Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 532.516

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА В ОКРЕСТНОСТИ КОНТАКТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Баутин С. П.

Для системы уравнений Навье — Стокса, описывающей течения вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости, доказывается, что контактная поверхность является характеристикой кратности единица. Определяются условия, которые необходимо задавать для однозначной разрешимости соответствующей задачи Коши. В случае аналитичности входных данных задачи доказывается аналитичность решения и указывается алгоритм его построения. Выписывается транспортное уравнение для слабого разрыва на контактной поверхности. Для одномерных плоскосимметричных течений приводится решение транспортного уравнения, а также вид первых коэффициентов рядов, задающих течение. Выявляется экспонента от времени, определяющая процесс выравнивания малых возмущений вблизи соответствующих контактных поверхностей. В виде рядов по степеням этой экспоненты строятся затухающие с ростом времени решения. Первые слагаемые рядов — периодические функции пространственной переменной. У периодических слагаемых выделяются две основные частоты, которые оказываются обратно пропорциональны вязкости. Обсуждается возможность проявления в течениях вязкого газа соответствующих осцилляций.

1. Рассматривается система уравнений Навье — Стокса

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\mathbf{V}=0 \\
&\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\left\|\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right\|^*\right)+c_1^2\nabla\rho+b_1\nabla T=\rho\mathbf{g}+ \\
&+(\operatorname{div}\mathbf{V})\left(\nabla\mu'-\frac{2}{3}\nabla\mu\right)+\nabla\mu\left(\left\|\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right\|^*+\left\|\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right\|\right)+ \\
&+\left(\mu'+\frac{1}{3}\mu\right)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{V})+\mu\Delta\mathbf{V} \\
&c_v\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla T\right)+s_1\operatorname{div}\mathbf{V}=\varkappa\Delta T+\nabla\varkappa\cdot\nabla T+\Phi+Q
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

для течений вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости [1, 2]. Здесь t — время, x_1, x_2, x_3 — пространственные координаты, ρ — плотность, v_1, v_2, v_3 — декартовы проекции вектора $\mathbf{V}$ скорости среды, T — температура, $\mathbf{g}$ — вектор внешних массовых сил, μ, μ' — коэффициенты динамической и объемной вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, Q — мощность тепловых источников или стоков; Φ — диссипативная функция, $\|\partial v_\alpha/\partial x_\beta\|$ — матрица Якоби, $\|\partial v_\alpha/\partial x_\beta\|^*$ — транспонированная матрица Якоби, Δ, div, ∇ — обозначения операторов Лапласа, дивергенции и градиента; точкой обозначено скалярное произведение; векторы рассматриваются как векторы-строки и произведение вектора на матрицу вычисляется по обычному правилу умножения матриц. При выводе системы (1.1) предполагалось, что в качестве независимых термодинамических параметров выбраны ρ, T и уравнения состояния удовлетворяют основному термодинамическому тождеству. Поэтому считаются заданными

$$\mu,\ \mu',\ \varkappa,\ p,\ e \tag{1.2}$$

как функции ρ, T [2] (p — давление, e — внутренняя энергия). Тогда

$$c_1 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b_1 = \frac{\partial p}{\partial T}, \quad c_v = \frac{\partial e}{\partial T}, \quad s_1 = p - \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} = Tb_1$$

Для системы (1.1) при $\mu' = 0$; $\mu, \varkappa = \text{const} > 0$ в случае идеального (совершенного) политропного газа с уравнениями состояния

(1.3) $$p = R\rho T,\ e = c_v T;\ R, c_v = \text{const} > 0$$

имеются локальные в многомерном случае и глобальные в одномерном плоскосимметричном случае теоремы о существовании решений задачи Коши и краевых задач. Точные формулировки и подробная библиография приведены в [3].

Для общего случая зависимостей параметров (1.2) от ρ, T при малых t доказано [4] существование решения многомерной задачи Коши, если начальное распределение температуры и значения μ, $\varkappa$ строго отделены от нуля. В случае $\mu = \mu' = \varkappa = 0$ система (1.1) имеет пять характеристик: две звуковые и контактную кратности три [5]. При $\mu \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ (1.1) — смешанного типа и, как показано ниже, при $\mu > 0$, $\mu' \geqslant \geqslant 0$, $\varkappa > 0$ в сжимаемых течениях контактная поверхность является характеристикой кратности единица.

Наличие характеристики позволяет «склеивать» через слабый разрыв различные решения и в случае аналитичности входных данных задачи применять для этого метод характеристических рядов [6, 7]. Выяснение вопроса о наличии у системы (1.1) характеристики и о возможности построения локального аналитического решения в ее окрестности проводится в соответствии с [8].

