

УДК 531.36

ОБ УДАРАХ В СИСТЕМЕ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Иванов А. П.

Изучаются особенности динамики систем с идеальными неударными связями, обусловленные возможностью одновременного удара о две или более связи.

Показано, что корректное определение ударного импульса при кратном ударе возможно лишь в исключительных случаях — если связи ортогональны или удар имеет абсолютно неупругий характер (несмотря на упругость каждой связи в отдельности). В общем случае ударный импульс не обладает свойством непрерывной зависимости от начальных условий, причем количество поверхностей разрыва в фазовом пространстве быстро возрастает с ростом кратности удара. Ввиду этого задача определения последующего движения в системах с большим числом неударных связей имеет стохастический характер.

Проведена регуляризация уравнений движения в случае ортогональных связей и абсолютно упругих соударений. Рассмотрены примеры, показывающие влияние геометрических и упругих свойств связей на движение некоторых механических систем.

1. Пусть система твердых тел описывается функцией Лагранжа

$$(1.1) \quad L = T + U, \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad U = U(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in R^n$$

и $k < n$ связями без трения $q_j \geq 0, j = 1, \dots, k$.

В отсутствие ударов о связи движение описывается уравнениями

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{R}$$

где $R_j = 0$ при $q_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, k$), $R_{k+1} = \dots = R_n \equiv 0$.

Если в некоторый момент времени оказывается, что $q_\alpha = 0$ ($\alpha \in I \subseteq \{1, \dots, k\}$) и $\dot{q}_\alpha < 0$ для некоторого $\alpha \in I$, то происходит удар системы о связи q_α .

В случае, когда I состоит из единственного элемента, удар можно описать посредством классической стереомеханической теории [1], основанной на предположении об исчезающе малой продолжительности соударения. Обобщенные координаты при ударе не изменяются, а до- и послеударные значения обобщенных скоростей связаны соотношениями

$$(1.3) \quad (\dot{\mathbf{q}}^+, \mathbf{e}_j)_\mathbf{q} = (\dot{\mathbf{q}}^-, \mathbf{e}_j)_\mathbf{q}, \quad j \in I, \quad \dot{q}_\alpha^+ = -\kappa_\alpha \dot{q}_\alpha^-, \quad \alpha \in I$$

где \mathbf{e}_j — строка из нулей с единицей в j -й позиции, а скалярное произведение $(\cdot)_\mathbf{q}$ определяется при помощи матрицы кинетической энергии системы:

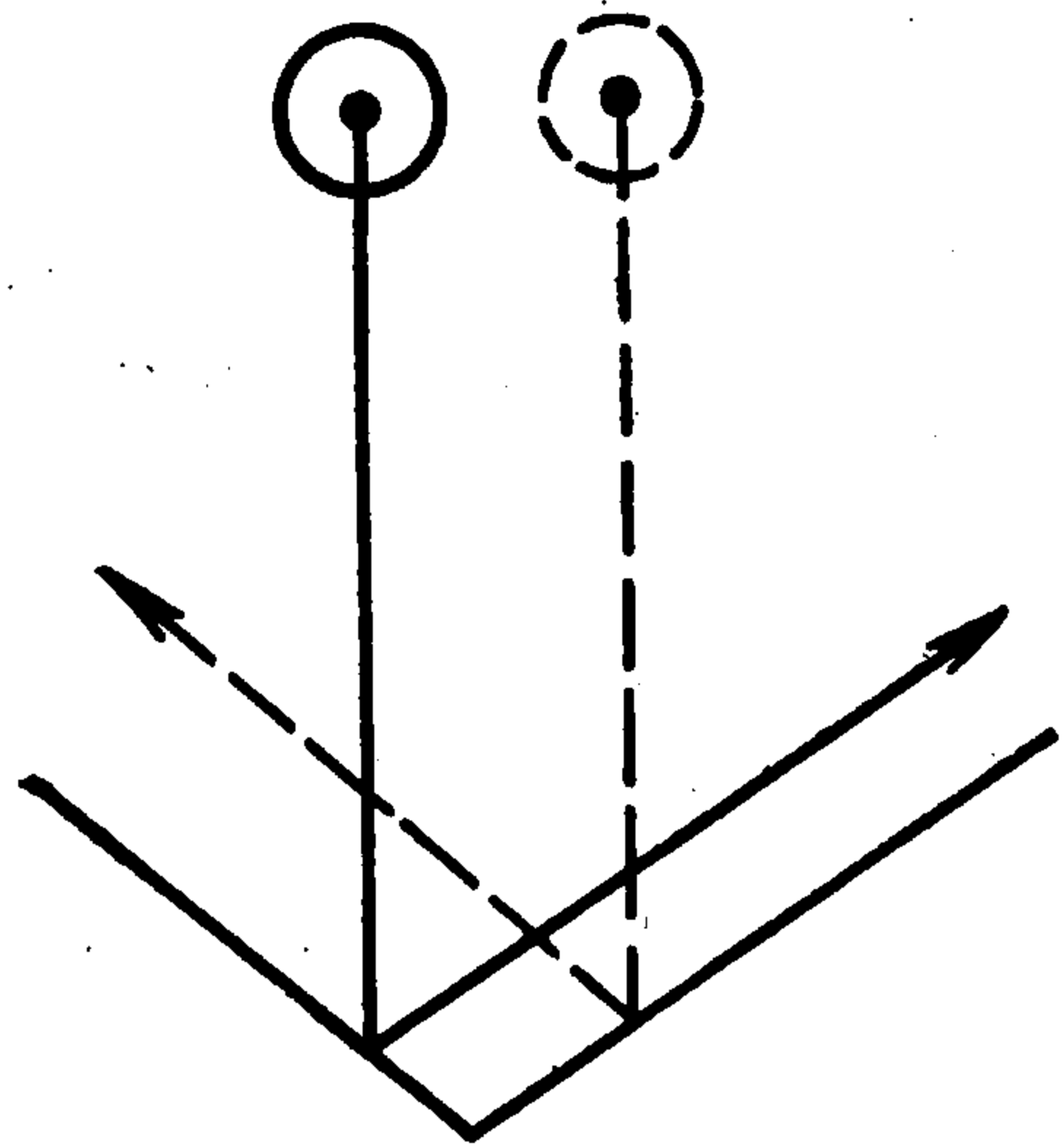
$$(1.4) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\mathbf{q} = \mathbf{u} A(\mathbf{q}) \mathbf{v}^T, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$$

Уравнения (1.3) в случае одноэлементного множества I корректно определяют значения $\dot{\mathbf{q}}^+$ в функции $\dot{\mathbf{q}}^-$ и \mathbf{q} , что и служит основанием для принятия допущений стереомеханики.

