Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

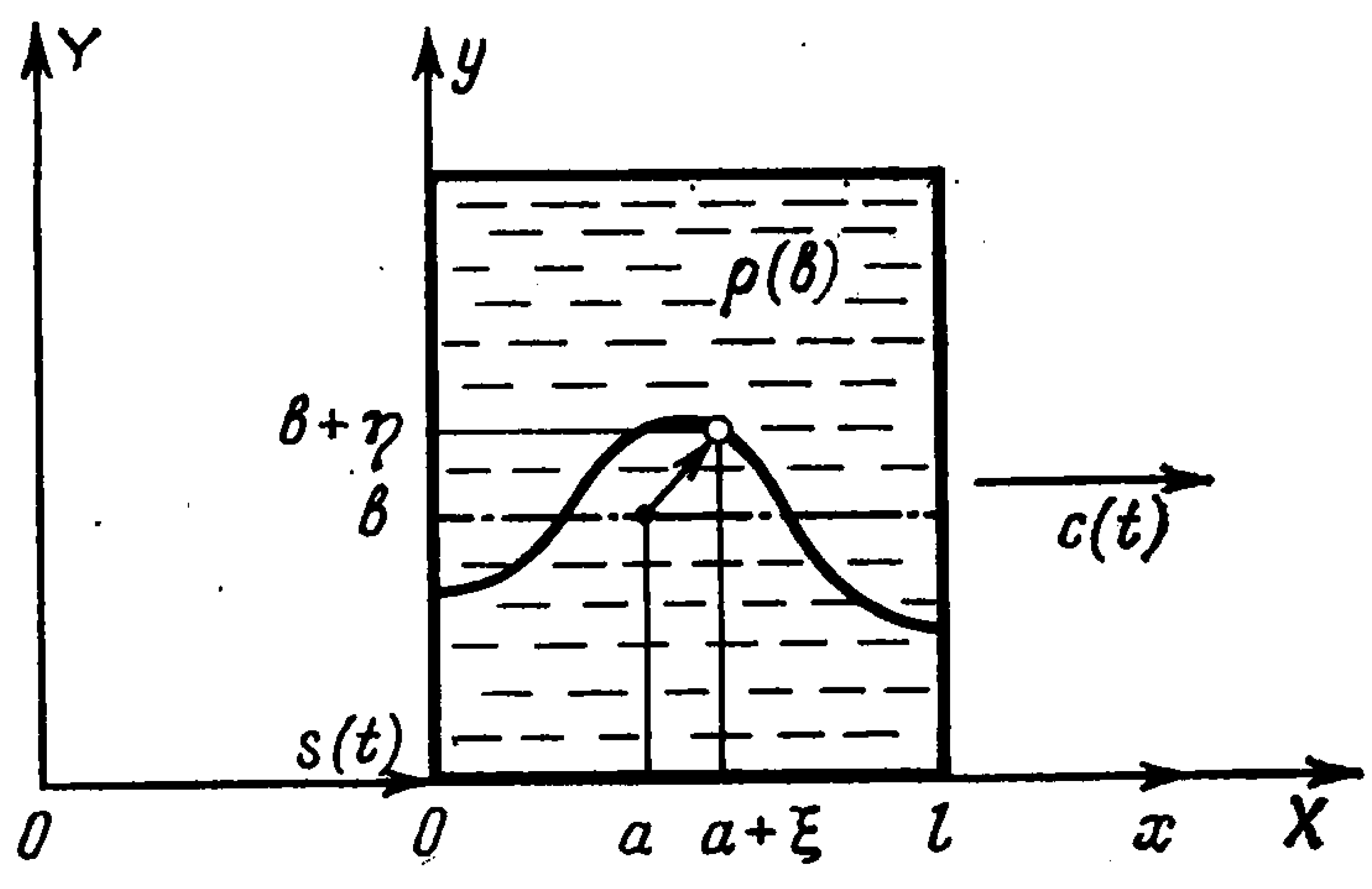
УДК 532.593 : 534.1

КОЛЕБАНИЯ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ДВИЖУЩЕМСЯ СОСУДЕ И УПРАВЛЕНИЕ ИМИ

Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.

В рамках классических моделей тяжелой идеальной жидкости исследуются внутренние волновые движения устойчиво стратифицированной жидкости в подвижном сосуде и способы управления этими колебаниями. Рассматривается случай экспоненциальной стратификации, отличающийся рядом существенных особенностей по сравнению со случаем дискретной стратификации, изучавшимся ранее [1—3].