Пусть некоторая поверхность в пространстве (t, $\mathbf{x}$) задана уравнением

(1.4) $$x_1 = a(t, x_2, x_3)$$

где функция a предполагается аналитической в некоторой окрестности точки ($t = t_0$, $x_2 = x_{20}$, $x_3 = x_{30}$) и $a(t_0, x_{20}, x_{30}) = x_{10}$. При замене переменных

(1.5) $$z = x_1 - a(t, x_2, x_3),\ \xi = x_2,\ \zeta = x_3,\ t' = t$$

поверхность (1.4) перейдет в координатную плоскость $z = 0$. Производные по t, ξ, ζ (штрих у t опущен) будут для нее внутренними, по z — выводящими и $\partial/\partial z = \partial/\partial x_1$. Вид системы, в которую при замене (1.5) перейдет система (1.1), из-за громоздкости не приводится. Эта система в дальнейшем для краткости также будет называться системой (1.1). Поскольку в ней старшими выводящими производными от неизвестных функций $\mathbf{U} = \{\rho, \mathbf{V}, T\}$ являются соответственно ρ_z, $\mathbf{V}_{zz}$, T_{zz} то начальными условиями при постановке задачи Коши на поверхности (1.4) должны быть следующие:

(1.6) $$z = 0,\ \rho = \rho_0,\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_0,\ \mathbf{V}_z = \mathbf{V}_1,\ T = T_0,\ T_z = T_1$$

(в правых частях равенств (1.6) — заданные функции t, ξ, ζ).

В уравнение неразрывности из старших выводящих производных входит только ρ_z, причем линейно с коэффициентом $b = v_1 - a_\xi v_2 - a_\zeta v_3 - a_t$. При заданных a, $\mathbf{V}_0$ условие $b = 0$, т. е.

(1.7) $$v_{10} - a_\xi v_{20} - a_\zeta v_{30} - a_t = 0$$

равносильно тому, что (1.4) — контактная поверхность, состоящая из траекторий частиц среды, которые в момент $t = t_0$ составляли поверхность $x_1 = a(t_0, x_2, x_3)$ [5]. Если при заданных функциях (1.4), (1.6) $b = 0$, то уравнение неразрывности при $z = 0$ имеет вид

(1.8) $$\rho_{0t} + v_{20}\rho_{0\xi} + v_{30}\rho_{0\zeta} + \rho_0 (v_{11} - a_\xi v_{21} - a_\zeta v_{31} + v_{20\xi} + v_{30\zeta}) = 0$$

Так как (1.8) не содержит старших выводящих производных, то оно является дополнительным соотношением, налагаемым на начальные условия (1.6). Следовательно, задача Коши (1.1), (1.6) при условии (1.7) есть характеристическая задача Коши, а соотношение (1.8) — необходимое условие ее разрешимости [8]. В дальнейшем будет предполагаться, что при заданных функциях (1.4), (1.6) условия (1.7), (1.8) выполняются. В частности, так будет, если (1.4), (1.6) получены соответствующим образом из какого-либо решения системы (1.1).

Старшая выводящая производная от T — T_{zz} входит только в уравнение энергии, и коэффициент перед ней равен $\varkappa A$, $A = 1 + a_\xi^2 + a_\zeta^2$. Следовательно, при условии

(1.9) $\qquad \varkappa(\rho_0, T_0) > 0$

уравнение энергии можно разрешить относительно T_{zz}. В правую часть полученного уравнения не входит $\mathbf{V}_{zz}$, а ρ_z будет присутствовать, если только $\varkappa$ зависит от ρ. В условии (1.9) учтен физический смысл функции $\varkappa$, хотя формально там достаточно поставить знак неравенства, $v_{\alpha zz}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) описываются системой линейных алгебраических уравнений с определителем $d = (\mu' + 4\mu/3)\,\mu^2 A^3$, ρ_z входит только в свободные члены этой системы и притом линейно. Поэтому при условиях (учтен физический смысл функций μ, μ')

(1.10) $\qquad \mu(\rho_0, T_0) > 0,\ \mu'(\rho_0, T_0) \geqslant 0$

$v_{\alpha zz}$ можно выразить через $\mathbf{U}$, ρ_z, $\mathbf{V}_z$, T_z и внутренние производные от них. Затем полученные выражения для $v_{\alpha zz}$ подставляются в продифференцированное один раз по z уравнение неразрывности. В полученное таким образом уравнение все вторые производные входят линейно, из старших выводящих производных присутствует только ρ_{zz} с коэффициентом b, коэффициент перед ρ_{zt} равен единице.

В результате поставленная характеристическая задача Коши сведена к стандартному виду [8]: 1) для получения единственного решения задачи (1.1), (1.6) при выполнении соотношений (1.7)—(1.10) достаточно задать одно дополнительное условие

(1.11) $\qquad \rho(z, t_0, \xi, \zeta) = \rho_{01}(z, \xi, \zeta),\ \rho_{01}(0, \xi, \zeta) = \rho_0(t_0, \xi, \zeta)$

с произвольной функцией ρ_{01}, согласованной с ρ_0; 2) в случае аналитичности в окрестности точки $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{U}_0)$ функций $\mathbf{g}$, Q, (1.2), (1.6), (1.11) решением задачи (1.1), (1.6), (1.11) являются аналитические функции.

