

УДК 531.31

## О ДВИЖЕНИИ САНЕЙ ЧАПЛЫГИНА

Мощук Н. К.

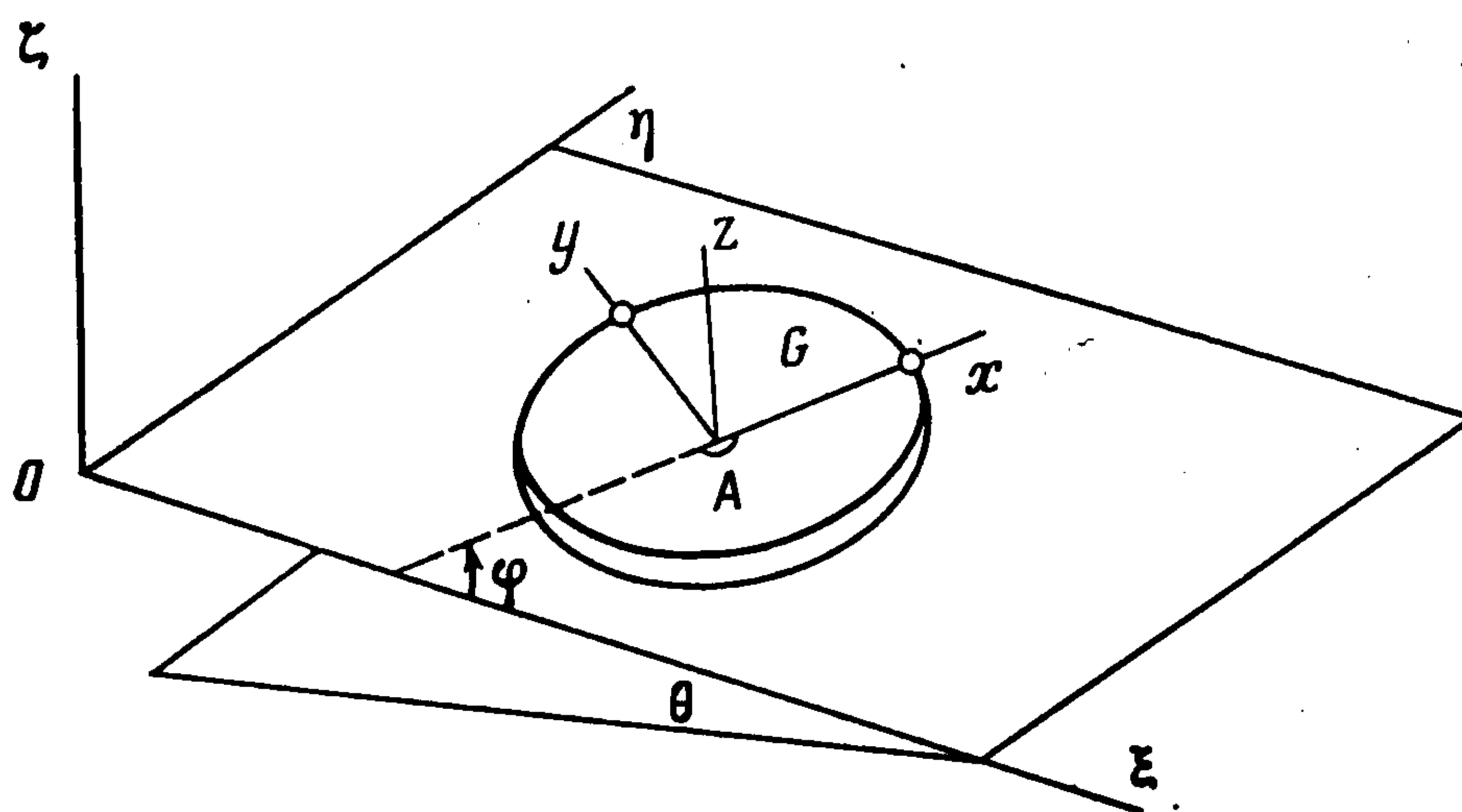
Исследуется плоское движение саней Чаплыгина. Впервые движение такой неавтономной системы в предположении, что опорная плоскость горизонтальна, было рассмотрено Чаплыгиным [1], который при помощи приводящего множителя свел эту задачу к исследованию гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и одной циклической координатой (т. е. вполне интегрируемой по Лиувиллю системы).