Соотношения (1.3) можно применить и для описания кратного удара [2], однако такое определение будет некорректным, как показывает следующий простой пример.

Пусть однородный шар ударяется о двугранный угол величины $2/3\pi$, двигаясь до удара параллельно его биссекторной плоскости (фиг. 1). При абсолютно упругом ударе шар, ударившись об одну из граней угла, отскочит параллельно другой его грани. Согласно же формальному определению, он должен отскакивать в биссекторной плоскости.

Анализ соотношений (1.3) показывает, что первая их группа, выражающая отсутствие трения, остается справедливой и при кратном ударе [3],



Фиг. 1

чего нельзя сказать о второй группе, выражающей упругие свойства связей. Несмотря на то что при одиночном ударе такие соотношения описывают свойства некоторых упругих сред, в случае кратного удара они, вообще говоря, теряют физическое основание. Причина этого кроется в том, что для неортогональных обобщенных координат q матрица $A(q)$ не диагональна [4] и изменение обобщенной скорости q_α при ударе в силу (1.2) зависит не только от R_α , но и от R_β , $\beta \neq \alpha$, $\alpha, \beta \in I$.

Действительно, разрешая (1.2) относительно обобщенных ускорений, получим $q'' = RA^{-1} + \dots$, где невыписанные члены не содержат реакций связей. Независимость q_α'' от R_β при $\alpha \neq \beta$ выражается условием

$$(1.5) \quad M_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } q_\alpha = q_\beta = 0, \alpha, \beta \in I$$

где $M_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы $A^{-1}(q)$.

С другой стороны, вектор $N_j = e_j A^{-1}$ ортогонален плоскости $q_j = 0$ в смысле определения (1.4), поскольку

$$(N_j, e_i)_q = e_j A^{-1} A e_i^T = e_j e_i^T = \delta_{ij}$$

Замечая, что

$$(1.6) \quad (N_\alpha, N_\beta)_q = e_\alpha A^{-1} e_\beta^T = M_{\alpha\beta}$$

приходим к выводу, что соотношение (1.5) выражает ортогональность плоскостей $q_\alpha = 0$, $q_\beta = 0$ в точках их пересечения.

При выполнении условий (1.5) уравнения кратного удара разделяются: изменение обобщенной скорости q_α зависит лишь от реакции одноименной связи. При этом уравнения (1.3), представляющие собой обобщение стереомеханической теории на случай удара о несколько связей, корректно определяют ударный импульс.

Если же условия (1.5) не выполняются, то в реальных физических моделях ударный импульс претерпевает значительные изменения при изменении начальных условий на величину порядка упругих деформаций.

Для иллюстрации исследуем удар абсолютно твердого шара о двугранный угол величины α (фиг. 2, а), образованный полупространствами с упругими свойствами среды Кельвина — Фойгта [1]

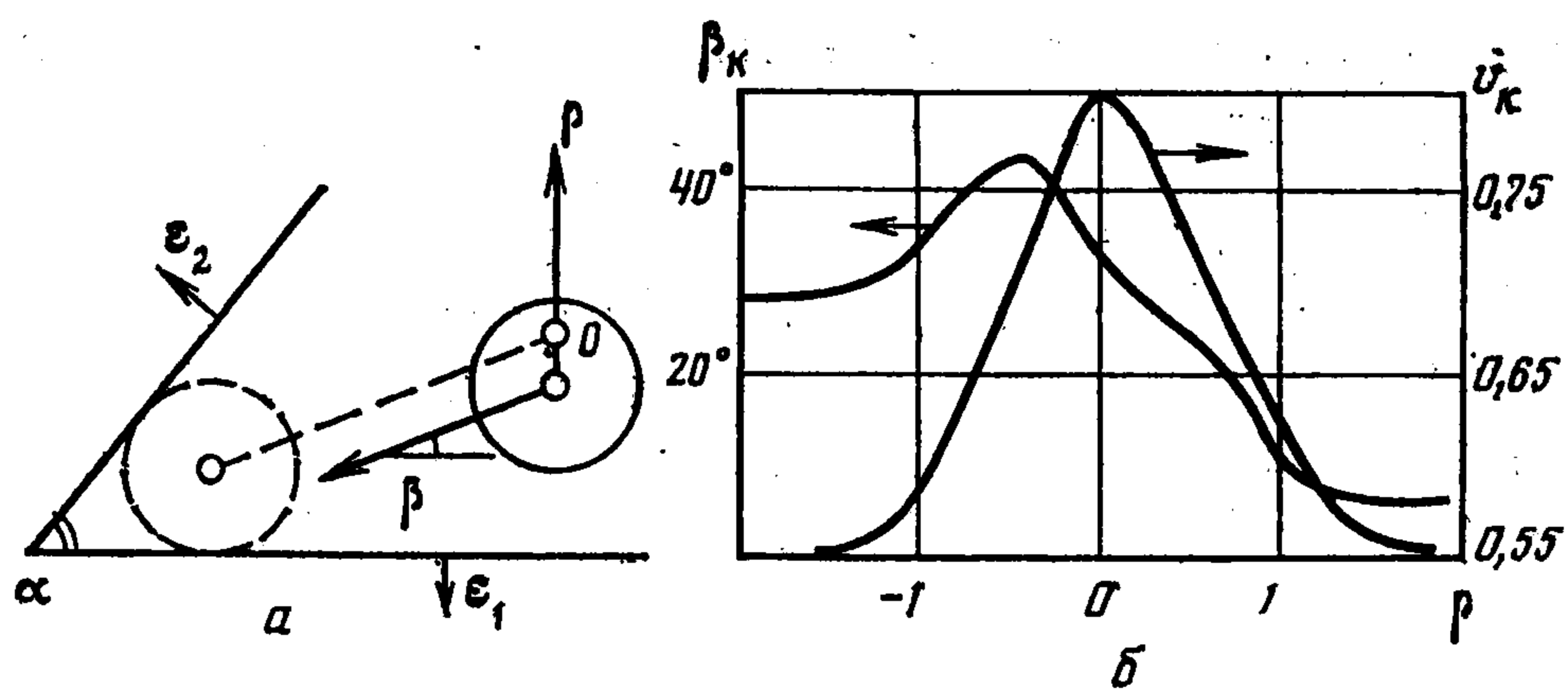
$$(1.7) \quad R_i = \eta \epsilon_i + \mu \epsilon_i' \quad (i = 1, 2)$$