Решение представимо в виде локально сходящихся рядов по степеням z. Коэффициенты рядов зависят от t, ξ, ζ и рекуррентно определяются по следующей процедуре. Уравнение неразрывности дифференцируется $k + 1$ раз ($k \geqslant 0$) по z, уравнения движения и энергии — k раз, z полагается равным нулю, подставляются начальные условия и уже найденные коэффициенты. Из продифференцированных уравнений движения, как из алгебраической системы с отличным от нуля определителем, находятся компоненты вектора $\mathbf{V}_{k+2} = \partial^{k+2}\mathbf{V}(0, t, \xi, \zeta)/\partial z^{k+2}$. Они зависят от $\rho_{k+1} = \partial^{k+1}\rho(0, t, \xi, \zeta)/\partial z^{k+1}$ и предыдущих коэффициентов рядов. Полученные выражения подставляются в продифференцированное уравнение неразрывности, которое после этого становится уравнением в частных производных первого порядка для ρ_{k+1}: коэффициенты и правая часть этого уравнения зависят только от предыдущих коэффициентов рядов; коэффициент перед $\partial \rho_{k+1}/\partial t$ равен единице; начальное условие для ρ_{k+1} при $t = t_0$ определяется из продифферечцированного $k+1$ раз по z соотношения (1.11). Таким образом, ρ_{k+1} находится как решение соответствующей задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка. Затем из продифференцированных уравнений движения находится $\mathbf{V}_{k+2}$. Наконец, из продифференцированного уравнения энергии, как из линейного алгебраического уравнения с отличным от нуля коэффициентом перед неизвестной, определяется $T_{k+2} = \partial^{k+2} T\,(0, t, \xi, \zeta)/\partial z^{k+2}$.

Все дифференциальные уравнения для ρ_{k+1} ($k \geqslant 0$) в силу специфики системы (1.1) линейные. Первое из них есть так называемое транспортное уравнение, так как оно описывает поведение ρ_1

$$
\begin{aligned}
(1.12)\qquad & \rho_{1t} + v_{20}\rho_{1\xi} + v_{30}\rho_{1\zeta} + [2\,(v_{11} - a_\xi v_{21} - a_\zeta v_{31}) + v_{20\xi} + v_{30\zeta}]\,\rho_1 + \\
& + \rho_0\,(v_{12} - a_\xi v_{22} - a_\zeta v_{32} + v_{21\xi} + v_{31\zeta}) + v_{21}\rho_{0\xi} + v_{31}\rho_{0\zeta} = 0
\end{aligned}
$$

В этом уравнении величины $v_{\alpha 2} = v_{\alpha zz}\,(0, t, \xi, \zeta)$ заменяются на соответствующие выражения, полученные из уравнений движения при $z = 0$. Отметим, что коэффициенты уравнения (1.12) зависят от μ, μ' и не зависят от $\varkappa$. При некоторых соотношениях между функциями (1.6) (из-за громоздкости эти соотношения и выражения для $v_{\alpha 2}$ не приводятся) уравнение для ρ_1 является однородным и в этом случае величина ρ_1 либо всегда равна нулю, либо всегда отлична от нуля.

Из уравнений движения следует линейная связь между v_{1zz} и ρ_z с коэффициентами, отличными от нуля при выполнении условий (1.10) и $c_1^2\,(\rho_0, T_0) > 0$. Поэтому в качестве дополнительного условия, обеспечивающего единственность решения, вместо (1.11) можно задавать $v_1\,(z, t_0, \xi, \zeta) = v_{01}\,(z, \xi, \zeta)$ с произвольной функцией v_{01}, но удовлетворяющей условиям согласования с начальными данными (1.6): $v_{01}\,(0, \xi, \zeta) = v_{10}\,(t_0, \xi, \zeta)$, $v_{01z}\,(0, \xi, \zeta) = v_{11}\,(t_0, \xi, \zeta)$. При «склеивании» на контактной поверхности разных решений слабые разрывы в общем случае присутствуют, начиная с производных ρ_z, $\mathbf{V}_{zz}$, T_{zz}. Поэтому у «склеенного» решения потоки массы, импульса и энергии, зависящие от $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}_z$, T_z, на контактной поверхности будут непрерывны. Из приведенных рассуждений следует, что при условиях (1.9), (1.10) у системы (1.1), кроме контактной, нет других характеристик вида (1.4).

Используя предложенную в [9, 10] методику, можно доказать, что граничными точками $t_{1*} < t < t_{2*}$ области сходимости ряда для аналитической функции $\mathbf{U}$ по переменной t (при $t \to t_{i*}$ и фиксированных ξ, ζ радиус сходимости ряда стремится к нулю как некоторая положительная степень от $|\,t - t_{i*}\,|$) являются ближайшие к $t = 0$ точки, в которых нарушается аналитичность функций (1.6), ρ_1, $1/(\varkappa A)$, $1/d$. В частности, если перечисленные функции аналитичны при всех t, то область сходимости ряда для $\mathbf{U}$ будет неограничена по t, радиус сходимости с ростом $|\,t\,|$ стремится к нулю.

