Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 531.36 : 534

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ВНУТРЕННЕМ РЕЗОНАНСЕ

Веретенников В. Г., Королев И. А.

Исследуются колебания систем, не обращающихся в линейные при равенстве малого параметра нулю. Предполагается, что в порождающей системе имеется резонанс нечетного порядка. Строятся условно-периодические решения порождающей системы и полной системы с точностью до первой степени малого параметра. Полученные результаты являются также дальнейшим развитием теории бифуркаций рождения цикла из положения равновесия.

1. Рассмотрим существенно нелинейную квазиавтономную систему дифференциальных уравнений порядка $2n$

$$u_k^\bullet = i\nu_k u_k + A_k v^p/v_k + \sum_{l\geqslant 1} \mu^l U_{kl}(u, v, t) \tag{1.1}$$

$$v_k^\bullet = \bar{u}_k^\bullet; \quad v_k = \bar{u}_k, \quad v^p = v_1^{p_1} v_2^{p_2} \ldots v_n^{p_n}, \quad A_k = \text{const}$$

где μ — малый параметр. Функции U_{kl} — полиномы по u_k, v_k ($k = 1, \ldots, n$) сколь угодно большой конечной степени, обращающиеся в нуль при $u = v = 0$ с условно-периодическими по t коэффициентами, представленными обобщенными конечными рядами Фурье. Ряды по параметру μ — абсолютно сходящиеся при достаточно малых его значениях в исследуемой области изменения u, v, а точка $u = v = 0$ — единственная особая точка.

Предполагается наличие резонансного соотношения нечетного порядка между частотами:

$$p_1\nu_1 + \ldots + p_n\nu_n = 0$$

$$(p_i > 0 \ \ (i = 1, \ldots, n), \ \ p = \Sigma p_i = 2m + 1 \ \ (m = 1, 2, \ldots))$$

Отметим, что к системе (1.1) при наличии внутреннего резонанса нечетного порядка и отсутствии резонансных соотношений того же порядка между собственными частотами и частотами условно-периодических коэффициентов приводится произвольная система уравнений возмущенного движения с n парами чисто мнимых корней вида

$$x_k^\bullet = -\nu_k y_k + X_k^{(p-1)} + X_k^{(p)} + \ldots, \qquad y_k^\bullet = \nu_k x_k + Y_k^{(p-1)} + Y_k^{(p)} + \ldots$$

где $X_k^{(m)}(x, y, t)$, $Y_k^{(m)}(x, y, t)$ — формы порядка m относительно x и y, которые могут иметь периодические и условно-периодические коэффициенты.

Действительно, переходя к комплексно-сопряженным переменным $u_k = x_k + iy_k$, $v_k = x_k - iy_k$ и проводя преобразования, изложенные в [1—3], придем к системе

$$u_k^\bullet = i\nu_k u_k + A_k v^p/v_k + U_k^{(p)}(u, v, t) + \ldots, \qquad v_k^\bullet = \bar{u}_k^\bullet$$

Вводя в эту систему малый параметр при помощи замены

$$u_k = \mu w_k e^{i\alpha\nu_k t}, \quad \bar{u}_k = v_k = \mu \bar{w}_k e^{-i\alpha\nu_k t} \quad (\alpha = 1 - \mu^{p-2})$$

изменяя затем масштаб времени $\tau = \mu^{p-2}t$ и переобозначая переменные w_k, $\bar{w}_k$, τ вновь как u, v, t, получим систему вида (1.1).

Будем рассматривать вырожденный случай, когда

$$(1.2)\qquad D_{1i} = a_1 b_i - b_1 a_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$a_i = \operatorname{Re} A_i, \quad b_i = \operatorname{Im} A_i$$

Ставится задача отыскания стационарных в смысле [1] решений системы (1.1) по членам первого порядка относительно μ, которые при $\mu = 0$ обращаются в условно-периодические решения укороченной системы

$$(1.3)\qquad u_k^{\cdot} = i\nu_k u_k + A_k v^p / v_k, \quad v_k^{\cdot} = \bar{u}_k^{\cdot}$$

Заметим, что выполнения условия (1.2) можно добиться и в случае, когда все числа D_{1i} имеют порядок μ^{l_i} ($l_i \geqslant 1$), в то время как A_i не малы.

