}_2 = \frac{G_2(x)}{y^*} + \ldots, \quad \mathrm{T}_3 = -\frac{G_2(x)}{y^*} \ln y^* + \frac{G_3(x)}{y^*} + \ldots$$
$$G_2 = F_1 F_1' - 3U_e' F_2 - U_e F_2'$$
$$G_3 = -G_2 - F_2 U_e'' - F_1 (F_1' - H_3) - 3F_3 U_e' - F_3' U_e$$

Здесь функции $F_2(x)$, $F_3(x)$, $H_3(x)$, а также $G_1(x)$ в (3.5) остаются произвольными.

При этом для функций u_1, v_1, τ_1 в разложениях (2.2) получаем следующие представления при $Y_1 \to \infty$:

$$u_1 = U_e(x) + \frac{F_1(x)}{Y} - \frac{F_2(x)}{Y^2} \ln Y + \frac{F_3(x)}{Y^2} + \ldots$$
$$v_1 = -U_e'(x) Y - F_1'(x) \ln Y + H_3(x) - \frac{F_2'(x)}{Y} \ln Y +$$
$$+ \frac{F_3'(x) - F_2'(x)}{Y} + \ldots$$
$$\tau_1 = G_1(x) - \frac{G_2(x)}{Y} \ln Y + \frac{G_3(x)}{Y} + \ldots$$

Кроме того, из условия сращивания функции давления следует, что

$$P_1(x) = p_1(x) = p_e(x), \quad P_2(x) = p_2(x)$$

Таким образом, полученные выше соотношения (3.4)—(3.6) приводят к установлению нового закона поведения функций течения на внешней границе нелинейной зоны и внутренней границы области дефекта скорости.

В заключение заметим, что при выполнении обычных краевых условий на внешней границе турбулентного пограничного слоя, согласно которым (для функций из (3.2))

$$U_1(x, \infty) = \mathrm{T}_n(x, \infty) = \Pi_1(x, \infty) = \Sigma_1(x, \infty) = 0$$
$$(n = 1, 2, 3)$$

на основании уравнений (3.3) можно получить

$$U_2 = -P_2(x) / U_e(x) + \ldots, \quad U_3 = -{}^1/_2 U_e''(x) y^{*2} -$$
$$-p_3^\circ(x) / U_e(x) + \ldots$$
$$V_3 = H_3^\circ(x) + \ldots, \quad P_3 = {}^1/_2 (U_e U_e'' - U_e'^2) y^{*2} +$$
$$+ p_3^\circ(x) + \ldots \quad (y^* \to \infty)$$

Если теперь, используя эти выражения, а также (3.2), (3.3), перейти к исходным переменным x, y, то оказывается, что в области внешнего течения члены второго и третьего приближений (для u, v, p) имеют порядок $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ и ε^2. В случае течения около плоской пластины, когда $U_e(x) = 1$, $p_e(x) = 0$, члены порядка $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, согласно (3.8), (3.3), (3.2), будут отсутствовать, и вследствие этого в разложениях (1.3), (2.2) также не будет членов, содержащих $\ln \varepsilon$.

Таким образом, анализ структуры турбулентного пограничного слоя на гладкой поверхности при $R \to \infty$ показывает, что, вопреки результатам ранее проведенных исследований [3—6], она является трехслойной. При этом нелинейная область течения, расположенная между областями вязкого пристеночного слоя и дефекта скорости, описывается незамкнутой системой уравнений пограничного слоя, выражающей баланс сил инерции, давления и турбулентного трения. Относительная толщина этой области — величина порядка $\varepsilon^2 = O(1 / \ln^2 R)$. Ее существование не связано с наличием градиента давления, но влияние последнего наиболее сильно проявляется и приводит к столь важным последствиям, как отрыв потока именно в этой области течения (см. [9, 10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Изаксон А. А.* О формуле распределения скоростей вблизи стенки // Журн. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1937. Т. 7. Вып. 7. С. 919—924.
2. *Millikan C. B.* A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes // Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech. N. Y.: Wiley. 1939. P. 386—392.
3. *Yajnik K. S.* Asymptotic theory of turbulent shear flows // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt 2. P. 411—427.
4. *Mellor G. L.* The large Reynolds number, asymptotic theory of turbulent boundary layers // Intern. J. Engng Sci. 1972. V. 10. N 10. P. 851—873.
5. *Fendell F. E.* Singular perturbation and turbulent shear flow near walls // J. Astronaut. Sci. 1972. V. 20. No. 3. P. 129—165.
6. *Afzal N.* A sub-boundary layer within a twodimensional turbulent boundary layer: an intermediate layer // J. Méc. Théor. Appl. 1982. V. 1. No. 6. P. 963—973.
7. *Coles D.* The law of the wake in the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1956. V.1. Pt 2. P. 191—226.
8. *Пономарев В. И.* Асимптотический анализ турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости // Учен. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 3. С. 42—50.
9. *Сычев В. В., Сычев Вик. В.* О турбулентном отрыве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 6. С. 1500—1512.
10. *Сычев Вик. В.* К теории самоиндуцированного отрыва турбулентного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 51—60.

Москва

Поступила в редакцию 28.V.1986