2. Некоторые свойства решений характеристической задачи Коши с данными на контактной поверхности, а также возможности использования этих решений в конкретных задачах будут рассмотрены в случае одномерных плоскосимметричных течений газа с уравнениями состояния (1.3), с коэффициентами вязкости и теплопроводности $\mu = \mu_0 T^\omega$, $\mu' = 0$, $\varkappa = \varkappa_0 T^\lambda$; $\mu_0, \varkappa_0 = \mathrm{const} > 0$, $\omega, \lambda = \mathrm{const} \geqslant 0$ и при отсутствии внешних массовых сил и тепловых источников.

Используя некоторые положительные постоянные L, ρ_*, u_*, T_*, определяемые постановкой конкретной задачи, систему (1.1) стандартным способом запишем в безразмерных переменных

(2.1)
$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0$$
$$\rho(u_t + uu_x) + \frac{1}{M^2\gamma}(T\rho_x + \rho T_x) = \frac{4}{3\,\mathrm{Re}}T^{\omega-1}(\omega T_x u_x + T u_{xx})$$
$$\rho(T_t + uT_x) + (\gamma-1)\rho T u_x =$$
$$= (\gamma-1)\frac{4M^2\gamma}{3\,\mathrm{Re}}T^{\omega}u_x^2 + \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}T^{\lambda-1}(\lambda T_x^2 + TT_{xx})$$
$$x = x_1, \quad u = v_1, \quad M^2 = \frac{u_*^2}{c_v(\gamma-1)T_*\gamma} = \frac{u_*^2}{c_*^2},$$
$$\mathrm{Re} = \frac{L\rho_* u_*}{\mu_*}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{c_v\gamma\mu_*}{\varkappa_*}$$
$$\gamma = 1 + R/c_v, \quad \mu_* = \mu_0 T_*^{\omega}, \quad \varkappa_* = \varkappa_0 T_*^{\lambda}$$

Пусть контактная поверхность, которую можно считать траекторией движения непроницаемого поршня, задана уравнением

(2.2)
$$x = a(t)$$

В соответствии с полученными выше результатами вводится независимая переменная $z = x - a(t)$ и при $z = 0$, т. е. на контактной поверхности задаются значения газодинамических параметров и первые выводящие производные ($\partial/\partial z = \partial/\partial x$) для скорости и температуры

(2.3)
$$z = 0, \ \rho = \rho_0(t), \ u = u_0(t), \ u_z = u_1(t), \ T = T_0(t),$$
$$T_z = T_1(t)$$

Условие того, что (2.2) есть контактная поверхность (соотношение (1.7)), приобретает вид $u_0(t) = a'(t)$. Необходимое условие разрешимости задачи (2.1), (2.3) (соотношение (1.8)) переходит в $u_1(t) = -\rho_0'(t)/\rho_0(t)$. Здесь и далее предполагается, что $\rho(x, t) > 0$. Единственное решение задачи (2.1), (2.3) определяется при дополнительно заданном распределении плотности в начальный момент времени в окрестности точки $x = x_0 = a(0)$

(2.4)
$$\rho(x, t)\,|_{t=t_0} = \rho_{01}(x), \ \rho_{01}(x_0) = \rho_0(0)$$

Решение задачи (2.1), (2.3), (2.4) представляется в виде локально сходящегося ряда

(2.5)
$$\mathrm{U}(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{U}_k(t)\frac{z^k}{k!}, \quad \mathrm{U}_k(t) = \left.\frac{\partial^k \mathrm{U}}{\partial z^k}\right|_{z=0}$$

В качестве решения транспортного уравнения и значений первых неизвестных коэффициентов рядов (2.5) получаются выражения

(2.6)
$$\rho_1(t) = \frac{1}{F_1}\left(\rho_{10} + \int_0^t F_1 F_2\,dt\right), \quad u_2(t) = \frac{\rho_1}{F_0} - \frac{F_2}{\rho_0}$$
$$F_0 = \frac{4M^2\gamma T_0^{\omega-1}}{3\,\mathrm{Re}}, \quad F_1 = \exp\left[\int_0^t\left(\frac{\rho_0}{F_0} - \frac{2\rho_0'}{\rho_0}\right)dt\right]$$
$$F_2 = \frac{\omega\rho_0 T_1 u_1}{T_0} - \frac{3\,\mathrm{Re}\,\rho_0^2}{4T_0^{\omega}}\left(u_0' + \frac{T_1}{M^2\gamma}\right), \quad \rho_{10} = \left.\frac{\partial\rho_0(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$
$$T_2(t) = \frac{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{\gamma T_0^{\lambda}}[\rho_0 T_0' + (\gamma-1)\rho_0 T_0 u_1 - (\gamma-1)F_0 T_0 u_1^2] - \frac{\lambda T_1^2}{T_0}$$

Последующие коэффициенты рядов (2.5) выписываются через предыдущие по изложенной выше процедуре при помощи квадратур и рекуррентных формул. Поскольку $\varkappa$ не зависит от ρ, то T_2 не зависит от ρ_1. Поэтому у «склеенного» решения слабый разрыв на контактной поверхности будет присутствовать у T не раньше, чем в третьей производной.

Если в какой-либо задаче граничные условия стационарны или стремятся при $t \to \infty$ к некоторым предельным значениям, то поведение решения в этом случае обозначается терминами «стационирование» [2] или «стабилизация» [11].