Ниже такое сведение достигается при помощи некоторой гладкой обратимой замены фазовых переменных. Методами гамильтоновой механики подробно изучается движение такой системы, а методом усреднения исследуется движение саней на наклонной плоскости.

При некоторых ограничениях на положение центра тяжести саней эта задача рассматривалась ранее [2—4]. Были проинтегрированы [3] уравнения движения саней Чаплыгина на наклонной плоскости в предположении, что центр тяжести саней лежит на прямой, проходящей через лезвие и перпендикулярной лезвию.

1. Рассмотрим движение твердого тела, опирающегося о гладкую наклонную плоскость лезвием и двумя гладкими ножками («уравновешенные» сани Чаплыгина), в однородном поле тяжести с ускорением  $g$ . Конфигурационное пространство  $M_0$  данной механической системы трехмерно, его можно представить себе в виде слоя, заключенного между двумя параллельными плоскостями  $R^2$ , противоположные точки которых отождествлены [3], т. е.  $M_0 = R^2 \times S^1$ .

В качестве координат на  $M_0$  выберем:  $\xi, \eta$  — координаты лезвия  $A$  в неподвижной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , плоскость  $O\xi\eta$  которой совпадает



Фиг. 1

с опорной, ось  $O\xi$  направлена по линии наибольшего ската и  $\varphi \bmod 2\pi$  — угол поворота лезвия вокруг оси  $Az \parallel Oz$ . Введем также жестко связанную с санями систему координат  $Axuz$  так, чтобы ось  $Ax$  была направлена по лезвию, ось  $Ay$  — параллельно опорной плоскости и системы координат  $Axuz$  и  $O\xi\eta\zeta$  были одного класса ориентации. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:  $\alpha, \beta, \delta$  — координаты центра тяжести  $G$  саней в связанной системе координат,  $m$  — масса саней,  $k$  — радиус инерции саней относительно оси  $Gz' \parallel Az$ ,  $r = \sqrt{\alpha^2 + k^2}$  — радиус инерции саней относительно оси  $Bz'' \parallel Az$  ( $B$  — проекция точки  $G$  на ось

$Ay$ ),  $\theta$  — угол наклона опорной плоскости к горизонтальной (фиг. 1). Всюду предполагается (если это специально не оговаривается), что  $\alpha \neq 0$ . Функция Лагранжа рассматриваемой системы — гладкая функция на  $TM_0$  — касательном расслоении  $M_0$ . В выбранных координатах она имеет вид [1]

$$(1.1) \quad L_0 = \frac{1}{2}m \{[\xi' - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)\varphi']^2 + [\eta' + (\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi)\varphi']^2 + k^2\varphi'^2\} + mg \sin \theta (\xi + \alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi)$$

На систему наложена неинтегрируемая связь — абсолютная скорость лезвия  $A$  направлена по оси  $Ax$  (по лезвию), т. е.

$$(1.2) \quad \xi' \sin \varphi - \eta' \cos \varphi = 0$$

Из (1.1) и (1.2) видно, что рассматриваемая система является неголономной системой Чаплыгина и уравнения движения такой системы в форме уравнений Чаплыгина интегрируются независимо от уравнения связи (1.2). Поэтому движениями рассматриваемой неголономной системы удобно считать отображения  $\Delta: R \rightarrow M = R^1 \times S^1 \subset M_0$ , удовлетворяющие в локальных координатах на  $M$  уравнениям Чаплыгина, в которых функция Лагранжа  $L$  составлена с учетом неинтегрируемой связи. К сожалению, в координатах  $\xi$  и  $\varphi$  функция  $L$  будет иметь особенность при  $\cos \varphi = 0$ .

Удобнее, следуя Чаплыгину [1], сначала ввести квазиординату  $q$

$$(1.3) \quad \xi' = q' \cos \varphi, \quad \eta' = q' \sin \varphi$$

а затем квазиординату  $\kappa = q - \beta\varphi$ . Заметим, что

$$(1.4) \quad \xi' = (\kappa' + \beta\varphi') \cos \varphi$$

а  $q'$  и  $\kappa'$  представляют собой проекции на ось  $Ax$  абсолютной скорости лезвия  $A$  и центра тяжести  $G$  соответственно. Конечно,  $q$  или  $\kappa$  вместе с  $\varphi$  уже не определяют однозначно положение тела, но, поскольку  $L$  линейно зависит от  $\xi$ , уравнения движения в квазиординатах  $\kappa, \varphi$  [3] уже не будут содержать явно  $\xi$  и могут рассматриваться независимо от (1.3).