где ϵ_i — нормальная деформация соответствующего полупространства, R_i — нормальное напряжение (касательные напряжения равны нулю: рассматриваются связи без трения).

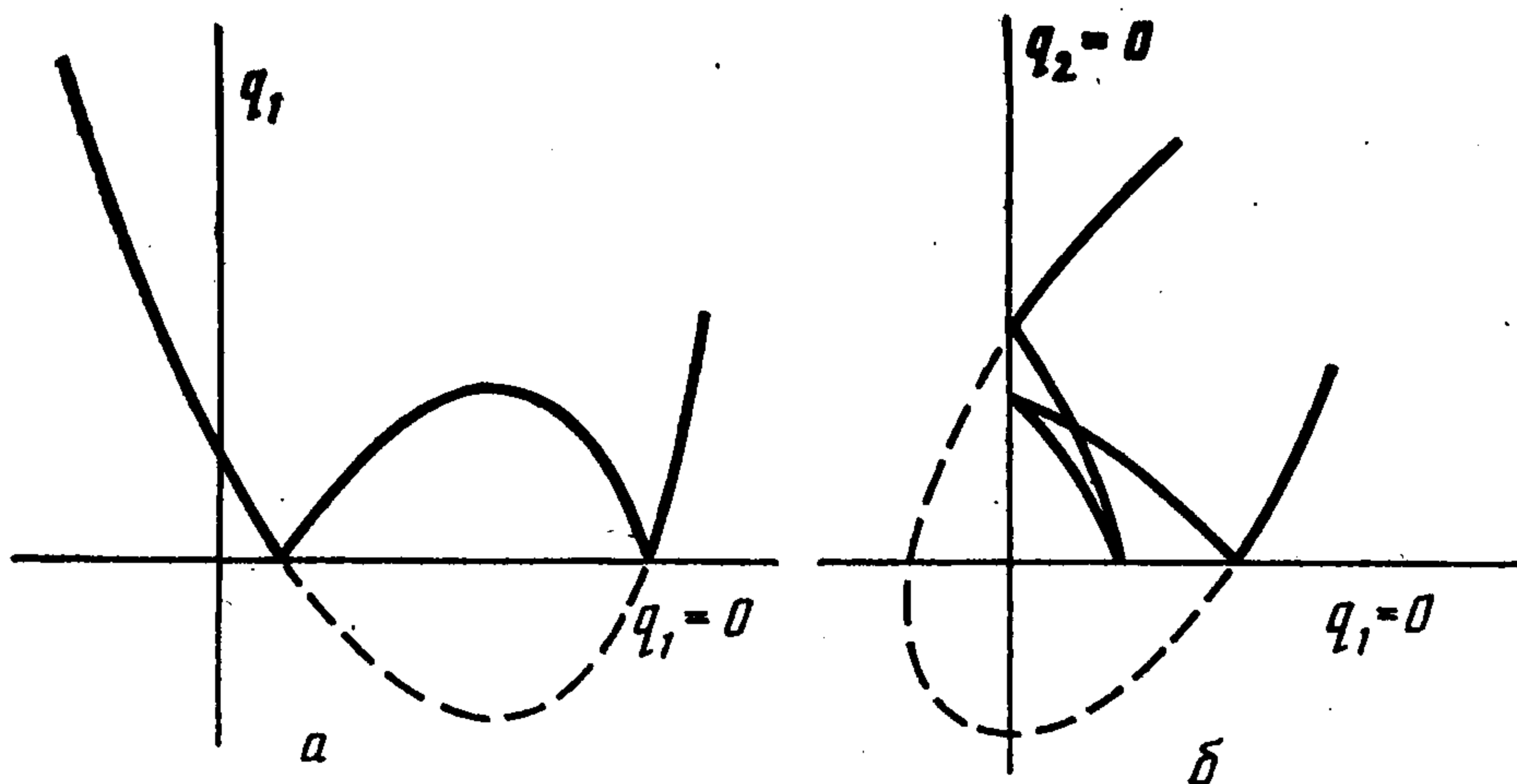
Уравнения движения шара имеют вид

$$(1.8) \quad m \epsilon_1'' = -R_1 + R_2 \cos \alpha, \quad m \epsilon_2'' = R_1 \cos \alpha - R_2$$

где сила R_i при $\epsilon_i \leq 0$ равна нулю, а при $\epsilon_i > 0$ она определяется формулой (1.7).



Фиг. 2



Фиг. 3

При $\cos \alpha \neq 0$ (плоскости неортогональны) проявляется отмеченная выше перекрестная зависимость обобщенных ускорений от неоднородных реакций.

На фиг. 2, б представлены результаты численного интегрирования системы (1.8) для значений $m = 1$, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\eta = 1$, $\mu = 0,22$ (что соответствует значению коэффициента восстановления $\kappa = 0,7$), начальной скорости центра шара $v = 1$ (для прямого одиночного удара ударная деформация приблизительно равна единице). По оси абсцисс отложено начальное смещение центра шара от такого положения, при котором он одновременно коснется обеих граней угла (фиг. 2, а), по оси ординат — величина угла отражения β_k и модуль скорости шара в конце удара, т. е. в такой момент, когда $\varepsilon_{1,2} \leq 0$, $\dot{\varepsilon}_{1,2} < 0$.