Пусть контактная поверхность — теплоизолированный, стоящий на месте непроницаемый поршень: $T_1 = u_0 = 0$. Тогда $F_2(t) = 0$ и поведение $\rho_1(t)$ и $u_2(t)$ определяется функцией $F_1(t)$. Если с возрастанием времени $\rho_0(t)$, $T_0(t)$ стремятся к некоторым постоянным значениям ρ_{00}, T_{00}, то решение (2.5) описывает процесс стабилизации (стационирования) течения возле теплоизолированной непроницаемой стенки. При аналитичности соответствующих функций (см. п. 1) при всех t ряд (2.5) сходится в некоторой окрестности поверхности (2.2) при всех t.

Для анализа поведения ρ_1, u_2, T_2 при $t \to +\infty$ можно использовать следующие приближенные оценки. Пусть при больших t функции ρ_0 и T_0 можно представить в виде рядов по обратным степеням $(t + t_0)$

(2.7) $$\rho_0(t) = \rho_{00} + \rho_{02}/(t + t_0) + \ldots, \quad T_0(t) = T_{00} + T_{02}/(t + t_0) + \ldots$$

Тогда F_1 также можно представить в виде ряда по обратным степеням $(t + t_0)$. Если в этом разложении оставить два первых слагаемых, то получим закон стремления $\rho_1(t)$ к нулю при возрастании t

(2.8) $$\rho_1(t) \approx \rho_{10} \exp(-Bt)(t + t_0)^{-BC}$$
$$B = \rho_{00}/F_0 > 0, \quad C = \rho_{02}/\rho_{00} + (1 - \omega)\, T_{02}/T_{00}$$

Если предположить, что величины ρ_{02}/ρ_{00} и T_{02}/T_{00} имеют одинаковый порядок, то можно получить, при каких соотношениях на $\operatorname{sign}\rho_{02}$, $\operatorname{sign} T_{02}$ и ω величина C будет положительна, а при каких отрицательна. В частности, если при $t \to \infty$ функция $\rho_0(t)$ убывает (растет) до ρ_{00}, а $T_0(t)$ растет (убывает) до T_{00}, то при $\omega > 0$ всегда $C > 0$ ($C < 0$).

В настоящее время точных и приближенных аналитических решений системы (1.1) известно мало [1, 3]. Если при построении ряда (2.5) в качестве ρ_0, T_0 взять более простые, чем (2.7), функции, то удается проанализировать структуру коэффициентов ряда (2.5) и в явном виде выписать нужное число первых слагаемых ряда.

Утверждение 1. Если $\rho_0(t)$, $u_0(t)$, $T_0(t)$, $T_1(t) = \mathrm{const}$, $T_1 = u_0 = 0$, то

(2.9) $$\rho_1 = \rho_{10}\eta, \quad \rho_2 = \rho_{20}\eta + 3\rho_{10}^2\rho_{00}^{-1}\eta^2, \quad \rho_3 = \rho_{30}\eta + \rho_{31}\eta^2 + \rho_{32}\eta^3 + \rho_{33}t\eta, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = B\rho_1/\rho_{00}, \quad u_3 = B\rho_2/\rho_{00}$$
$$T_2 = 0, \quad T_3 = (\gamma - 1)\gamma^{-1} \Pr \operatorname{Re} T_{00}^{1-\lambda} B\rho_{10}\eta$$
$$f_k = \eta P_k(t, \eta), \quad k \geqslant 4; \quad \eta = \exp(-Bt)$$

т. е. $f_k(t)$ имеют сомножитель η и являются многочленами от t, η с постоянными коэффициентами. Здесь ρ_{3i} $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ — однозначно определяемые постоянные, $f_k(t)$ — компоненты вектора U_k, степень многочленов P_k линейно зависит от k, коэффициенты многочленов (за исключением ρ_{k0}) однозначно определяются из рекуррентных формул, разных для различных компонент вектора U_k, постоянные ρ_{k0} определяются при помощи соотношения (2.4).

Доказательство утверждения проводится индукцией по k с использованием явного вида уравнения для f_k и из-за громоздкости здесь опускается. Как и в [9], показывается, что в этом случае область сходимости ряда (2.5) задается соотношением

$$\xi_1 \mid z \mid < M_2, \ \xi_1 = \max \{1, \eta, \mid t \mid\}, \ M_2 = \mathrm{const} > 0 \tag{2.10}$$

Наличие в f_k сомножителя η улучшает при $t > 0$ практическую сходимость ряда.

Соотношения (2.8), (2.9) можно использовать для приближенного описания процесса выравнивания малого возмущения вблизи соответствующей контактной поверхности: поскольку $\rho_1(t)$ есть значение $\partial\rho/\partial z$ на контактной поверхности, то приращение плотности $\Delta\rho = \rho(r, t) - \rho(0, t)$ на расстоянии r от контактной поверхности можно приближенно оценить величиной $\Delta\rho \approx \rho_1(t)\, r$. Если при введении безразмерных переменных за ρ_*, u_*, T_* взяты соответственно ρ_{00}, $[c_v(\gamma - 1)\, T_{00}\gamma]^{1/2}$, T_{00}, то $\mathrm{M} = 1$, $B = 3\,\mathrm{Re}/(4\gamma)$, т. е. показатель B обратно пропорционален вязкости. Поэтому чем меньше вязкость (строго положительная), тем быстрее идет процесс выравнивания малых возмущений вблизи соответствующей контактной поверхности. Заметим, что сделанный вывод основывается на анализе не всех коэффициентов ряда, а только первых из них. Поэтому он справедлив, только пока рассматриваемое возмущение лежит в той части области сходимости ряда, где первые слагаемые являются преобладающими. Из (2.9) следует, что эта часть области сходимости также задается соотношением (2.10), но при другом (меньшем) значении постоянной M_2.

