УДК 539.3

КРАТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Сейранян А. П.

Рассматривается задача максимизации минимального собственного значения самосопряженного матричного оператора. Исследуется случай, когда оптимальное собственное значение кратное, т. е. задача оптимизации негладкая. Эта задача имеет интересные приложения в оптимальном проектировании конструкций [1—6]. Получены необходимые условия локального максимума собственного значения произвольной кратности p при изопериметрическом ограничении. Работа обобщает результаты [7, 8] для одно- и двукратного случая.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$A\,[h]\,u = \lambda B\,[h]\,u \tag{1}$$

Здесь $A\,[h]$ и $B\,[h]$ — положительно-определенные симметричные матрицы $m \times m$ с коэффициентами $a_{ij}\,(h)$ и $b_{ij}\,(h)$, гладко зависящими от компонент вектора параметров h размерности n, u — собственный вектор размерности m, λ — собственное значение.

Задача (1) имеет полную систему собственных векторов u^i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и отвечающую этой системе последовательность собственных значений λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, причем будем предполагать выполненным условие ортогональности

$$(B\,[h]\,u^i,\, u^j) = \delta_{ij} \tag{2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Здесь и далее круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов.

Поставим задачу оптимизации: найти вектор параметров $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, при котором минимальное собственное значение λ_1 задачи (1) достигает максимального значения при условии

$$F\,(h) = 0 \tag{3}$$

где $F\,(h)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция векторного аргумента.

Пусть вектору h, удовлетворяющему условию (3), отвечает p-кратное минимальное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p < \lambda_{p+1} \leqslant \lambda_{p+2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, $1 < p \leqslant m$. Придадим вектору h приращение в виде вектора εk, $\| k \| = 1$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, ε — малое положительное число. Из (3) следует, что вектор k удовлетворяет условию

$$(f^\circ, k) = 0,\quad f^\circ = \nabla F \tag{4}$$

В результате возмущения вектора параметров кратное собственное значение λ_1 и собственные векторы $u^1, u^2, \ldots, u^p$ получат приращения, которые имеют вид [9]

$$\begin{gathered} \lambda = \lambda_1 + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\eta + o\,(\varepsilon^2),\quad u = u^\circ + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + o\,(\varepsilon^2), \\ u^\circ = \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2 + \ldots + \gamma_p u^p \end{gathered} \tag{5}$$

где u° — линейная комбинация собственных векторов u^i $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Коэффициенты γ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ подлежат определению из уравнений метода возмущений.

Подставляя разложения (5) в (1), в первом приближении получим

$$Cu^\circ + Av^1 - \lambda_1 Bv^1 = \mu Bu^\circ \tag{6}$$

где C — матрица с коэффициентами $c_{ij} = (\nabla a_{ij}, k) - \lambda_1 (\nabla b_{ij}, k)$, $\nabla = (\partial/\partial h_1, \partial/\partial h_2, \ldots, \partial/\partial h_n)$. Умножая (6) скалярно на u^i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, придем к системе линейных уравнений относительно постоянных γ_i

$$\sum_{j=1}^{p} (\alpha_{ij} - \mu\delta_{ij})\,\gamma_j = 0,\quad i = 1, 2, \ldots, p;\quad \alpha_{ij} = (Cu^i, u^j) \tag{7}$$

Введем для удобства дальнейших выкладок векторы f^{ij} размерности n

$$f^{ij} = \sum_{s,\,t=1}^{m} u_s^{\,i} u_t^{\,j} (\nabla a_{st} - \lambda_1 \nabla b_{st}) \tag{8}$$

где $u_s^{\,i}$, $u_t^{\,j}$ — компоненты собственных векторов u^i, u^j. Заметим, что $f^{ij} = f^{ji}$ ввиду симметрии a_{ij}, b_{ij}. С учетом обозначений (8) коэффициенты α_{ij} из (7) можно записать в виде $\alpha_{ij} = (f^{ij}, k)$.