Функция Лагранжа  $L$ , составленная с учетом связи (1.3), и соответствующая ей функция Гамильтона имеют вид

$$(1.5) \quad L = \frac{1}{2}m (\kappa'^2 + r^2\varphi'^2) + mg \sin \theta (\xi + \alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi)$$

$$(1.6) \quad H = (2m)^{-1} (p_\kappa^2 + r^2 p_\varphi^2) - mg \sin \theta (\xi + \alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi)$$

Уравнения движения в канонической форме

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \kappa' &= \frac{\partial H}{\partial p_\kappa} = \frac{p_\kappa}{m}, & p_\kappa' &= -\frac{\partial H}{\partial \kappa} + \Gamma_\kappa \quad \left( \Gamma_\kappa = \frac{\alpha p_\varphi^2}{mr^4} \right) \\ \varphi' &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, & p_\varphi' &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \Gamma_\varphi \quad \left( \Gamma_\varphi = -\frac{\alpha p_\varphi p_\kappa}{mr^2} \right) \\ & & \left( \frac{\partial H}{\partial \kappa} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \cos \varphi = -mg \sin \theta \cos \varphi, \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \alpha mg \sin \theta \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

описывающие движение рассматриваемой неголономной системы, определяют динамическую систему с инвариантной мерой, которая задается плотностью  $\mu = e^{\gamma\kappa}$  ( $\gamma \equiv \alpha r^{-2}$ ). Эта инвариантная мера бесконечна. Для интегрируемости в квадратурах не хватает двух первых интегралов. В общем случае они, по-видимому, неизвестны. Функция  $H$  (полная энергия системы) будет первым интегралом системы (1.7), если ее дополнить соотношением (1.4).

Известно [5], что систему с плотностью  $\mu > 0$  можно привести к системе с плотностью  $\mu = 1$  заменой времени  $d\tau = \mu(\kappa)dt$ . Интересно, что в случае  $\theta = 0$  эта замена времени вместе с линейным преобразованием импульсов  $p' = \mu(\kappa)p$  приводит уравнения (1.7) к виду обычных уравнений Гамильтона [1].

2. Пусть теперь  $\theta = 0$ . Тогда уравнения (1.7) допускают два первых интеграла  $H$  и  $I \equiv p_\varphi e^{\gamma\kappa}$  и интегрируются в квадратурах. Введем квази-координату  $\pi_2$  при помощи соотношения [6]

$$(2.1) \quad \pi_2 \dot{=} \dot{\varphi} e^{-\gamma\kappa}$$

Тогда функция Лагранжа (1.5) имеет вид ( $\pi_1 \equiv \kappa$ )

$$(2.2) \quad L = \frac{1}{2}m (\pi_1 \dot{=}^2 + r^2 e^{2\gamma\pi_1} \pi_2 \dot{=}^2)$$

а уравнения движения в квазикоординатах  $\pi_i$ , как показывают вычисления, следующие [3]:

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \pi_i \dot{=}} - \frac{\partial L}{\partial \pi_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Уравнения (2.3) можно записать и в каноническом виде

$$(2.4) \quad p_i \dot{=} = -\partial H / \partial \pi_i, \quad \pi_i \dot{=} = \partial H / \partial p_i \quad (p_i = \partial L / \partial \pi_i \dot{=})$$

$$(2.5) \quad H = (2m)^{-1} (p_1^2 + r^{-2} e^{-2\gamma\pi_1} p_2^2)$$

Формальную процедуру введения квазикоординаты можно интерпретировать как гладкую (при  $p_\varphi \neq 0$ ) обратимую замену фазовых переменных  $(\kappa, \varphi, p_\kappa, p_\varphi) \rightarrow (\pi_1, \pi_2, p_1, p_2)$ , приводящую уравнения (1.7) к виду обычных уравнений Гамильтона. Она имеет вид

$$(2.6) \quad \pi_1 = \kappa, \quad \pi_2 = \varphi + \gamma^{-1} [p_\kappa p_\varphi^{-1} e^{-\gamma\kappa} + r^{-1} \text{sign}(p_\kappa p_\varphi) \arcsin(1 + p_\kappa^2 p_\varphi^{-2} r^2)^{-1/2}], \quad p_1 = p_\kappa, \quad p_2 = p_\varphi e^{\gamma\kappa}$$

В (2.6) в правой части выражения для  $\pi_2$  опущено слагаемое  $-(2\gamma r)^{-1} \pi \text{sign } p_\kappa$  (необходимое для обеспечения гладкости по  $p_\kappa$ ), так как на дальнейшие рассуждения оно не влияет.