1. Постановка задачи и исходные предположения. Рассматривается одномерное (вдоль оси OX) движение прямоугольного сосуда, заполненного тяжелой идеальной несжимаемой жидкостью (фигура). Предполагается, что плотность ρ жидкости увеличивается с глубиной (жидкость устойчиво стратифицирована), т. е. $\rho'(b) < 0$, где b — вертикальная лагранжева переменная [4]. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится относительно стенок сосуда, а при $t > 0$ сосуд начинает двигаться с ускорением $w(t) = dc(t)/dt$ в горизонтальном направлении, например вправо (фигура). Требуется найти волновые движения жидкости, обусловленные устойчивой стратификацией и вызванные перемещением сосуда с заданной переменной скоростью $c(t)$.



Для описания внутренних волновых движений жидкости используется подвижная система координат oxy, связанная с левой стенкой сосуда. Уравнения гидродинамики, следуя [5], запишем в более удобных для дальнейшего анализа переменных Лагранжа a, b, идентифицирующих частицы жидкости. Уравнения движения предполагаются такими, что перемещения частиц жидкости двумерные. В результате указанных предположений для координат $x = x(a, b, t)$, $y = y(a, b, t)$ частиц жидкости в подвижной системе следуют нелинейные уравнения в форме Лагранжа

$$(1.1)\qquad (x^{\cdot\cdot} + w)\frac{\partial x}{\partial a} + (y^{\cdot\cdot} + g)\frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial a}$$

$$(x^{\cdot\cdot} + w)\frac{\partial x}{\partial b} + (y^{\cdot\cdot} + g)\frac{\partial y}{\partial b} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial b}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} = 1; \quad \rho = \rho(b)$$

Здесь g — постоянное ускорение силы тяжести, $\rho(b)$ — известная функция плотности индивидуальной частицы жидкости; точкой обозначена частная производная по времени. Для дальнейшего исследования удобно в качестве переменных (аргументов) Лагранжа a, b принять начальные положения частиц жидкости (см. далее).

Первые два уравнения системы (1.1) — это уравнения Ньютона для частиц жидкости. Третье уравнение выражает условие несжимаемости жидкости. Четвертое уравнение (предположение) означает, что плотность индивидуальной частицы жидкости сохраняется при движении и зависит только от переменной Лагранжа b.

Независимые переменные Лагранжа a, b, координаты частиц жидкости x, y (или переменные Эйлера) и время t изменяются в заданных пределах

(1.2) $$(a, b) \in D = \{a, b\colon\ 0 \leqslant a \leqslant l,\ 0 \leqslant b \leqslant h\}$$
$$(x, y) \in D = \{x, y\colon\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant y \leqslant h\}$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,\ T < \infty$$

Здесь l — длина сосуда, h — высота слоя жидкости. Вследствие сделанных выше предположений начальные условия для координат x, y берутся в виде

(1.3) $$x(a, b, 0) = a,\ y(a, b, 0) = b;\ x^{\bullet}(a, b, 0) = y^{\bullet}(a, b, 0) = 0$$

и соответствуют состоянию жидкости, покоящейся относительно стенок сосуда при $t = 0$.

Краевые условия имеют смысл непроницаемости стенок сосуда:

(1.4) $$x(0, b, t) = y(a, 0, t) = 0,\ x(l, b, t) = l,\ y(a, h, t) = h$$

Далее предполагается выполненным упрощающее предположение, что ускорение сосуда достаточно мало, т. е. $|w(t)|\, g^{-1} \ll 1$ для всех $t \in$ $\in [0, T]$. Это условие (см. [1]) позволяет линеаризовать уравнения гидродинамики (1.1) при помощи подстановок

(1.5) $$x = a + \xi,\ \xi = \xi(a, b, t);\ y = b + \eta,\ \eta = \eta(a, b, t)$$
$$P = -g\int_0^y \rho(b)\,db + H, \quad H = H(a, b, t)$$

Неизвестные величины ξ, η в (1.5) имеют смысл малых смещений частиц жидкости от начальных положений (1.3), а H — малое отклонение давления от гидростатического. Система линеаризованных уравнений гидродинамики принимает вид

(1.6) $$\xi^{\bullet\bullet} = -\rho^{-1}\partial H/\partial a - w(t)$$
$$\eta^{\bullet\bullet} = -\rho^{-1}\partial H/\partial b - N^2(b)\,\eta$$
$$\partial\xi/\partial a + \partial\eta/\partial b = 0;\ N^2(b) = -g\rho'(b)/\rho(b)$$

Простейшей модели стратифицированной жидкости отвечает предположение, что величина квадрата частоты $N^2(b)$ Брента — Вяйсяля [4] постоянна, т. е.