Из этих результатов следует, что предсказываемые системой (1.3) значения $\beta_k = 10^\circ$, $v_k = 0,5$ не реализуются ни при каких начальных условиях. Кроме того, если считать ударные деформации пренебрежимо малыми, $|\rho| \gg 1$, то в зависимости от знака ρ ударный импульс имеет два различных значения.

2. Пусть соотношения (1.5) выполняются для $I = \{1, \dots, k\}$, т. е. все неудерживающие связи взаимно ортогональны, и, кроме того, $\kappa_\alpha = 1$, $\alpha \in I$.

Как показано в [5], уравнения (1.2), (1.3) в случае $k = 1$, $\kappa = 1$ допускают регуляризацию: их можно заменить уравнениями Лагранжа для некоторой вспомогательной системы, свободной от связей и имеющей непрерывные фазовые траектории. Для этого сначала надо сделать такую замену обобщенных координат $q \rightarrow Q$, чтобы плоскость $q_1 = 0$ перешла в $Q_1 = 0$, а векторы $N_1 = e_1 A^{-1}(Q)$ и e_1 при $Q_1 = 0$ оказались коллинеарными. После этого вспомогательная система определяется в фазовом пространстве R^{2n} (без ограничения $Q_1 \geq 0$) функцией Лагранжа вида

$$L^*(Q, Q') = L(|Q_1|, Q_2, \dots, Q_n, Q')$$

Траектории исходной системы в конфигурационном пространстве можно получить из траекторий вспомогательной системы посредством зеркального отражения относительно плоскости $Q_1 = 0$ той их части, для которой $Q_1 < 0$ (фиг. 3, а).

Аналогичная конструкция применима и в рассматриваемом случае $k > 1$ взаимно ортогональных связей. Здесь также необходимо сначала провести такую замену переменных, чтобы плоскости $q_\alpha = 0$ перешли в $Q_\alpha = 0$, а векторы N_α при $Q_j = 0$ ($j = 1, \dots, k$) были коллинеарны e_α (существование такой замены очевидно из геометрических соображений).

Вспомогательная система определяется в фазовом пространстве R^{2n} лагранжианом

$$(2.1) \quad L^*(Q, Q') = L(|Q_1|, \dots, |Q_k|, Q_{k+1}, \dots, Q_n, Q')$$

Связь между траекториями двух систем устанавливается посредством некоторого числа зеркальных отражений относительно координатных плоскостей (фиг. 3, б для $k = 2$). При этом гладкость вспомогательных траекторий автоматически влечет за собой выполнение уравнений удара (1.3).

Для иллюстрации этого метода рассмотрим движение материальной точки единичной массы и веса в вертикальной плоскости не ниже некоторой кусочно-гладкой кривой $J = f(x)$, где ось J вертикальна. Если $f \in C_1$, то, полагая $q_1 = y - f(x)$, получим систему с одной неудерживающей связью, исследованную в [5]. Если же кривая имеет угловые точки, например

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x \geq x_0 \end{cases}$$

$$f_1(x_0) = f_2(x_0), \quad f_1'(x_0) < f_2'(x_0), \quad f_{1,2} \in C_1$$

то замена $q_1 = y - f(x)$ приводит в (1.1) к разрывной кинетической энергии. Тем не менее данную систему можно записать в виде (1.1), но уже с двумя неудерживающими связями, полагая для этого $q_1 = y - f_1(x)$, $q_2 = y - f_2(x)$. Лагранжиан (1.1) имеет вид

$$(2.2) \quad L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - y = \frac{1}{2}(f_2' - f_1')^{-2} [q_1'^2(1 + f_2'^2) - 2q_1'q_2'(1 + f_1'f_2') + (1 + f_1'^2)q_2'^2] - (q_1 + f_1)$$

Угол α между прямыми $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ определится соотношением (так как α дополняет угол между N_1 и N_2 до π)

$$\cos \alpha = \frac{-(N_1, N_2)}{|N_1||N_2|} = \frac{-M_{12}}{(M_{11}M_{22})^{1/2}} = \frac{-(1 + f_1'f_2')}{(1 + f_1'^2)^{1/2}(1 + f_2'^2)^{1/2}}$$

т. е. α совпадает с линейным углом между кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$.

Условие (1.5) выглядит так:

$$(2.3) \quad f_1(x_0)f_2(x_0) = -1$$

Поскольку значения $f_1(x)$ при $x > x_0$ и $f_2(x)$ при $x < x_0$ не влияют на движение точки, то при выполнении условия (2.3) можно переопределить их таким образом, что окажется $f_1'f_2' \equiv -1$, $f_{1,2} \in C_1$. Функция Лагранжа вспомогательной системы имеет вид

$$(2.4) \quad L = \frac{1}{2}(f_2' - f_1')^{-2} [q_1'^2(1 + f_2'^2) + (1 + f_1'^2)q_2'^2] - |q_1| - f_1$$

$$f_{1,2} = f_{1,2}(x), \quad f_2(x) - f_1(x) = |q_1| - |q_2|$$

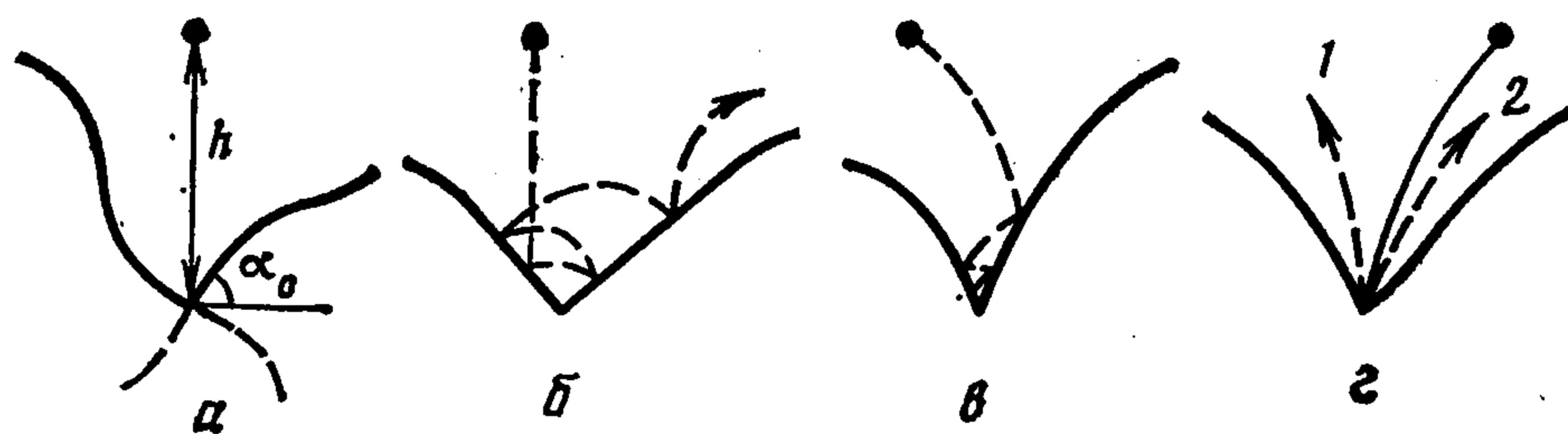
Уравнения движения системы (2.4) при $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$ запишутся в виде