При  $p_\varphi = 0$  ( $I = 0$ ) искомая замена тождественная, поскольку в этом случае уравнения (1.7) уже имеют вид уравнений Гамильтона (как, впрочем, и при  $\gamma = 0$ ). Заметим, что координата  $\pi_2$ , так же как и  $\varphi$ , — угловая, т. е.  $\pi_2 \bmod 2\pi$ .

Формулы (2.6) задают отображение фазового пространства  $T^*M$  ( $T^*M$  — кокасательное расслоение  $M$ ) на себя. Преобразованный гамильтониан (2.5) есть гладкая функция на  $T^*M$ , а соответствующие ему уравнения (2.4) описывают движение рассматриваемой неголономной системы. Таким образом, в фазовом пространстве  $T^*M$  можно так выбрать карту  $(\pi_1, \pi_2, p_1, p_2)$ , что траектории фазового потока (1.7) изображаются на этой карте интегральными кривыми обычных канонических уравнений (2.4).

Гамильтонова система (2.4) имеет два независимых интеграла в инволюции:  $H = h = \text{const}$  и  $p_2 = c = \text{const}$  и потому вполне интегрируема. Ее можно привести к системе с одной степенью свободы. Приведенное фазовое пространство —  $R^2$ , а приведенный гамильтониан получается из (2.5) заменой  $p_2$  на  $c$ . Область возможных движений не пуста, если  $h \geq 0$ . При  $h = 0$  возможно лишь положение равновесия, реализуемое только при  $c = 0$ . Фазовые портреты приведенной системы изображены на фиг. 2 для случая  $\gamma > 0$  (при  $\gamma < 0$  фазовые портреты получаются симметричным отображением относительно вертикальной оси фазовых портретов в случае  $\gamma > 0$ ).

В фазовом пространстве  $T^*M$  каждая связная компонента множества  $U_{c,h}$  уровня первых интегралов  $H$  и  $p_2$  диффеоморфна двумерному цилиндру  $U_{c,h} \simeq S^1 \times R^1$  [7].

Каноническое преобразование фазового пространства

$$\{\pi_1, \pi_2 \bmod 2\pi, p_1, p_2\} \rightarrow \{w_1, w_2 \bmod 2\pi, I_1, I_2\}$$

(при  $p_2 = 0$  оно тождественное), определяемое формулами

$$(2.7) \quad \pi_1 = -\frac{1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{I_1}{I_2} r \operatorname{sch}(\gamma w_1) \right]^2, \quad \pi_2 = w_2 + \frac{I_1}{\gamma I_2} \operatorname{th}(\gamma w_1)$$

$$p_1 = I_1 \operatorname{th}(\gamma w_1), \quad p_2 = I_2 \quad (I_1 \geq 0)$$

приводит функцию Гамильтона (2.5) и уравнения движения к виду

$$(2.8) \quad H = (2m)^{-1} I_1^2$$

$$(2.9) \quad w_1^* = m^{-1} I_1, \quad w_2^* = 0, \quad I_1^* = 0, \quad I_2^* = 0$$

Заметим, что преобразование (2.7), по сути, — выпрямляющий диффеоморфизм гамильтонова векторного поля с функцией Гамильтона (2.5).