(1.7) $$N^2(b) \equiv N_0^2 = \mathrm{const} > 0$$

В этом случае имеет место экспоненциальный закон изменения плотности жидкости

(1.8) $$\rho(b) = \rho_0 \exp(-N_0^2 b/g),\ \rho_0 = \rho(0)$$

В дальнейшем считается, что предположение (1.7) или (1.8) выполняется с достаточной степенью точности. Тогда для системы (1.6), (1.8) решение получается в аналитическом виде. Ниже также обсуждаются свойства решения в более общем случае, когда величина $N^2(b) \geqslant C > 0$ не постоянна, а изменяется по глубине.

Начальные и краевые условия для новых неизвестных переменных ξ, η получаются на основе условий (1.3), (1.4) и формул замены (1.5) и оказываются однородными.

Далее вводится функция $\psi = \psi(a, b, t)$ (функция тока неоднородной жидкости), такая, что

$$(1.9) \qquad \xi = \partial\psi/\partial b, \quad \eta = -\partial\psi/\partial a$$

Тогда третье уравнение системы (1.6) удовлетворяется тождественно. Используя соотношения (1.9), можно исключить из первых двух уравнений (1.6) неизвестную функцию H и получить одно уравнение для функции тока ψ. Для удобства построения решения соответствующей краевой задачи вводятся безразмерные независимые переменные — переменные Лагранжа α, β и время τ, параметры системы r и γ, а также функция тока $\Psi = \Psi(\alpha, \beta, \tau)$. Формулы замены имеют вид

$$(1.10) \qquad \alpha = a/h, \ \beta = b/h; \ \tau = N_0 t, \ 0 \leqslant \tau \leqslant \Theta = N_0 T$$
$$(\alpha, \beta) \in \Delta = \{\alpha, \beta\colon 0 \leqslant \alpha \leqslant r, \ 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$$
$$r = l/h, \ \gamma^2 = N_0^2 h/g, \ \Psi = \psi/h^2$$

Здесь Δ — прямоугольная область изменения безразмерных переменных Лагранжа α, β. Согласно (1.6)—(1.10), уравнение для безразмерной функции тока записывается в виде

$$(1.11) \qquad \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}\right) - \gamma\frac{\partial^3\Psi}{\partial\tau^2\partial\beta} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2} = \gamma w_*(\tau)$$
$$w_*(\tau) \equiv (N_0^2 h)^{-1} w(\tau/N_0)$$

Начальные и краевые условия для функции тока $\Psi(\alpha, \beta, \tau)$ следуют из соотношений (1.3)—(1.5), (1.9) и имеют вид

$$(1.12) \qquad \Psi(\alpha, \beta, 0) = \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}(\alpha, \beta, 0) = 0$$
$$\Psi(0, \beta, \tau) = \Psi(r, \beta, \tau) = \Psi(\alpha, 0, \tau) = \Psi(\alpha, 1, \tau) = 0$$

Итак, требуется найти решение краевой задачи (1.11), (1.12).

2. Формальное решение внутренней краевой задачи. Применяя метод разделения переменных [1] (метод Фурье) к однородному уравнению (1.11), можно найти собственные функции соответствующей краевой задачи по пространственным переменным α, β

$$(2.1) \qquad \Phi_{mn}(\alpha, \beta) = \sin(\pi r^{-1} m\alpha)\sin(\pi n\beta)\exp(^1/_2\gamma\beta)$$
$$(\alpha, \beta) \in \Delta, \ m, n = 1, 2, \ldots$$

Система собственных функций $\{\Phi_{mn}\}$ (2.1) полна и ортогональна с весом $e^{-\gamma\beta}$ в области $(\alpha, \beta) \in \Delta$, что проверяется непосредственно.