$$(2.5) \quad q_1'' + \operatorname{sgn} q_1(1 + f_1''x^2) = 0, \quad q_2'' + \operatorname{sgn} q_2(1 + f_2''x^2) = 0$$

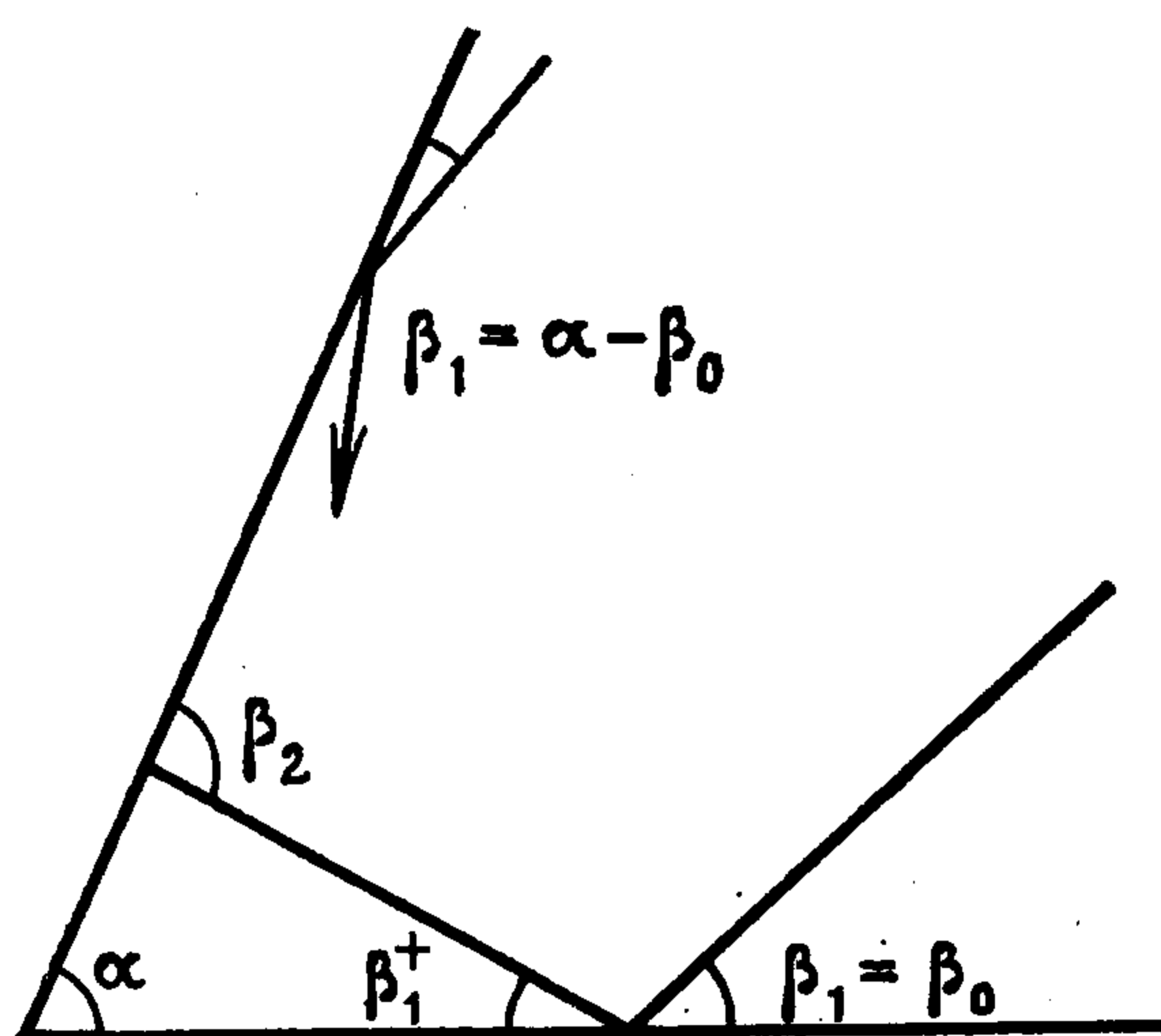
$$x' = f_2'(1 + f_2'^2)^{-1}(q_1' \operatorname{sgn} q_1 - q_2' \operatorname{sgn} q_2)$$

Если функции f_1, f_2 линейны, $f_1 = -a^{-1}(x - x_0)$, $f_2 = a(x - x_0)$, то уравнения (2.5) разделяются и немедленно интегрируются; изменение каждой из координат периодическое, а величина периодов τ_i зависит от начальных условий, $\tau_i = 4(2E_i)^{1/2}$, $E_i = \frac{1}{2}q_i'^2 + |q_i|$ ($i = 1, 2$). Траектории вспомогательной системы в конфигурационном пространстве аналогичны фигурам Лиссажу: если τ_1 и τ_2 соизмеримы, эти траектории замкнуты, в противном случае они всюду плотны в прямоугольнике $[-E_1, E_1] \times [-E_2, E_2]$.