Переменные  $I, w$  можно рассматривать как аналог переменных действие — угол (здесь множества уровня первых интегралов не компактно). Переменные  $w_1, w_2 \bmod 2\pi$  — это координаты на инвариантных цилиндрах  $I = \text{const}$ . Из (2.8) следует, что рассматриваемая гамильтонова система вырождена:

$$\det \|\partial^2 H / \partial I^2\| = 0$$

Уравнения (2.9) легко интегрируются:

$$(2.10) \quad w_1 = \omega_1 t + w_{10}, \quad w_2 = w_{20}$$

$$I_i = \text{const}, \quad w_{i0} = \text{const},$$

$$\omega_1 \equiv I_1/m \quad (i = 1, 2)$$

Для завершения исследования движения саней Чаплыгина по горизонтальной плоскости выпишем формулы перехода от фазовых переменных  $w, I$  к переменным  $\kappa, \varphi, p_\kappa, p_\varphi$

$$(2.11) \quad \kappa = -\frac{1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{I_1}{I_2} r \operatorname{sch}(\gamma w_1) \right]^2, \quad \varphi = w_2 - \frac{r}{\alpha} \arcsin \operatorname{sch}(\gamma w_1) \times \\ \times \operatorname{sign}[I_2 \operatorname{th}(\gamma w_1)], \quad p_\kappa = I_1 \operatorname{th}(\gamma w_1), \quad p_\varphi = r I_1 \operatorname{sch}(\gamma w_1) \operatorname{sign} I_2$$

Подставляя (2.10) в (2.11), находим явные зависимости от времени переменных  $\kappa, \varphi, p_\kappa, p_\varphi$  и их предельные значения

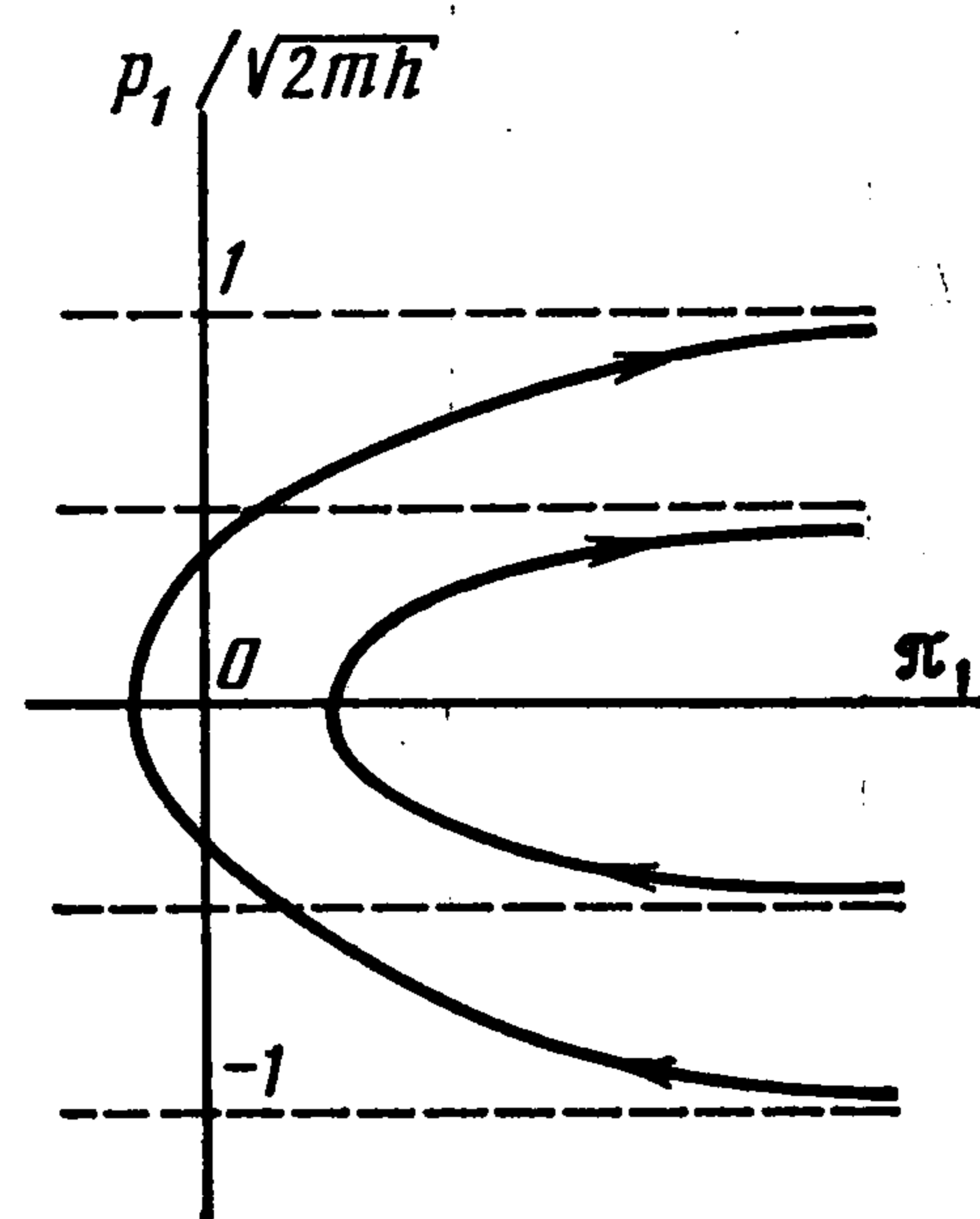
$$(2.12) \quad \lim p_\varphi(t) = 0, \quad \lim \varphi(t) = w_{20}, \quad \lim p_\kappa(t) = m\omega_1 \operatorname{sign} \alpha \quad (t \rightarrow \infty)$$