Анализ уравнений для коэффициентов Фурье, зависящих от времени τ, приводит к следующим выражениям для собственных частот малых свободных колебаний экспоненциально стратифицированной жидкости, целиком заполняющей прямоугольный сосуд:

$$(2.2) \qquad \omega_{mn}^2 = \frac{m^2}{r^2}\left(\frac{m^2}{r^2} + n^2 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}\right)^{-1}, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Следует отметить, что спектр собственных частот $\{\omega_{mn}\}$ дискретный и в отличие от случая дискретно стратифицированной жидкости (см. [1—3] и др.) зависит от двух независимых индексов m, $n \geqslant 1$. Кроме того, частоты ограничены: $0 < \omega_{mn} < 1$ (в размерных переменных они ограничены сверху частотой Брента — Вяйсяля N_0). Интересно также отметить, что множество чисел $\{\omega_{mn}\}$ всюду плотно на отрезке $\omega \in [0, 1]$, т. е. для любых $0 < \gamma^2$, $r^2 < \infty$ существуют такие натуральные $m, n > > 1$, что $|\omega_{mn} - \omega| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Соответствующие значения индексов m, n зависят, конечно, от ε, а также от γ^2, $r^2 > 0$. Это означает, что в сколь угодно малой ε-окрестности любого заданного $\omega \in [0, 1]$ находится счетное множество собственных частот ω_{mn} и счетное число подпоследовательностей, сходящихся к произвольному значению $\omega \in [0, 1]$.

В случае, когда $N^2(b) \not\equiv N_0^2$ $(N^2(b) \geqslant C > 0)$, собственные функции $\Phi_{mn}(\alpha, \beta)$, вообще говоря, не могут быть представлены явными аналитическими выражениями, допускающими полный анализ. Однако можно установить, что по-прежнему существует ограниченный дискретный спектр собственных частот: $0 < \omega_{mn} < 1$ (в размерных переменных он ограничен сверху максимальной частотой N^* Брента — Вяйсяля, $N^* = \max_b N(b)$, $\tau = N^* t$). Свойство всюду плотности множества $\{\omega_{mn}\}$ на отрезке $\omega \in [0, 1]$ также сохраняется; эти утверждения следуют из анализа соответствующей задачи Штурма — Лиувилля.

Отмеченные выше свойства спектра собственных колебаний непрерывно стратифицированной жидкости, целиком заполняющей сосуд, существенным образом изменяют характер поведения решения неоднородной задачи (1.11), (1.12) по сравнению с соответствующими случаями дискретной стратификации [1—3], для которых спектр $\{\omega_n\}$ одномерный и монотонно возрастающий по n, причем $\omega_n \sim \sqrt{n}$ для $n \gg 1$.

Итак, применяя метод Фурье и используя найденную полную ортогональную систему собственных функций $\{\Phi_{mn}(\alpha, \beta)\}$ (2.1), можно построить искомое решение задачи (1.11), (1.12) в виде двойного ряда

$$\Psi(\alpha, \beta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{in} \Phi_{2i+1,\, n}(\alpha, \beta)\, \theta_{in}(\tau) \tag{2.3}$$

$$\Psi_{in} = \Psi_{in}(r, \gamma) = -8\pi^{-2}\gamma\,[1 - (-1)^n e^{-1/2\gamma}]\, \chi_{in}(r, \gamma)$$

$$\chi_{in}(r, \gamma) = n\left\{(2i+1)\left(n^2 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}\right)\left[\frac{(2i+1)^2}{r^2} + n^2 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}\right]\right\}^{-1}$$

$$\theta_{in}(\tau) = \int_0^{\tau} w_*(\tau') \frac{\sin \omega_{2i+1,\, n}(\tau - \tau')}{\omega_{2i+1,\, n}}\, d\tau' =$$

$$= \int_0^{\tau} c_*(\tau') \cos \omega_{2i+1,n}(\tau - \tau') d\tau' - c_*(0) \frac{\sin \omega_{2i+1,\, n}\tau}{\omega_{2i+1,\, n}}$$

$$c_*(\tau) = (N_0 h)^{-1} c\,(\tau/N_0)$$

Следует отметить, что $\Psi \sim \gamma$, где коэффициент $\gamma > 0$ характеризует относительную стратификацию. Слагаемые в (2.3), отвечающие четным значениям $m = 2i$, отсутствуют аналогично случаям дискретной стратификации [1—3]. Малые смещения частиц жидкости $\xi(a, b, t)$, $\eta(a, b, t)$ (1.5) относительно начального положения $(a, b) \in D$ определяются формулами (1.9), (1.10) на основе известного выражения (2.3) для безразмерной функции тока $\Psi(\alpha, \beta, \tau)$.