Как известно [2, 3], (1.2) является необходимым условием устойчивости нулевого решения системы (1.3) только при $n = 2$, однако случай, когда (1.2) выполняется, представляет большой интерес, так как он реализуется, в частности, для гамильтоновых систем. Нулевое решение системы (1.3) при выполнении (1.2) устойчиво тогда и только тогда, когда в последовательности чисел $b_1, \ldots, b_n$ ($a_1, \ldots, a_n$) есть хотя бы одна перемена знака. Обозначим $z_i = -\operatorname{sign} b_i$ и перейдем к вещественным переменным при помощи замены

$$(1.4)\qquad u_k = (|b_k/b_1| r_k)^{1/2} e^{i\theta_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Считаем, что

$$b_1 > 0, \; b_i < 0 \; (i = 2, \ldots, n_1), \; b_j > 0 \; (j = n_1 + 1, \ldots, n)$$

а случай, когда среди чисел b_k есть нулевые, для краткости не рассматриваем, так как соответствующие уравнения квазилинейны и можно подключить их к рассмотрению в п. 2.

В результате замены (1.4) система (1.3) примет вид

$$(1.5)\qquad r_k^{\cdot} = -2z_k D r^{p/2} \cos\gamma,$$
$$\theta_k^{\cdot} = \nu_k + z_k D r^{p/2} r_k^{-1} \sin\gamma$$

Здесь

$$(1.6)\qquad \gamma = p_1\theta_1 + \ldots + p_n\theta_n - \varphi_a$$
$$\varphi_a = \arg A_k \pm {}^1/_2 (z_k + 1)\pi \quad (k = 1, \ldots, n)$$
$$D = |A_1| \prod_{i=2}^{n} \left|\frac{b_i}{b_1}\right|^{p_i/2}, \quad r^{p/2} = r_1^{p_1/2} \ldots r_n^{p_n/2}$$

Система (1.5) допускает n первых интегралов

$$(1.7)\qquad r_1 + r_2 = R$$
$$r_1 + r_i = R(1 + \tau_i) \quad (i = 3, \ldots, n_1; \; \tau_i > -1)$$
$$r_1 - r_j = -R\tau_j \quad (j = n_1 + 1, \ldots, n; \; \tau_j > -1)$$

$$(1.8)\qquad r^{p/2} \sin\gamma = h \quad (R > 0, \; \tau_i, \tau_j, h - \text{const})$$

и несложной заменой переменных может быть приведена к гамильтоновой форме, причем гамильтониан получается в нормализованном виде.

Из условия неотрицательности всех r_i найдем область определения r_1: $R_1 < r_1 < R_2$, где

$$R_1 = \max(0, -R\tau_{n_1+1}, \ldots, -R\tau_n)$$
$$R_2 = \min(R, R(1 + \tau_3), \ldots, R(1 + \tau_{n_1}))$$

Дальнейшие рассуждения и выкладки, проводимые в п. 1, являются процессом интегрирования системы (1.5).

Можно показать, учитывая выражения (1.7), что уравнение

$$S(r_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i p_i}{r_i} = 0 \tag{1.9}$$

имеет на интервале (R_1, R_2) только одно решение $r_{10} = R\alpha_1$, причем $0 < \alpha_1 < 1$.

Введем переменную x, такую, что

$$r_i = R(\alpha_i - z_i x) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.10}$$

Очевидно, что это возможно, если

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1, \ \alpha_i = \alpha_2 + \tau_i \ (i = 3, \ldots, n_1), \ \alpha_j = \alpha_1 + \tau_j \ (j = n_1 + 1, \ldots, n) \tag{1.11}$$

Переменная x лежит в пределах $\beta_1 < x < \beta_2$, где $\beta_i = -\alpha_1 + R_i/R$. При $x = \beta_i$ хотя бы одно из чисел r_k обращается в нуль.