Приравнивая определитель системы уравнений (7) нулю, получим уравнение для определения μ

$$\det \| (f^{ij}, k) - \mu\delta_{ij} \| = 0 \tag{9}$$

Таким образом, зная собственное число λ_1 и собственные векторы u^i, $i = 1, 2, \ldots, p$, отвечающие этому собственному значению, можно вычислить векторы f^{ij} согласно (8) и по вектору вариации k из (9) вычислить вариации $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ p-кратного собственного значения λ_1.

Утверждение 1. Если векторы f°, f^{ij}, $ij = 1, 2, \ldots, p$; $j \geqslant i$ (их всего $^1/_2 p(p+1)+1$) линейно независимы, то существует улучшающая вариация k, при которой $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Заметим, что линейная независимость этих векторов возможна лишь при $n \geqslant {}^1/_2\, p(p+1)+1$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно компонент вектора вариаций $k_1, k_2, \ldots, k_n$

$$(f^\circ, k) = 0; \ (f^{ij}, k) = \delta_{ij}\nu_i^\circ, \ ij = 1, 2, \ldots, p; \ j \geqslant i \tag{10}$$

где ν_i° — заданные положительные постоянные. Если векторы f°, f^{ij}, $ij = 1, 2, \ldots, p$; $j \geqslant i$ линейно независимы, то решение (10) существует при любых ν_i°, в частности при $\nu_i^\circ > 0$. Пусть вектор k — решение системы (10), нормируем этот вектор $\tilde{k} = k/\| k \|$. Тогда из уравнений (9), (10) найдем $\mu_i = (f^{ii}, \tilde{k}) = \nu_i^\circ/\| k \| > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, что и доказывает возможность построения улучшающей вариации $\tilde{k}$, при которой $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

При $n < {}^1/_2\, p(p+1)+1$ векторы f°, f^{ij} всегда линейно зависимы, поэтому улучшающая вариация может не существовать.

В случае линейной зависимости векторов f°, f^{ij} $(ij = 1, 2, \ldots, p;\ j \geqslant i)$ выделим из них линейно независимые векторы $f^\circ, f^1, f^2, \ldots, f^{r-1}$, где r — ранг матрицы, составленной из векторов f°, f^{ij}, $r \leqslant {}^1/_2\, p(p+1)$, и разложим по ним остальные векторы f^{ij}

$$f^{ij} = \xi_0^{ij} f^\circ + \xi_1^{ij} f^1 + \ldots + \xi_{r-1}^{ij} f^{r-1} \tag{11}$$

Заметим, что коэффициенты разложений симметричны: $\xi_t^{ij} = \xi_t^{ji}$ ввиду $f^{ij} = f^{ji}$. С учетом (4), (11) коэффициенты матрицы α_{ij} предстанут в виде

$$\alpha_{ij} = (f^{ij}, k) = \sum_{t=1}^{r-1} \xi_t^{ij} l_t; \quad l_t = (f^t, k) \tag{12}$$

Утверждение 2. Если вектор параметров h, удовлетворяющий условию (3), доставляет максимум минимальному собственному значению λ_1 с кратностью p, то необходимо, чтобы:

1) векторы f°, f^{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, p$; $j \geqslant i$ были линейно зависимы;

2) множество векторов $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{r-1})$, определяемых условиями: а) $D_1D_3 > 0$, $D_3D_5 > 0, \ldots, D_{p-3}D_{p-1} > 0$; $D_2 > 0$, $D_4 > 0$, $D_6 > 0, \ldots, D_p > 0$, если p — четное, или б) $D_1D_3 > 0$, $D_3D_5 > 0, \ldots, D_{p-2}D_p > 0$; $D_2 > 0$, $D_4 > 0, \ldots, D_{p-1} > 0$, если p — нечетное, было пустым.

Здесь $D_1, D_2, \ldots, D_p$ — главные миноры матрицы с коэффициентами α_{ij}, $ij = 1, 2, \ldots, p$.