Пусть относительная стратификация мала, т. е. отношение $\gamma = N_0/\sqrt{g/h} \ll 1$. Тогда, пренебрегая слагаемыми порядка γ^2 и выше, для искомых величин Ψ, ξ, η можно получить более простые выражения. Суммирование в (2.3) будет проводиться по нечетным значениям индекса $n = 2j + 1$, $j = 0, 1, \ldots$ Выражения для коэффициентов Ψ_{in} (2.3) и функций $\Phi_{mn}(\alpha, \beta)$ (2.1) приводятся к виду ($i, j \geqslant 0$):

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad &\Psi_{in} = \Psi_{in}{}^*(r, \gamma) = -16\pi^{-2}\gamma\,\{(2i+1)(2j+\\ &+1)\,[(2i+1)^2 r^{-2} + (2j+1)^2]\}^{-1}\\ &\Phi_{mn}(\alpha, \beta) = \Phi_{ij}{}^*(\alpha, \beta) = \sin \pi r^{-1}(2i+\\ &+1)\,\alpha \sin \pi(2j+1)\,\beta\end{aligned}$$

Выражения для производных функций $\Phi_{mn}(\alpha, \beta)$ по α, β также упрощаются, а вместе с ними и выражения для смещений частиц $\xi(a, b, t)$, $\eta(a, b, t)$. Собственные частоты ω_{mn} (2.2) как функции параметра стратификации γ могут быть выражены более просто отбрасыванием членов $O(\gamma^2)$; в функциях $\theta_{in}(\tau)$ (2.3), содержащих $\omega_{mn}\tau$, величины $O(\gamma^2\tau)$ могут быть отброшены, если величина $\Theta = N_0 T$ не очень велика. Таким образом, при малых $\gamma > 0$ функции Ψ, ξ, η имеют порядок γ и обращаются в нуль при $\gamma = 0$, что с очевидностью следует из (1.11), (1.9). Кроме того, функции $\Psi = \xi = \eta \equiv 0$, если ускорение $w(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$.

Скорости частиц жидкости $v_x(a, b, t)$, $v_y(a, b, t)$ в рассматриваемом линейном приближении получаются из выражений (1.5) на основе формул (1.9), (1.10), (2.3), определяющих смещения $\xi(a, b, t)$, $\eta(a, b, t)$, дифференцированием коэффициентов Фурье $\theta_{in}(\tau)$ по t

$$(2.5)\qquad v_x(a, b, t) = \frac{\partial\xi}{\partial t} = h\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_{in}\frac{\partial\Phi_{2i+1,n}}{\partial\beta}\frac{d\theta_{in}}{dt}$$

$$v_y(a, b, t) = \frac{\partial\eta}{\partial t} = -h\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_{in}\frac{\partial\Phi_{2i+1,n}}{\partial\alpha}\frac{d\theta_{in}}{dt}$$

$$\frac{d\theta_{in}(\tau)}{d\tau} = N_0^{-1}\frac{d\theta_{in}(\tau)}{dt} = \int_0^\tau w_*(\tau')\cos\omega_{2i+1,n}(\tau-\tau')\,d\tau' =$$

$$= -\omega_{2i+1,n}\int_0^\tau c_*(\tau')\sin\omega_{2i+1,n}(\tau-\tau')\,d\tau' + c_*(\tau) + c_*(0)\sin\omega_{2i+1,n}\tau$$

Таким образом, построенные двойные ряды (2.3)—(2.5) дают формальное решение краевой задачи (1.11), (1.12) в безразмерных переменных. Переход к исходным размерным переменным производится по формулам (1.10). Свойства сходимости полученных формальных рядов исследуются ниже.

3. Исследование решения внутренней краевой задачи. При помощи мажорантного признака сходимости двойных рядов можно установить, что ряд (2.3) для функции тока $\psi(\alpha, \beta, \tau)$ абсолютно и равномерно сходится в области $(\alpha, \beta, \tau) \in \Delta \times [0, \Theta]$ (1.10) для интегрируемых по Риману, в частности кусочно-гладких функций $w_*(\tau)$, $\tau \in [0, \Theta]$. Кроме того, величина w_* согласно (1.5) предполагается достаточно малой для выполнения основного условия применимости линейной теории.