Введем обозначение

$$y = -r^{p/2} \cos \gamma \tag{1.12}$$

Из (1.8), (1.12) следует равенство

$$h^2 + y^2 = r^p \tag{1.13}$$

Используя (1.10), представим r^p как многочлен от x:

$$r^p = R^p \left(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 - \frac{1}{2} \alpha^p \sum (p_i/\alpha_i^2) H(x)\right) \tag{1.14}$$

где $H(x)$ — многочлен степени p, начинающийся с членов третьей степени. Можно убедиться, что

$$k_0 = \alpha^p, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{1}{2} \alpha^p \sum (p_i/\alpha_i^2)$$

Можно показать, что $r^p/R^p \leqslant \alpha^p$ для любого $r_1 \in (R_1, R_2)$, т. е. $x^2 + H(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (\beta_1, \beta_2)$.

Из определения α_1 и (1.10) следует, что все $\alpha_i > 0$.

Обозначим

$$z = [{}^1/{}_2 \alpha^p \Sigma (p_i/\alpha_i^2)]^{1/2} x \, [1 + H(x)/x^2]^{1/2} = d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \ldots \tag{1.15}$$

Тогда, учитывая, что $d_1 \neq 0$, получим

$$x = \frac{1}{d_1} z - \frac{d_2}{d_1^3} z^2 + \frac{2d_2^2 - d_1 d_3}{d_1^5} z^3 + \ldots \tag{1.16}$$

Будем считать x и z достаточно малыми, чтобы ряды (1.15), (1.16) сходились.

Из (1.13), (1.15) имеем

$$y^2/R^p + z^2 = \rho^2 \tag{1.17}$$

$$\rho^2 = \alpha^p - h^2/R^p \tag{1.18}$$

Вводя переменную φ по формулам

$$z = \rho \cos \varphi, \ y = R^{p/2} \rho \sin \varphi \tag{1.19}$$

образуем систему уравнений относительно θ_1 и φ. Для этого из выражений (1.5), (1.10), (1.13) найдем

$$x^{\cdot} = -2DR^{-1} y, \ y^{\cdot} = 2DR^{p-1} z \, dz/dx \tag{1.20}$$

и получим

$$\varphi^{\cdot} = k \, dz/dx, \ k = 2DR^{p/2-1} \tag{1.21}$$

Можно показать, что $\varphi^{\cdot} > 0$ при $x \in (\beta_1, \beta_2)$.

Из (1.15), (1.8), (1.10), (1.21) имеем выражение

$$\frac{d\theta_1}{d\varphi} = \left(\nu_1 - \frac{Dh}{R(x+\alpha_1)}\right)\frac{1}{k}\frac{dx}{dz}$$

Разлагая его правую часть в ряд Маклорена по z, воспользовавшись (1.19), а затем интегрируя, находим зависимость θ_1 от φ:

$$\theta_1 = \left(\left(\nu_1 - \frac{Dh}{R\alpha_1}\right)\frac{1}{kd_1} + a_0^{(1)}\right)\varphi + \sum_{l\geqslant 1} a_l^{(1)} \sin l\varphi + C_1 \tag{1.22}$$

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{\pi}\sum_{j\geqslant 1} g_j^{(1)}\rho^j \int_0^\pi \cos^j\varphi\, d\varphi$$

$$a_l^{(1)} = \frac{2}{\pi l}\sum_{j\geqslant l} g_j^{(1)}\rho^j \int_0^\pi \cos^j\varphi \cos l\varphi\, d\varphi, \qquad g_j^{(1)} = g_j^{(1)}(h, R, \tau_m)$$

где $a_l^{(1)} = a_l^{(1)}(\rho, h, R, \tau_m)$ — коэффициенты Фурье.

Аналогичные выражения можно получить для остальных θ_l.