Заметим также, что  $\lim q^*(t) = \omega_1 \operatorname{sign} \alpha \quad (t \rightarrow \infty)$ .

Следовательно, сани с течением времени стремятся к равномерному скольжению вдоль некоторой прямой. При этом конек ориентируется так, что центр тяжести  $G$  «опережает» лезвие  $A$ .

Сравним теперь поведение траекторий в фазовом пространстве, когда оно покрывается различными картами.

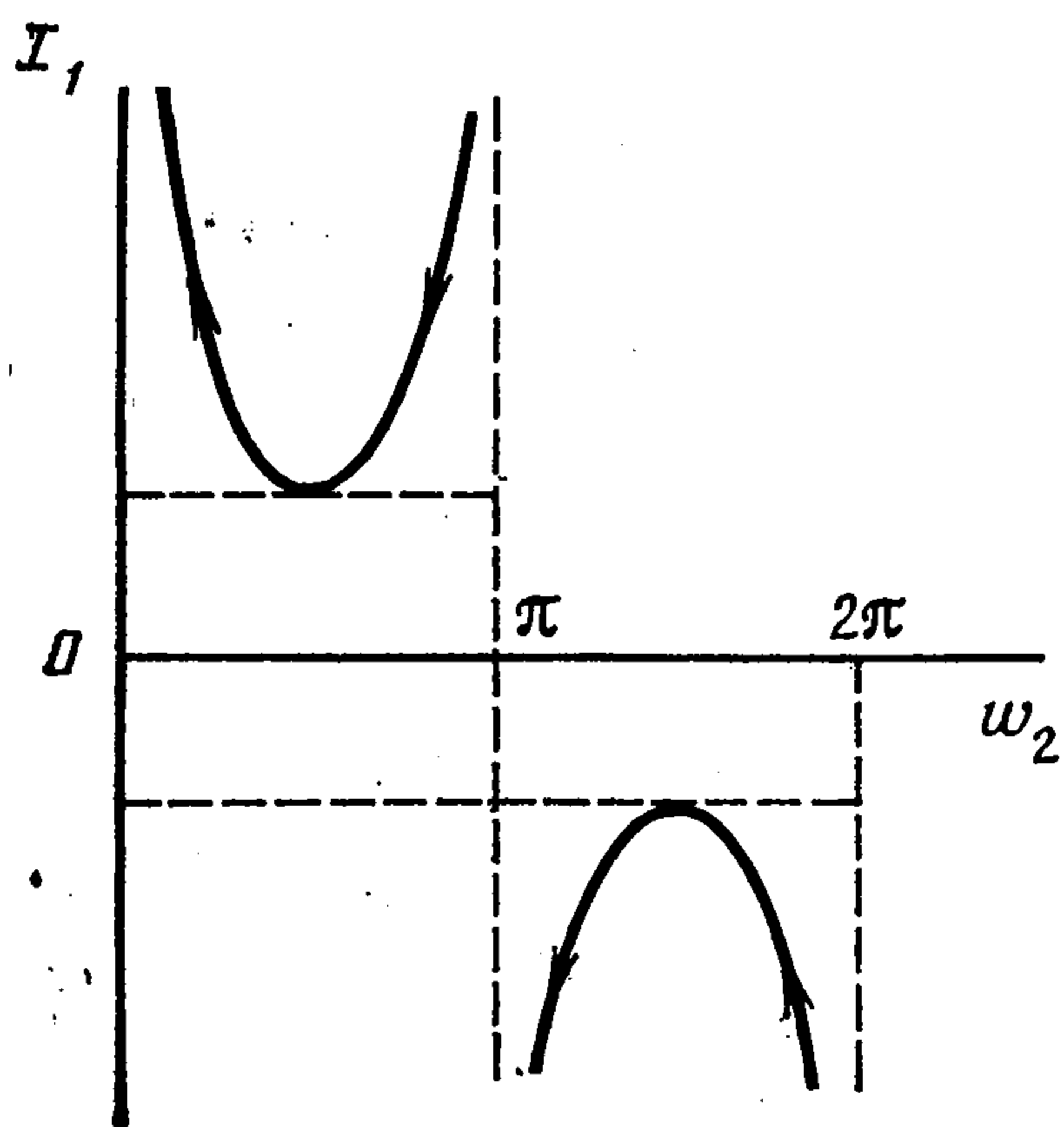
Как уже отмечалось, уровни первых интегралов  $p_\varphi e^{\gamma \kappa} = c$  и  $H = h$  высекают в фазовом пространстве  $\{\kappa, \varphi, p_\kappa, p_\varphi\}$  инвариантные многообразия  $U_{c,h}$ , диффеоморфные одному или нескольким двумерным цилиндрам. Уровень  $c = 0, h > 0$  — это объединение двух цилиндров, т. е.  $U_{0,h} = \Sigma_+ \cup \Sigma_-, \Sigma_+ \simeq \Sigma_- \simeq R^1 \times S^1$ . Величина  $\Sigma_+ (\Sigma_-)$  пред-