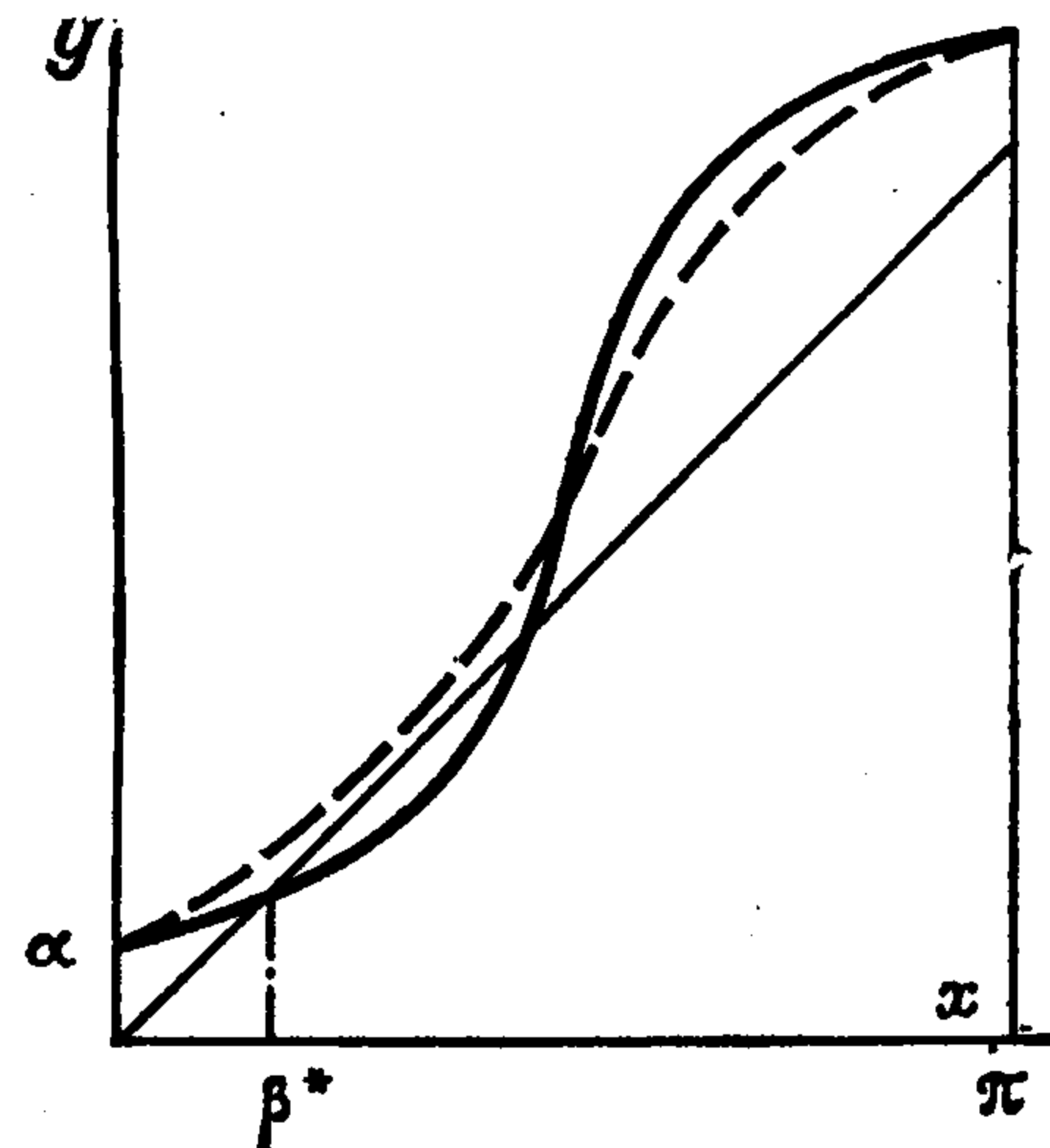
В общем случае уравнения (2.5) допускают такие τ -периодические решения, для которых $x \equiv x_0$, $q_1 = q_2 - \frac{1}{2}t(1/2\tau - |t|)$ при $|t| < 1/2\tau$ (фиг. 4, а). Исследуем в



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

в первом приближении устойчивость этих частных решений по отношению к переменным $\xi = x - x_0$, ξ' .

Составляя уравнения в вариациях, следует учесть их разную форму при $q_1 q_2 > 0$ и $q_1 q_2 < 0$: в первом случае величина x^2 имеет второй порядок малости, а во втором случае (движение в промежутке между соударениями с первой и со второй кривой, если эти моменты не совпадают) движение происходит в течение промежутка времени Δt первого порядка малости, причем значения вторых производных в (2.5) определяются по-разному при $|q_1| > |q_2|$ и $|q_1| < |q_2|$.

Для фундаментальной матрицы решений имеет выражение

$$X(\tau) = \begin{vmatrix} -1 & -1/2\tau \\ 2D & -1 + \tau D \end{vmatrix}, \quad D = \frac{a\tau}{4(a^2 + 1)} \left[af_1''(x_0 - 0) + \frac{f_2''(x_0 + 0)}{a} \right] + 4\tau^{-1}, \quad a = f_2'(x_0)$$

Необходимое условие устойчивости $0 < \tau D < 4$ имеет вид

$$-1 < 2h(\kappa_1 \operatorname{cosec} \alpha^\circ + \kappa_2 \sec \alpha^\circ) < 0, \quad \operatorname{tg} \alpha^\circ = a$$

где h — высота подскока точки в исследуемом периодическом движении (фиг. 4, а), κ_1 и κ_2 — кривизны кривых f_1 и f_2 в точке x_0 .

Отметим, что в обсужденном ранее случае $f_1'' = f_2'' \equiv 0$ решения $q_1 = q_2$ неустойчивы ввиду описанного характера траекторий. Более того, если полная энергия точки достаточно велика, то точка с вероятностью единица выскочит из ямки, образованной двумя перпендикулярными прямыми (фиг. 4, б).