Функция тока Ψ в области (1.10) мажорируется функцией времени вида

$$(3.1)\qquad |\Psi(\alpha, \beta, \tau)| \leqslant C_\Psi\vartheta(\tau),\quad \vartheta(\tau) = \int_0^\tau |w_*(\tau')|\,(\tau-\tau')\,d\tau'$$

$$C_\Psi(r, \gamma) = 8\pi^{-2}\gamma\,(1 + e^{-1/2\gamma})\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{in}(r, \gamma)$$

Двойной ряд в оценке (3.1) абсолютно и равномерно сходится для произвольных $0 < r^2$, $\gamma^2 < \infty$ и может быть легко оценен, поскольку его коэффициенты достаточно быстро убывают (как величины $c_{in} \sim [in\,(i^2 + n^2)]^{-1}$).

Производные по a, b функции тока $\psi = h^2\Psi$, определяющие смещения ξ, η частиц согласно (1.9), получаются почленным дифференцированием коэффициентов $\Phi_{mn}(\alpha, \beta)$

(2.3). Функции $\xi(a, b, t)$, $\eta(a, b, t)$ мажорируются следующими функциями времени (аналогичными (3.1) для $\Psi(\alpha, \beta, \tau)$):

$$|\xi| \leqslant C_\xi \vartheta(\tau), \ |\eta| \leqslant C_\eta \vartheta(\tau), \ \tau = N_0 t \in [0, \Theta] \tag{3.2}$$

$$C_\zeta = 8\pi^{-2}\gamma(1 + e^{-1/2\gamma})\, h \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{in}^{\zeta} \chi_{in} \quad (\zeta = \xi, \eta)$$

$$D_{in}^{\xi} = [n^2 + \gamma^2/(4\pi^2)]^{1/2}, \ D_{in}^{\eta} = 2i + 1$$

Двойные числовые ряды (3.2) для постоянных C_ζ $(\zeta = \xi, \eta)$ сходятся, поскольку их коэффициенты убывают быстрее, чем величины $(in)^{-3/2}$.

Частное дифференцирование по t (или τ) не ухудшает свойств сходимости рядов для Ψ и ξ, η (см. (2.5)), что объясняется ограниченностью частот: $\omega_{mn} \leqslant N_0$ (или $\omega_{mn} < 1$). Поэтому выражения (2.5) для скоростей частиц жидкости получаются почленным дифференцированием коэффициентов Фурье $\theta_{in}(\tau)$. Интересно отметить, что при этом свойства суммируемости рядов по индексу n улучшаются, а сходимость по i ухудшается (см. далее).

Сходимость более высоких производных по α, β функции тока $\Psi(\alpha, \beta, \tau)$ в общем случае не гарантируется. Поэтому решение $\Psi = \Psi(\alpha, \beta, \tau)$ (2.3) краевой задачи (1.11), (1.12) следует понимать в смысле сильной сходимости равенства (1.11), получаемого почленным дифференцированием, т. е. по норме пространства $W_2^{(2)}(\Delta)$ с весом $e^{-\gamma\beta}$ [6, 7].

4. Управление движением сосуда и внутренними волнами в жидкости. Рассматриваются задачи о кинематическом управлении движением сосуда: ускорение $w(t) = dc(t) / dt$, $t \in [0, T]$ считается управлением из рассматриваемого класса кусочно-гладких функций, обеспечивающих существование решения внутренней краевой задачи (см. п. 3). В работах [8—12] и др. имеется много постановок задач управления системами с распределенными параметрами и определений управляемости. Ниже используется понятие управляемости, принятое, например, в [8, 11, 12] как управляемость для системы счетного числа маятников посредством одной управляющей функции (см. также [2, 3, 13, 14]).

4.1. Для приложений может представить интерес решение задачи о перемещении сосуда из некоторого начального состояния $s(0) = s^\circ$, $c(0) = c^\circ$ $(c = ds / dt)$ в заданное конечное $s(T) = s^*$, $c(T) = c^*$ (или в состояние, когда одна из величин $s(T)$ или $c(T)$ не фиксирована). При этом требуется, чтобы жидкость совершала заданное движение относительно стенок сосуда, например покоилась.