Фиг. 2

ставляет собой многообразие стационарных движений саней. Сани при этом движутся равномерно со скоростью  $\sqrt{2h/m}$  ( $-\sqrt{2h/m}$ ) вдоль прямой  $\varphi = \text{const}$ . Зафиксируем множество уровня энергии  $H = h > 0$ . В фазовом пространстве — это область между двумя цилиндрами  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$ . Она расслаивается на двумерные фазовые цилиндры  $U_{c,h}$  ( $c \in R$ ). Любая траектория, лежащая на  $U_{c,h}$  ( $c \neq 0$ ), стремится при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) к некоторой траектории из  $\Sigma_+$  ( $\Sigma_-$ ), если  $\alpha > 0$ , и к некоторой траектории из  $\Sigma_-$  ( $\Sigma_+$ ), если  $\alpha < 0$ . Таким образом, фазовые цилиндры  $U_{c,h}$  «прижимаются» к  $\Sigma_+$  при  $\kappa \rightarrow +\infty$ , или к  $\Sigma_-$  при  $\kappa \rightarrow -\infty$ .

В фазовом пространстве  $\{\pi_1, \pi_2, p_1, p_2\}$  область  $H = h > 0$  также расслаивается на двумерные цилиндры, которые, однако, уже не прижимаются к  $\Sigma_{\pm}$  при  $\pi_1 \rightarrow \pm\infty$  (в отличие от предыдущего случая, где  $\lim p_{\varphi}(t) = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; здесь  $p_2 = \text{const}$ ).



Фиг. 3

3. Пусть теперь угол наклона  $\theta \neq 0$ . Уравнения движения (1.7) в этом случае допускают два однопараметрических семейства решений  $\Lambda_+ = \{\kappa' = (g \sin \theta)t + v_0, \varphi = 0\}$  и  $\Lambda_- = \{\kappa' = -(g \sin \theta)t + v_0, \varphi = \pi\}$  ( $v_0 = \text{const}$ ), которые соответствуют скольжению саней вдоль прямой наибольшего ската с постоянным ускорением  $g \sin \theta$ . При движении из  $\Lambda_+$  центр тяжести опережает конек при  $\alpha > 0$  и отстает при  $\alpha < 0$ , а при движении из  $\Lambda_-$  центр тяжести опережает конек при  $\alpha < 0$  и отстает при  $\alpha > 0$ .

Исследование остальных движений будем проводить методом усреднения [8], приняв величину  $\theta$  за малый параметр ( $0 < \theta \ll 1$ ).