3. Пусть теперь условия ортогональности (1.5) не выполняются. Поскольку множество начальных условий, соответствующих кратному удару, имеет в фазовом пространстве нулевую меру, практический интерес представляет изучение траекторий, лежащих вблизи этого множества. Для таких траекторий кратный удар заменяется на простые повторные соударения, при исследовании которых будем пренебрегать как продолжительностью каждого из них, так и промежутками времени между ними в течение одного кратного удара. Будем также считать, что координаты q_j ($j \in I$) ортогональны q_α ($\alpha \in I$), вследствие чего q_j' при ударе не изменяются, и достаточно ограничиться рассмотрением q_α .

Пусть $I = \{1, 2\}$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, а угол между плоскостями $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ равен α . При ударе об одну из связей углы падения и отражения связаны соотношением $\operatorname{ctg} \beta_1^+ = \kappa^{-1} \operatorname{ctg} \beta_1$, а угол падения при следующем ударе о другую связь равен $\beta_2 = \beta_1^+ + \alpha$ (фиг. 5). Для последующих соударений справедлива рекуррентная формула

$$(3.1) \quad \beta_{m+1} = \alpha + F(\beta_m), \quad F(x) = \operatorname{arccotg}(\kappa^{-1} \operatorname{ctg} x)$$

Повторные соударения прекратятся после p -го соударения, если значение β_{p+1} , определенное в соответствие с (3.1), окажется больше, чем π . На фиг. 6 показаны два варианта возможного взаимного расположения графиков $y = \alpha + F(x)$ и $y = x$.

В первом из случаев, показанном штриховой линией, траектория после конечного числа повторных ударов покидает зону кратного удара. Для определения ударного импульса в этом случае помимо значения β_0 необходимо задаться и номером связи, о которую происходит первое соударение: если это первая связь, то $\beta_1 = \beta_0$, если вторая, то $\beta_1 = \alpha - \beta_0$ (фиг. 5).

Расчеты по формуле (3.1), проведенные для данных примера п. 1: $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\kappa = 0,7$, приводят к следующим значениям: при первом ударе о первую связь $\beta_k = 28,3^\circ$ (четыре повторных удара $1 + 2 + 1 + 2$), а о вторую связь $-\beta_k = 6,7^\circ$ (три повторных удара $2 + 1 + 2$), что соответствует величинам односторонних пределов на фиг. 2, б.

Во втором случае, показанном на фиг. 6 сплошной линией, для любого $\beta_0 \in]0, \alpha[$ последовательность β_m ограничена сверху значением β^* — асимптотически устойчивого корня уравнения $\alpha + F(x) = x$. Удар при этом аналогичен квазипластическому [6], отличаясь от него тем, что полное гашение скоростей q_1, q_2 происходит за бесконечно малое время. Поэтому кратный удар подобен в этом случае абсолютно неупругому, несмотря на упругий характер каждой из связей в отдельности.

Для выяснения, к какому из этих двух типов относится кратный удар, необходимо определить минимум функции $y = \alpha + F(x) - x$ на отрезке $[0, \pi]$. Поскольку $y' = \kappa (\kappa^2 \sin^2 x + \cos^2 x)^{-1} - 1$, этот минимум достигается при условии $\cos^2 x + \kappa^2 \sin^2 x = \kappa$ и случай стопорного удара реализуется при выполнении неравенства

$$(3.2) \quad 2 \operatorname{tg} \alpha \leq \kappa^{-1/2} (1 - \kappa)$$

Для примера п. 2 выполнение условия (3.2) означает, что угловая точка является своеобразной ловушкой: при попадании в ее окрестность движущаяся точка «прилипает» к вершине угла (фиг. 4, в). Если же условие (3.2) не выполнено, то точка отскочит от вершины угла по одному из двух направлений, в зависимости от последовательности повторных соударений (фиг. 4, г).

Аналогично можно показать, что и при $\kappa_1 \neq \kappa_2$ возможны лишь две ситуации: либо количество повторных ударов ограничено для любых начальных условий, либо для любых же начальных условий кратный удар имеет стопорный характер.

Таким образом, существует два типа двойного удара. Первый из них — ортогональные связи, стопорный удар характеризуется возможностью корректного определения ударного импульса условиями (1.3) (где для стопорного удара надо считать $\kappa_j = 0$). Вторым типом отличается двойным значением ударного импульса в зависимости от расположения начальных условий относительно поверхности бифуркации, соответствующей точному попаданию точки в вершину угла. (Это не исключает совпадения значений ударного импульса при некоторых величинах α, κ . Например, к первому типу относится также случай $\alpha = \pi/m, m \in \mathbb{Z}, \kappa = 1$.)

Значительно сложнее описать удар о три и более связи. Трудность заключается в том, что если параметры допускают несколько повторных соударений, то в области начальных условий существуют поверхности бифуркации, соответствующие различным вариантам их чередования. Так, при $k = 3$ и четырех повторных соударениях возможны варианты $1 + 3 + 2 + 3, 1 + 2 + 1 + 3$ и т. д. — всего 24 варианта. С ростом размерности число различных вариантов (при $k = 5$ и десяти повторных

ударах их более миллиона) и соответственно количество возможных значений ударного импульса превращает задачу определения последнего, по сути дела, в стохастическую (в смысле [7]): для определения движения системы после удара необходимо знать начальные условия с практически недостижимой точностью. В данной работе такие случаи не рассматриваются. Наряду с этим при любой размерности остаются возможными указанные выше случаи корректного определения ударного импульса: ортогональные связи и стопорный удар.

4. Изучим влияние двойных ударов на систему двух тяжелых материальных точек, подвешенных на идеальных нитях, осуществляющих неударивающие связи, и скрепленных невесомым стержнем (фиг. 7).