4.2. Из установленных в п. 2 свойств спектра $\{\omega_{mn}\}$ (2.2) собственных колебаний экспоненциально стратифицированной жидкости в сосуде следует, что в общем случае рассматриваемая система со счетным числом колебательных степеней свободы неуправляема на конечном интервале времени [2, 3, 11, 12]. В рассматриваемом случае также не существует асимптотического квазистационарного решения задачи, связанного с выбором достаточно малого по величине управляющего воздействия $w(t)$, $t \in [0, T]$, и соответствующего большого значения конца интервала времени T, таких, чтобы задача перемещения сосуда была решена, а смещения частиц жидкости оставались асимптотически малыми (аналогично [2, 3]). Данная ситуация объясняется тем, что частоты собственных колебаний $\omega_{mn} \downarrow 0$ при $n \to \infty$ и фиксированном значении $m \geqslant 1$. Поэтому при изменении переменных $s(t)$ или $c(t)$ на существенную величину порядка единицы аналогично изменится горизонтальная составляющая смещения $\xi(a, b, t)$. Можно установить, что при таком управлении величины $\psi(a,$

b, t), η (a, b, t) и $v_x = \partial\xi / \partial t$, $v_y = \partial\eta / \partial t$ остаются асимптотически малыми. Указанный режим управления можно осуществить, например, при помощи функций w (t) следующего вида.

1°. Кусочно-постоянные функции w (t), $t \in [0, T]$:

(4.1) $$w(t) = w_k, \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \quad w_k = \text{const}, \quad k = 1, \ldots, k^*$$
$$t_0 = 0, \quad t_{k^*} = T, \quad t_{k-1} < t_k, \quad \bigcup_{k=1}^{k^*} (t_{k-1}, t_k] = (0, T]\ .$$

Здесь величины параметров управления w_k, t_k, k^* подлежат определению [2, 3].

2°. Быстро осциллирующие управления w (t), $t \in (0, T]$:

(4.2) $$w(t) = w_0 + \sum_{p=1}^{p^*} (w_p{}^c \cos \nu_p t + w_p{}^s \sin \nu_p t)$$
$$w_0, \quad w_p^{c,s}, \quad \nu_{p-1} < \nu_p = \text{const}, \quad \nu_p/N_0 > 1, \quad p = 1, \ldots, p^*$$

Условие $\nu_p > N_0$ в (4.2) имеет целью избежание резонанса (см. выражение (2.3) для θ_{in} (τ)). Параметры управления подлежат определению из конечных условий.

Управление w (t), $t \in [0, T]$ может представлять сумму указанных функций вида (4.1), (4.2) и т. п.

В выражениях (4.1), (4.2) величины $| w_k |$, $| w_0 |$, $| w_p{}^{c,s} |$ предполагаются достаточно малыми, а величина T — большой, причем изменения s (T) — $c°T$ — $s°$ и (или) c (T) — $c°$ должны быть существенными (порядка единицы), что и представляет интерес для практики.

В частном случае управления w (t) (4.2), когда $w_0 = 0$ и среднее значение $\langle c\,(t)\rangle_t$ скорости c (t) ($c^{\boldsymbol{\cdot}}$ (t) $= w$ (t), c (0) $= c°$) совпадает с начальным значением $c°$ ($\langle c\,(t)\rangle_t = c°$), это приведет к асимптотически малым изменениям величин c (t) и s (t) для всех $t \in (0, T]$: $c\,(t) - c° = O\,(\max_t\, | w |\, \nu_1^{-1})$, $s\,(t) - c°t - s° = O\,(\max_t | w | > \nu^{-2})$, а также к асимптотически малым величинам ψ, ξ, η, v_x, v_y. Последнее утверждение следует из формул типа (2.3), (2.5) и выражений для $\partial\psi / \partial b$, $-\partial\psi / \partial a$ в результате элементарного интегрирования по времени и оценки рядов, которые в этом частном случае абсолютно и равномерно сходятся и равномерно по t ограничены для $t \in [0, T]$, $T < \infty$. Если же функция w (t) (4.2) вызывает существенное изменение $s\,(t)$ ($\langle c\,(t)\rangle_t \neq c°$, например, $w_0 \neq 0$), то такое управление, по-видимому, может приводить к аналогичному существенному изменению величины $\xi = \xi$ (a, b, t), поскольку нельзя установить соответствующих равномерных по t оценок для ξ (оценки приводят к расходимости по индексу n ряда для $\partial\psi / \partial b$). Таким образом, непрерывно стратифицированная тяжелая идеальная жидкость, целиком заполняющая прямоугольный сосуд, «не реагирует» на малые высокочастотные горизонтальные вибрации сосуда.