При использовании представления (2.5) для решения конкретных задач необходимо учитывать, что оно обладает произволом в функции a, ρ_0, T_0, T_1. По этим функциям из условия для скорости на контактной поверхности и из необходимого условия разрешимости характеристической задачи однозначно определяются u_0, u_1. Кроме того, в качестве произвольной функции можно задавать при $t = 0$ распределение плотности или скорости. Распределения при $t = 0$ двух других газодинамических параметров, а также U при $t > 0$ восстанавливаются после этого однозначно. Для приближенного описания течения можно применять конечные отрезки рядов и использовать несколько разложений в окрестностях разных контактных характеристик. Свойства рядов (2.5) и вид их конкретных коэффициентов можно использовать также при конструировании разностных схем в окрестности как априори заданной контактной поверхности, так и определяемой в процессе построения решения.

3. Предлагается еще одно представление решений системы (2.1), основанное на выявленной выше функции η и ее роли в процессе стационирования.

В системе (2.1) делается замена переменных

$$\eta = \exp(-Bt), \quad x' = x \tag{3.1}$$

При этом $\partial/\partial t = -B\eta\partial/\partial\eta$, а в остальном вид системы (2.1) не изменится (штрих у x опускается). Получившаяся система будет называться системой (2.1) в переменных η, x. Якобиан преобразования (3.1) равен $-B\eta$, т. е. при $t_0 \leqslant t < +\infty$ замена взаимно однозначная. Вырождение преобразования при $\eta = 0$ связано с тем, что бесконечная полуось переводится в отрезок конечной длины.

Решение системы (2.1) в переменных η, x представляется в виде

$$\text{(3.2)}\qquad \mathrm{U}(\eta, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{U}_k(x) \frac{\eta^k}{k!}$$

Для нахождения коэффициентов $\mathrm{U}_k(x)$ $(k \geqslant 0)$ система дифференцируется k раз по η и полагается $\eta = 0$. При этом получается, что U_0 — решение стационарной системы Навье — Стокса и соответствует предельному течению, к которому при возрастании t будет стремиться решение (3.2).

При $\partial/\partial t = 0$ система (2.1) допускает три первых интеграла и сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка [1]. В частности, при $u_0 = 0$ либо $\rho_0(x) = \rho_{00}$, $T_0(x) = T_{00}$, либо $\rho_0(x) = C_1/T_0(x)$, $T_0(x) = (C_2 x + C_3)^{1/(1+\lambda)}$ $(\rho_{00}, T_{00}, C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const})$. При $u_0 \neq 0$ в качестве U_0 можно взять, например, решение Беккера, описывающее ударный переход [1].

Для U_k $(k \geqslant 1)$ получается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\text{(3.3)}\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(u_0\rho_k) - kB\rho_k + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u_k) = F_{1k}\\
&\rho_0(u_0' - kB)u_k + \rho_0 u_0 u_k' + u_0 u_0' \rho_k + \frac{1}{\mathrm{M}^2\gamma}\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 T_k + T_0\rho_k) =\\
&= \frac{4}{3\,\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}(\omega T_0^{\omega-1} u_0' T_k + T_0^{\omega} u_k') + F_{2k}\\
&\rho_0[(\gamma-1)u_0' - kB]T_k + \rho_0 u_0 T_k' + \rho_0 T_0' u_k + (\gamma-1)\rho_0 T_0 u_k' +\\
&+ [u_0 T_0' + (\gamma-1)T_0 u_0']\rho_k =\\
&= (\gamma-1)\frac{4\mathrm{M}^2\gamma}{3\,\mathrm{Re}}(\omega T_0^{\omega-1} u_0'^2 T_k + 2T_0^{\omega} u_0' u_k') +\\
&+ \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}(\lambda T_0^{\lambda-1} T_0' T_k + T_0^{\lambda} T_k') + F_{3k}
\end{aligned}$$

Здесь $F_{\alpha k}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ известным образом зависят от U_l $(0 \leqslant l \leqslant k-1)$ и от их производных. В систему (3.3) в качестве старших производных от u_k, T_k входят вторые производные. Поэтому для получения единственных значений необходимо для каждой из u_k, T_k задавать по два условия, которые могут быть как начальными при $x = 0$, так и краевыми при $x = 0$, $x = L$. Таким образом, представление (3.2) обладает произволом в две функции от t и для u, и для T. Эти произвольные функции можно задавать либо все при $x = 0$, либо часть при $x = 0$, а часть при $x = L$. Первое уравнение системы (3.3) при $u_0 \neq 0$ обладает произволом в постоянную, задающую значение ρ_k, например при $x = 0$. Если же $u_0 = 0$, то из первого уравнения системы (3.3) однозначно определяется

$$\rho_k(x) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u_k) - F_{1k}\right](kB)^{-1}$$

В этом случае ряд (3.2) произволом в функции ρ не обладает.