Таким образом получены решения системы (1.3)

$$u_l = (|b_l/b_1|\, r_l)^{1/2} e^{i\theta_l}, \qquad r_l = R(\alpha_l - z_l x) \tag{1.23}$$

$$\theta_l = \nu_l{}^0\varphi + \sum_{j\geqslant 1} a_j^{(l)} \sin j\varphi + C_l$$

$$x = \frac{1}{d_1} z - \frac{d_2}{d_1{}^3} z^2 + \frac{2d_2{}^2 - d_1 d_3}{d_1{}^5} z^3 + \ldots, \qquad z = \rho\cos\varphi$$

$$\left(\nu_l{}^0 = \left(\nu_l + \frac{z_l Dh}{R\alpha_l}\right)\frac{1}{kd_1} + a_0^{(l)}\right)$$

Зависимость $\varphi = \varphi(t)$ можно получить аналогично (1.22), интегрируя уравнение (1.21)

$$t = \frac{1}{k_0}\varphi + \sum_{l\geqslant 1} \psi_l \sin l\varphi + \psi_0 \tag{1.24}$$

В решении (1.23), (1.24) фигурируют постоянные R, $\tau_3, \ldots, \tau_n$, h, ψ_0, $C_1, \ldots, C_n$, ρ, две из которых (например, последние) выражаются через остальные.

Можно считать $R, h, \tau_3, \ldots, \tau_n, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, φ новыми переменными. Тогда траектории системы лежат на n-мерных торах.

Решение (1.23), (1.24) периодическое в случае, когда все числа $\nu_l{}^0$ $(l = 1, \ldots, n-1)$ рациональны, и условно-периодическое в противном случае. Рациональность $\nu_n{}^0$ можно не проверять, так как выражение для θ_n в (1.23) — зависимое. Из (1.6) следует, что

$$\theta_n = p_n^{-1}(\gamma - p_1\theta_1 - \ldots - p_{n-1}\theta_{n-1} + \varphi_a)$$

а γ однозначно выражается через 2π-периодические функции φ из формул (1.8), (1.12), (1.10), (1.16), (1.19).

2. Будем искать условно-периодические решения системы (1.1) по членам первой степени относительно μ, которые при $\mu = 0$ обращаются в решение (1.23), (1.24), соответствующее постоянным R_0, $\tau_{30}, \ldots, \tau_{n0}$, h_0, $C_{10}, \ldots, C_{n-1,0}$, ψ_{00}.

Вычислим производные интегралов укороченной системы h, R $\tau_3, \ldots, \tau_n$ в силу полной системы

$$r_k^{\cdot} = -2z_k D r^{p/2}\cos\gamma + \sum_{l\geqslant 1} \mu^l R_{kl}(r, \theta, t) \tag{2.1}$$

$$\theta_k^{\cdot} = \nu_k + z_k D \frac{r^{p/2}}{r_k} \sin\gamma + \sum_{l\geqslant 1} \frac{\mu}{r_k} T_{kl}(r, \theta, t)$$

полученной из (1.1) при помощи замены (1.4). Здесь R_{kl} и T_{kl} имеют вид (суммирование ведется по $m_i \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, $|l_i| \leqslant m_i$)

$$\Sigma r^{m/2} (a^{(m,l)}(t) \cos(l_1\theta_1 + \ldots + l_n\theta_n) + b^{(m,l)}(t) \sin(l_1\theta_1 + \ldots + l_n\theta_n)) \tag{2.2}$$
$$(m = m_1 + \ldots + m_n)$$

Дифференцируя (1.7), (1.8) в силу (2.1), получим

$$R^{\cdot} = \sum_{l\geqslant 1} \mu^l (R_{1l} + R_{2l}) \tag{2.3}$$
$$R\tau_i^{\cdot} = \sum_{l\geqslant 1} \mu^l (R_{1l} + R_{il}) - R^{\cdot}(1 + \tau_i) \quad (i = 3, \ldots, n_1)$$
$$R\tau_j^{\cdot} = \sum_{l\geqslant 1} \mu^l (R_{jl} - R_{1l}) - R^{\cdot}\tau_j \quad (j = n_1 + 1, \ldots, n)$$
$$h^{\cdot} = h\Sigma \frac{p_i}{2r_i} \sum_{l\geqslant 1} \mu^l R_{il} - y \sum \frac{p_i}{r_i} \sum_{l\geqslant 1} \mu^l T_{il}$$

Из (1.19) следует, что

$$\varphi^{\cdot} = \rho^{-2} R^{-p} [y^{\cdot} z R^{p/2} - (z^{\cdot} R^{p/2} + {}^1/{}_2 p z R^{p/2-1} R^{\cdot}) y]$$

После проведения выкладок получим

$$\varphi^{\cdot} = k \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{l\geqslant 1} \mu^l \Phi_l (r, \theta, y, z, t) \tag{2.4}$$

где $\partial z/\partial x$ — частная производная правой части соотношения (1.15), а функции Φ_l имеют вид (2.2) с аналитическими по y, z коэффициентами $a^{(m,l)}$, $b^{(m,l)}$, зависящими также от R, $\tau_3, \ldots, \tau_n$, h.