Выпишем уравнения движения (1.7) в переменных  $I_1, w_1, w_2$

$$(3.1) \quad \begin{aligned} I_1' &= \varepsilon [\text{th}(\gamma w_1) \cos \varphi - \sigma \alpha r^{-1} \text{sch}(\gamma w_1) \sin \varphi] \\ w_2' &= -\varepsilon I_1^{-1} [\text{th}(\gamma w_1) \sin \varphi + \sigma \alpha^{-1} r \text{sch}(\gamma w_1) \cos \varphi] \\ w_1' &= m^{-1} I_1 + \varepsilon (\gamma I_1)^{-1} [\cos \varphi + \sigma \alpha r^{-1} \text{sh}(\gamma w_1) \sin \varphi]; \\ \varepsilon &\equiv mg \sin \theta, \quad \sigma = \text{sign}(I_2) \end{aligned}$$

В (3.1)  $\varphi$  надо заменить соответствующим выражением из (2.11). Уравнение для  $I_2$  не выписано, так как оно не понадобится.

В системе (3.1) переменные  $I_1, w_2$  — медленные, а  $w_1$  — быстрая. Усредняя правые части уравнений для медленных переменных по быстрой переменной, получаем следующую усредненную систему уравнений (для усредненных величин сохраняем прежние обозначения):

$$(3.2) \quad I_1' = \varepsilon \cos w_2, \quad w_2' = -\varepsilon I_1^{-1} \sin w_2$$

Заметим, что при усреднении пропадают члены, зависящие от  $\sigma$ .

Решения усредненной системы аппроксимируют медленные переменные с погрешностью порядка  $\theta$  на интервале времени порядка  $\theta^{-1}$ .

Усредненная система имеет интеграл

$$(3.3) \quad I_1 \sin w_2 = \lambda$$

Фазовые портреты системы (3.2) изображены на фиг. 3 ( $\lambda > 0$ ), а анализ общего решения системы (3.2) приводит к следующим предельным

значениям:

$$(3.4) \quad \lim \sin w_2(t) = 0, \quad \lim I_1'(t) = \pm \varepsilon \quad (t \rightarrow \infty)$$

Отсюда следует, что сани будут стремиться к спуску вдоль прямой наибольшего ската с постоянным ускорением  $g \sin \theta$ , ориентируясь при этом так, чтобы центр тяжести опережал лезвие. Таким образом, в первом приближении по  $\theta$  все решения системы (1.7) стремятся к  $\Lambda_+$  при  $\alpha > 0$  и к  $\Lambda_-$  при  $\alpha < 0$  (исключение составляют лишь решения из  $\Lambda_{\pm}$ ).

В заключение заметим, что в случае  $\theta = 0$ ,  $\alpha = 0$  существует связь «естественных» фазовых переменных  $\xi$ ,  $\varphi$ ,  $p_{\xi}$ ,  $p_{\varphi}'$  с переменными  $\kappa$ ,  $\varphi$ ,  $p_{\kappa}$ ,  $p_{\varphi}$ . Точнее, преобразование фазового пространства

$$\begin{aligned} \kappa &= \xi - \beta \sin \varphi + (k^2 p_{\xi} \cos \varphi (\varphi - \sin \varphi))(p_{\varphi}' + \beta p_{\xi} \cos \varphi)^{-1} \\ p_{\kappa} &= p_{\xi} \cos \varphi, \quad p_{\varphi} = p_{\varphi}' + \beta p_{\xi} \cos \varphi \quad (\cos \varphi \neq 0) \end{aligned}$$

приводит уравнения движения данной системы в переменных  $\xi$ ,  $\varphi$ ,  $p_{\xi}$ ,  $p_{\varphi}'$  к виду (1.7).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 112 с.
2. Caratheodory C. Der Schlitten // Z. angew. Math. and Mech. 1933. В. 13. S. 71—76.
3. Неймарк Ю. И., Фурфеев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука. 1967. 519 с.
4. Емельянова И. С. К вопросу о динамике саней Чаплыгина на наклонной плоскости // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-во Перм. ун-та. 1974. Вып. 4. С. 52—60.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 550 с.
6. Мощук Н. К. О приведении уравнений движения некоторых неголономных систем Чаплыгина к форме уравнений Лагранжа и Гамильтона // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 223—229.
7. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ. 1985. Т. 3. С. 5—304.
8. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 6. С. 3—126.

Москва

Поступила в редакцию  
3.VI.1986