Утверждение 2. Пусть решение $\mathrm{U}_0(x)$ стационарной системы Навье — Стокса является аналитической в некоторой окрестности точки $x = 0$ функцией; заданы аналитические в некоторой окрестности точки $\eta = 0$ функции

$$\text{(3.4)}\qquad \begin{aligned}
&x = 0,\ \rho = \rho_{01}(\eta),\ u = u_{01}(\eta),\ u_x = u_{02}(\eta)\\
&T = T_{01}(\eta),\ T_x = T_{02}(\eta)
\end{aligned}$$

согласованные при $\eta = 0$ со значениями $\mathrm{U}_0(0)$, $\mathrm{U}_{0x}(0)$; $\mathrm{U}_k(x)$ определяются из систем (3.3) и соответствующие начальные условия находятся из функций (3.4). Тогда ряд (3.2) сходится в некоторой окрестности точки $(x = 0,\ \eta = 0)$, т. е. при $|x| < x^\circ$, $t^\circ \leqslant t < +\infty$.

Доказательство не приводится, так как утверждение является частным случаем доказанной в [8] теоремы. При этом в случае $u_0 \neq 0$ используются все функции (3.4), а в случае $u_0 = 0$ функция ρ_{01} не нужна. Далее положено $\omega = \lambda$ и в качестве компонент U_0 берутся

$$(3.5) \qquad \rho_0(x) = \rho_{00},\ u_0(x) = 0,\ T_0(x) = T_{00}$$

При $k = 1$ имеем $u_1 = T_1'(x)/(\mathrm{M}^2\gamma B)$ и в системе (3.3) остается одно однородное уравнение второго порядка для T_1. Корни характеристического уравнения для этого дифференциального уравнения чисто мнимые, и поэтому T_1 — линейная комбинация гармоник от x с частотой

$$(3.6) \qquad \nu_1 = B\mathrm{M}A_1(\gamma/T_{00})^{1/2},\ A_1 = [1 + \gamma(^3/_4\,\mathrm{Pr}^{-1} - 1)]^{-1/2}$$

Для воздуха обычно берутся значения $\gamma = 1{,}4$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$ [1, 2]. В этом случае $A_1 = 0{,}972$. Далее для упрощения вычислений полагается достаточно часто используемое [1] значение $\mathrm{Pr} = {}^3/_4$. В этом случае $A_1 = 1$.

При $k \geqslant 2$ корнями соответствующего характеристического уравнения для системы (3.3) являются четыре чисто мнимых попарно сопряженных числа. Поэтому общие решения однородных систем для U_k — соответствующие линейные комбинации от гармоник с частотами

$$(3.7) \qquad \nu_{k1} = k^{1/2}\nu_1,\ \nu_{k2} = k\nu_1[(k-1)\gamma]^{-1/2},\ k \geqslant 2$$

причем в обе неизвестные функции входят гармоники как с ν_{k1}, так и с ν_{k2}. Из (3.6), (3.7) следует: ν_{k1} и ν_{k2} монотонно возрастают с ростом k; $\nu_1 < \nu_{k1}$; $\nu_1 < \nu_{k2}$ при $\gamma \leqslant \gamma_* = k^2/(k-1)$; минимальное значение $\gamma_* = 4$ и γ_* растет с ростом k; при $\gamma > 1 + 1/(k-1)$ имеем $\nu_{k2} < \nu_{k1}$, в частности $\nu_{22} < \nu_{21}$ при $\gamma > 2$. Таким образом, минимальное значение частот равно ν_1 при $\gamma \leqslant 4$ и

$$(3.8) \qquad \nu_2 = 2\nu_1\gamma^{-1/2}$$

при $\gamma > 4$. Гармоники с частотой ν_1 имеют сомножитель η, а гармоники с частотой ν_2 — сомножитель η^2, т. е. вне зависимости от γ последние затухают быстрее. При произвольных k, n частоты ν_1, ν_{k1}, ν_{n1}, ν_{k2}, ν_{n2} будут попарно несоизмеримы, и поэтому представление (3.2) в общем случае не будет периодической функцией.