Во избежание громоздкости выкладок введем в рассмотрение векторы $I = (h, R, \tau_3, \ldots, \tau_n)$ и $C = (C_1, \ldots, C_{n-1}, \psi_0)$.

Зависимость θ_l и t от φ будем определять из выражений

$$\theta_l = \nu_l^0 (I_0) \varphi + \sum_{j\geqslant 1} a_j^{(l)} (I_0) \sin j\varphi + C_l$$
$$t = \frac{1}{k_0(I_0)} \varphi + \sum_{j\geqslant 1} \psi_j (I_0) \sin j\varphi + \psi_0$$

где C_l, ψ_0 — переменные, I_0 — некоторые невозмущенные значения I, которые будут определены ниже.

Дифференцируя последние выражения, получим

$$\frac{dC_l}{d\varphi} = \nu_l^0 (I) + \sum_{j\geqslant 1} j a_j^{(l)} (I) \cos j\varphi + \sum_{m\geqslant 1} \mu^m F_{lm} (r, \theta, t, I, \varphi) - \tag{2.5}$$
$$- \nu_l^0 (I_0) - \sum_{j\geqslant 1} j a_j^{(l)} (I_0) \cos j\varphi \quad (l = 1, \ldots, n - 1)$$
$$\frac{d\psi_0}{d\varphi} = \frac{1}{k_0(I)} + \sum_{j\geqslant 1} j\psi_j (I) \cos j\varphi + \sum_{m\geqslant 1} \mu^m \Psi_{0m} (r, \theta, t, I, \varphi) -$$
$$- \frac{1}{k_0(I_0)} - \sum_{j\geqslant 1} j\psi_j (I_0) \cos j\varphi$$

Перейдем в (2.3) к производным по φ и перепишем (2.3), (2.5) в следующем виде:

$$\frac{dI}{d\varphi} = \sum_{l\geqslant 1} \mu^l H_l (r, \theta, t, I, \varphi) \tag{2.6}$$
$$\frac{dC}{d\varphi} = f(I, \varphi) - f(I_0, \varphi) + \sum_{l\geqslant 1} \mu^l S_l (r, \theta, t, I, \varphi)$$

где функции H_l, S_l имеют вид (2.2) с зависящими от I, φ коэффициентами $a^{(m,l)}$, $b^{(m,l)}$.

Заменим в H_l, S_l переменные r, θ, t их выражениями через I, C, φ. В результате получим

$$(2.7)\qquad \frac{dI}{d\varphi}=\sum_{l\geqslant 1}\mu^l J_l(I,C,\varphi)$$

$$\frac{dC}{d\varphi}=f(I,\varphi)-f(I_0,\varphi)+\sum_{l\geqslant 1}\mu^l Z_l(I,C,\varphi)$$

Как и в случае $n=2$ [1], можно показать, что функции J_l, Z_l — аналитические по I, C в некоторой окрестности невозмущенных значений I_0, C_0 ($h_0\neq 0$, $R_0\neq 0$), а также условно-периодические по φ, причем случай, когда ни одно из чисел $p_1,\ldots,p_n$ не равно единице, более трудоемок при практических вычислениях. Можно также показать, что при фиксированных I, C средние по φ на интервале $(0,\infty)$ значения функций J_l, Z_l при отсутствии резонансов между частотами условно-периодических коэффициентов в правых частях (2.7) не зависят от C.