Пусть r_i, φ_i ($i = 1, 2$) — полярные координаты точки m_i относительно системы, полюс которой находится в точке крепления соответствующей нити, а полярная ось горизонтальна. Система имеет три степени свободы, лагранжиан (1.1) записывается в виде

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^2 m_i \left[\frac{1}{2} (r_i \dot{})^2 + r_i^2 \dot{\varphi}_i^2 \right] - g r_i \sin \varphi_i,$$

$$q_i = b_i - r_i \geq 0$$

где $\varphi_2, \dot{\varphi}_2$ исключены при помощи соотношений

$$(4.2) \quad (r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2 - b_4)^2 + (r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2)^2 = b_3^2$$

$$r_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_3 + r_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_4 + b_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 - b_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_4 = 0$$

Система (4.1), (4.2) имеет положение устойчивого равновесия, определяемое из условий [8]

$$\partial U / \partial q_1 \leq 0, \quad \partial U / \partial q_2 \leq 0, \quad \partial U / \partial \varphi_1 = 0$$

откуда получаем

$$(4.3) \quad m_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_4 + m_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 = 0, \quad q_1 = q_2 = 0$$

Допустим, что до некоторого момента времени система находилась в равновесии, а затем ось крепления нитей скачком сместилась на некоторое расстояние вниз, что привело к ослаблению нитей и последующему двойному удару. Можно убедиться, что если при таком ударе углы падения и отражения равны между собой, т. е.

$$(4.4) \quad q_1^+ / q_2^+ = q_1^- / q_2^-$$

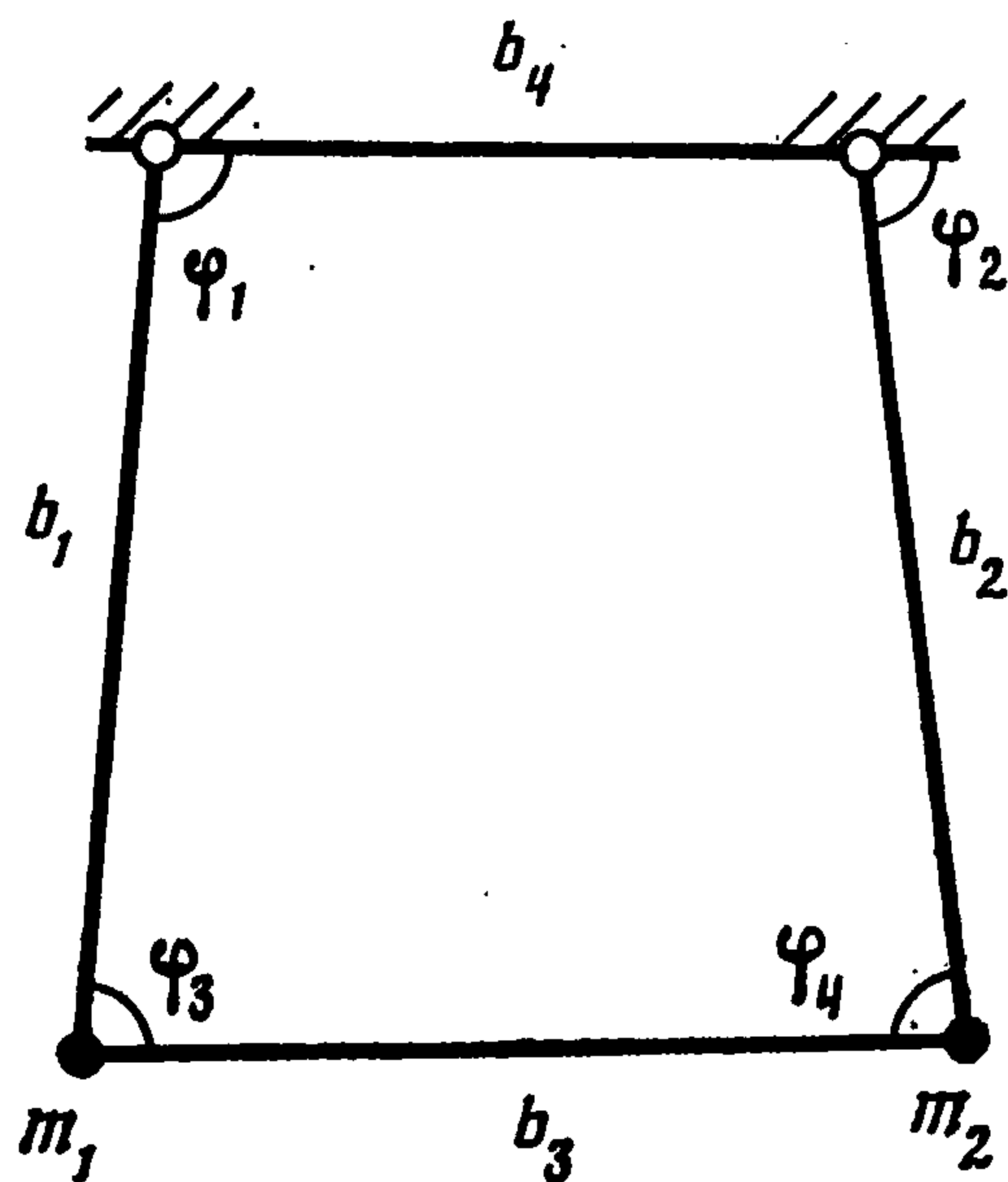
то горизонтальная составляющая ударного импульса и его момент относительно центра инерции системы при выполнении условия (4.3) равны нулю; точки при этом будут двигаться вдоль вертикали. Если упругие свойства нитей одинаковы ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$), такая ситуация возникает при выполнении условия ортогональности (1.5) или условия стопорного удара (3.2). В этих условиях угол α определяется в силу (1.6) так:

$$\cos \alpha = M_{12} (M_{11} M_{22})^{-1/2} =$$

$$= \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 [(\sin^2 \varphi_3 + m_1/m_2) (\sin^2 \varphi_4 + m_2/m_1)]^{-1/2}$$

Следовательно, условие ортогональности означает, что при натянутых нитях хотя бы одна из них перпендикулярна стержню.

В общей ситуации бифуркации ударного импульса двойной удар приводит к раскачиванию стержня, поскольку хотя бы для одной из двух ветвей условие (4.4) не выполнено. Таким образом, в рассматриваемой задаче ортогональность связей оказывается стабилизирующим фактором.



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат. 1965. 448 с.
2. *Киргетов В. И.* Аналитический метод механики в теории абсолютно упругого удара материальных систем // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 781—789.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз. 1960. 487 с.
4. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
5. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632—636.
6. *Нагаев Р. Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
7. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
8. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.—Л.: Гостехиздат. 1946. 655 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1986