Однако можно построить следующие два класса частных решений. Первый: если за компоненты вектора U_1 взять соответствующие гармоники с частотой ν_1, а в качестве решений неоднородных систем (3.3) при $k \geqslant 2$ брать только частные решения, соответствующие виду правых частей, то U_k будут многочленами от h, xh. Здесь h есть $\cos\nu_1 x$, $\sin\nu_1 x$. Степень этих многочленов не более чем k. Впервые x появится (причем в первой степени): при $\gamma \neq 4{,}5$ в U_4, при $\gamma = 4{,}5$ в U_3. Второй класс частных решений таков: если взять $\mathrm{U}_1 = 0$, то система (3.3) при $k = 2$ будет однородной и в качестве ее решения можно взять гармоники с частотой ν_2. Тогда если взять за U_k $(k \geqslant 3)$ частные решения неоднородных систем (3.3), то U_k будут многочленами от тех же выражений, что и в первом случае, где ν_1 надо заменить на ν_2. При γ, отличных от значений 2; 3,6; 4; 8; 10, степени x заведомо не появятся в U_k для $k \leqslant 10$. Область сходимости этих частных решений задается соотношением

$$(3.9) \qquad \eta\,|x|^D < M_3;\ D,\ M_3 = \mathrm{const} > 0$$

Построенные классы частных решений обладают малым произволом — по две постоянные в T_1 или в $\mathbf{U}_2$. Первый из этих двух классов можно расширить с точки зрения произвола в решении при сохранении структуры $\mathbf{U}_k$. Для этого в качестве $\mathbf{U}_k$ при $k = n^2$ надо брать не только частные решения неоднородных систем, но и добавлять общие решения неоднородных систем, соответствующие значениям ν_1. Построенные таким образом $\mathbf{U}_k$ будут многочленами от $x^l h^{m+1}$, где $l \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и $\mathbf{U}$ будет содержать счетное число произвольных постоянных. Не вдаваясь в детали доказательства, отметим, что если модули этих произвольных постоянных растут не быстрее, чем степень некоторого положительного числа, то области сходимости решений из такого класса частных решений также будут задаваться соотношением (3.9) со своими значениями постоянных D, M_3.

Таким образом, для всех трех классов построенных частных решений первые слагаемые ряда (3.2) будут периодическими по x функциями с частотой ν_i ($i = 1$ для первого и третьего классов, $i = 2$ для второго), а последующие слагаемые — осциллирующими с той же частотой функциями. При этом амплитуды колебаний для частот ν_i затухают как η^i, значения ν_i зависят только от параметров предельного однородного течения $\mathbf{U}_0$, в соответствующих частях области сходимости рядов первые слагаемые рядов являются преобладающими. Если при введении безразмерных переменных за ρ_*, u_*, T_* взять (как сделано выше) соответствующие параметры предельного течения (3.5), то для показателя B, для выделенных частот и для $L = 2\pi/\nu$ получаются соотношения пропорциональности

$$(3.10) \qquad B \sim 1/\mu, \ \nu_B \sim 1/\mu, \ L_B \sim \mu$$

Можно ожидать, что построенные классы частных решений системы (1.1) описывают течения вязкого газа, генерируемые в однородных потоках такими возмущениями, у которых основное изменение параметров происходит на расстояниях, соизмеримых с L_B.

К таким возмущениям можно отнести ударную волну (УВ), распространяющуюся по однородному фону и оставляющую за собой однородный поток. Ширина такой УВ пропорциональна коэффициенту вязкости [1]. В системе координат, движущейся вместе с УВ, последняя является как бы постоянно присутствующим внешним возмущением, и в ее зоне все время должны проявляться подобные колебания. Вне зоны УВ, где уже нет соответствующих внешних возмущений, амплитуда этих колебаний должна затухать как $\exp(-Bt)$. Представляется, что малые быстрые колебательные перемещения зоны УВ, наблюдаемые в экспериментах, а также осцилляции, проявляющиеся при численных расчетах течений в окрестности ударных переходов (энтропийный след), как раз и есть результат возбуждения УВ подобных колебаний в течении.

Для жидкостей с $\mu = \mu_0 T^{\omega}$ повышение температуры, вызванное прохождением газа через УВ, приводит к повышению вязкости и, следовательно, уменьшает скорость затухания колебаний. Поэтому влияние колебаний может проявляться на относительно малых расстояниях перед УВ и на относительно больших за УВ. Например, при сверхзвуковом обтекании тел вязким газом подобные колебания, возбуждаемые головной УВ, могут проникать вниз по потоку на достаточные расстояния. И, следовательно, они будут взаимодействовать с различными областями течения: пограничным слоем, зонами разворота потока и т. д. Такое взаимодействие в свою очередь может вызвать проявление различных неустойчивостей.

Приведенные после формул (3.10) рассуждения, конечно, не являются строгими и скорее носят характер гипотез, нуждающихся в дальнейшей проверке как теоретическим, так и опытным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
2. *Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
3. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. 319 с.
4. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1972. Т. 87. № 4. С. 504—528.
5. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука. 1981. 368 с.
6. *Sidorov A. F.* Application of characteristic series to the solution of three-dimensional problems in gas dynamics // Numerical methods in fluid dynamics. M.: Mir, 1984. P. 184—206.
7. *Васин В. В., Сидоров А. Ф.* О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1983. № 7. С. 13—27.
8. *Баутин С. П.* Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 11. С. 2052—2063.
9. *Баутин С. П.* Исследование области сходимости специальных рядов, решающих некоторые задачи газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1978. Т. 9. № 4. С. 5—17.
10. *Баутин С. П.* Схлопывание одномерной полости // ПММ, 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 50—59.
11. *Зеленяк Т. И.* Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1972. 147 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
24.XII.1986