С помощью условно-периодической замены переменных

$$I'=I-\mu u(I,C,\varphi),\quad C'=C-\mu v(I,C,\varphi)$$

приведем (2.7) к виду

$$(2.8)\qquad \frac{dI'}{d\varphi}=\mu B_1(I')-\mu\frac{\partial u}{\partial C}(f(I',\varphi)-f(I_0,\varphi))+\ldots$$

$$\frac{dC'}{d\varphi}=f(I',\varphi)-f(I_0,\varphi)+\mu G_1(I')-\mu\frac{\partial v}{\partial C}(f(I',\varphi)-f(I_0,\varphi))+\ldots$$

$$B_1(I')=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T J_1(I',C',\varphi)\,d\varphi$$

$$u(I,C,\varphi)=\int(J_1(I,C,\varphi)-B_1(I))\,d\varphi$$

$$G_1(I')=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(Z_1(I',C',\varphi)+\frac{\partial f(I',\varphi)}{\partial I'}u(I',C',\varphi)\right)d\varphi$$

$$v(I,C,\varphi)=\int\left(Z_1(I,C,\varphi)+\frac{\partial f}{\partial I}u(I,C,\varphi)-G_1(I)\right)d\varphi$$

(интегралы берутся при фиксированных I, C, а точками обозначены члены со степенями μ выше первой).

Выберем n постоянных $I_0=(h_0,R_0,\tau_{30},\ldots,\tau_{n0})$ из уравнений

$$(2.9)\qquad B_1(I_0)=0$$

введем возмущения ξ: $I'=I_0+\xi$ и составим уравнения возмущенного движения

$$(2.10)\qquad \frac{d\xi}{d\varphi}=\mu A\xi+\mu M\xi+\mu A^{(2)}+\ldots,\ M=\frac{\partial u(I_0,C,\varphi)}{\partial C}\frac{\partial f}{\partial I}$$

где матрица M имеет среднее значение, равное нулю, $A^{(2)}(\xi)$ — совокупность членов со второго порядка по ξ; точками обозначены члены, начиная со второго порядка по μ.

Заметим, что при наличии резонансов между частотами условно-периодических коэффициентов в правых частях (2.7) функции B_1 и G_1

[1] *Королев И. А.* О колебаниях существенно нелинейных систем при резонансе. М., 1985. 19 с.— Деп. в ВИНИТИ 5.08.85, № 5824-85.

в (2.8) могут содержать линейные комбинации компонент вектора C. В этом случае к уравнениям (2.9) следует добавить уравнения, приравнивающие к нулю соответствующие линейные комбинации компонент вектор-функции G_1.

Стационарные в смысле [1] условно-периодические решения системы (1.1) с точностью до μ в первой степени получим подставляя $I' = I_0$, $C' = C_0 + \mu G_1(I_0)\ \varphi$ в преобразования, приводящие (2.8) к (1.1). Пусть все собственные значения матрицы A из (2.10) имеют отрицательные вещественные части. Тогда [2] соответствующее стационарное решение будет устойчивым и при достаточно малых μ сколь угодно мало отличающимся от решения полной системы. Под устойчивостью и близостью понимается устойчивость и близость соответствующих деформированных торов. В случае $n = 2$ орбитально устойчивыми будут сами условно-периодические решения. Это объясняется тем, что в данном случае движение может быть описано переменными R, h, θ_1, γ, переменную θ_1 можно заменить на φ, а поведение γ определяется поведением R, h, φ (это следует из (1.8), (1.12), (1.18), (1.19)).

Таким образом, указан способ построения устойчивых условно-периодических решений системы (1.1) с точностью до членов с первой степенью μ, сколь угодно мало отличающихся от соответствующих решений полной системы и при $\mu = 0$ обращающихся в решения (1.23), (1.24) укороченной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г. В.* Избранные труды. М.: Наука, 1971. Т. I. 260 с.; 1972. Т. II. 214 с.
2. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 164—167.
3. *Веретенников В. Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука. 1984. 320 с.
4. *Веретенников В. Г., Серегин В. Н.* К исследованию колебаний квазилинейных систем с почти периодическими коэффициентами // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 980—991.

Москва

Поступила в редакцию 20.XI.1986

[2] См. [4], а также: *Серегин В. Н.* К исследованию колебаний систем с почти периодическими коэффициентами: Автореф. —...дис. канд. физ.-матем. наук. М., МАИ, 1980. 14 с.