4.3. Существенное изменение состояния жидкости (в рамках линейного подхода) — значительное горизонтальное и вертикальное «перемешивание» ее частиц, как следует из (2.3), (2.5) и выражений для производных функции тока ψ по a и b, происходит на частотах ν_p, лежащих в резонансном диапазоне $\{\nu_p\} \in (0, N_0)$. Наиболее эффективное влияние монохроматических (одночастотных) колебаний сосуда, приводящих к максимальному росту по t величин смещений $| \xi |$ и $| \eta |$, реализуется при $\nu_p = N_0\omega_{1n^*}$, где безразмерные частоты ω_{mn} определены согласно (2.2), $m = 1$, а $n = n^*$ и n^* подлежит определению. Значение $m = 1$ ($i = 0$)

отвечает наибольшим величинам коэффициентов Ψ_{in} в выражениях для смещений $\xi = \partial\psi / \partial b$, $\eta = -\partial\psi / \partial a$ вследствие монотонного их убывания с ростом $m = 2i + 1$.

Можно установить, что для фиксированного $r^2 > 0$ и достаточно малого $\gamma^2 > 0$ экстремальное значение $n^* = 1$. В общем случае произвольных $0 < r^2$, $\gamma^2 < \infty$ экстремальные значения индексов $n^* = n_\xi^*$ для ξ и $n^* = n_\eta^*$ для η могут быть определены решением соответствующих задач на максимум. Согласно (2.3), (4.2) (при $w_0 = 0$) и выражениям для $\partial\psi / \partial b$, $\partial\psi / \partial a$ для определения оптимальных индексов η_ζ^* ($\zeta = \xi, \eta$) требуется максимизировать по $n = 1, 2, \ldots$ коэффициенты

$$f_\zeta(n) = n\,[n^2 + \gamma^2 / (4\pi^2)]^{-\lambda_\zeta}\,[r^{-2} + n^2 + \gamma^2 / (4\pi^2)]^{-1/2} \tag{4.3}$$
$$\lambda_\xi = 1/2, \quad \lambda_\eta = 1$$

Стандартными методами анализа функций одного переменного находятся искомые значения индексов

$$n_\zeta^* = [x_\zeta] \vee n_\zeta^* = [x_\zeta] + 1 \tag{4.4}$$
$$x_\xi = (\gamma^2/(4\pi^2))^{1/4}\,(r^{-2} + \gamma^2/(4\pi^2))^{1/4}, \quad x_\eta = 2^{-1/4} x_\xi$$

В выражениях (4.4) квадратные скобки означают целую часть положительного числа x_ζ. Очевидно, что при $x_\zeta < 1$ (если γ^2 достаточно мало) $n_\zeta^* = 1$. Если $x_\zeta \geqslant 1$, то берутся значения $n_\zeta^* = [x_\zeta]$ при условиях $f_\zeta([x_\zeta]) > f_\zeta([x_\zeta] + 1)$ и значения $n_\zeta^* = [x_\zeta] + 1$ ($\zeta = \xi, \eta$), если имеют место обратные неравенства.

Для приложений может также представить интерес исследование совместных колебаний жидкости и сосуда, находящегося на упругом основании, и другие постановки задач динамики твердого тела с полостями прямоугольной и других форм, содержащими тяжелую идеальную непрерывно стратифицированную жидкость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Управление колебаниями неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 27—35.
3. *Акуленко Л. Д.* О кинематическом управлении движением сосуда с идеальной тяжелой жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 39—46.
4. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир. 1981. 598 с.
5. *Секерж-Зенькович С. Я.* Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости при вертикальных колебаниях сосуда // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 270. С. 1089—1091.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ. 1950. 255 с.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
8. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука. 1975. 568 с.
9. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Охезин С. П.* Задачи управления в системах с распределенными параметрами // Динамика управляемых систем. Новосибирск: Наука, 1979. С. 199—208.
10. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972. 416 с.
11. *Полтавский Л. Н.* О финитной управляемости бесконечных систем маятников // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1979. Т. 245. № 6. С. 318—321.
12. *Полтавский Л. Н.* О связи резонансных свойств и управляемости в многомерных бесконечных системах маятников // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1979. Т. 246. № 1. С. 24—27.
13. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1095—1103.
14. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Кинематическое управление движением упругой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 168—176.

Москва

Поступила в редакцию
8.I.1986