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из утверждения 1). Условие 2) означает, что характеристический многочлен (9) не будет иметь знакоопределенных корней μ_i. Условия на главные миноры а) или б) вытекают из известных необходимых и достаточных условий положительной и отрицательной определенности симметричных матриц [10].

Заметим, что изменение знака вариации k изменяет знаки первых вариаций μ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Поэтому отсутствие знакоопределенных корней μ_i — необходимое условие максимума λ_1.

При выполнении условий (12) в $(r-1)$-мерном пространстве векторов $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{r-1})$ неравенства а) или б) выделяют области, пересечение которых должно быть пустым. Это налагает условия на коэффициенты разложений ξ_t^{ij} из (11). В двукратном случае эти условия довольно простые [7, 8].

Замечание. Задача максимизации минимального собственного значения с учетом кратности в непрерывной постановке рассматривалась в [11], где приведено условие линейной зависимости типа (11), имеющее вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\Omega_{ij}=k^2 \tag{13}$$

Здесь Ω_{ij} — функции, играющие роль векторов f^{ij} в обозначениях данной статьи, k^2, γ_{ij} — коэффициенты разложений. Однако вывод этого условия представляется неверным. В частности, из условия (34) работы [11] вместо (35) (здесь условие (13)) следует $\Omega_{ij}=\text{const}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

После того, как данная работа была сдана в печать, вышла статья [12], посвященная задачам оптимизации собственных значений с учетом их кратности при наличии ограничений типа неравенств $g_i(x)\leqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, q$. Это обстоятельство изменяет содержание задачи оптимизации. Для учета введенных ограничений в [12] использована теорема о несовместности линейных неравенств. Однако эта статья содержит ряд существенных неточностей.

Пример. Рассмотрим случай, когда матрица A диагональная, обладающая при векторе параметров h p-кратным собственным значением, а матрица B единичная. В этом случае $\lambda_i = a_{ii}(h)=\lambda_1$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $a_{ii}(h)>\lambda_1$, $p<i\leqslant m$.

Первые поправки μ p-кратного собственного значения λ_1 найдем из уравнения (9): $\mu_i=(f^{ii}, k)$ $(i=1, 2, \ldots, p)$. Векторы f^{ii} являются в данном случае градиентами собственных значений λ_i, $f^{ii}=\nabla a_{ii}(h)$. Будем считать их линейно независимыми.

Необходимое условие оптимальности (11) можно записать в виде

$$\zeta_0 f^0+\sum_{i=1}^{p}\zeta_i f^{ii}=0 \tag{14}$$

Получим условия на коэффициенты ζ_i. Прежде всего из условий а) или б) утверждения 2 следуют неравенства

$$(f^{11}, k)(f^{22}, k)>0,\quad (f^{22}, k)(f^{33}, k)>0, \ldots, (f^{p-1,\,p-1}, k)(f^{pp}, k)>0 \tag{15}$$

Из (14) выразим, например, вектор f^{11} через f^0, f^{ii} $(i=2, 3, \ldots, p)$ и подставим в (15). В результате получим

$$-\frac{\zeta_2}{\zeta_1}(f^{22}, k)^2-\frac{\zeta_3}{\zeta_1}(f^{22}, k)(f^{33}, k)-\ldots-\frac{\zeta_p}{\zeta_1}(f^{22}, k).] \tag{16}$$
$$(f^{pp}, k)>0;\quad (f^{ii}, k)(f^{i+1,\,i+1}, k)>0,\quad i=2, 3, \ldots, p-1$$

Множество векторов k, удовлетворяющих условиям (16) и (4), должно быть пустым. Отсюда, очевидно, имеем неравенства

$$\zeta_i/\zeta_1\geqslant 0,\quad i=2, 3, \ldots, p \tag{17}$$

т. е. условия знакоопределенности коэффициентов ζ_i $(i=1, 2, \ldots, p)$. Условия (14), (17) являются обычными условиями максимина [13].

Результаты работы докладывались на совместном заседании Семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества в январе 1984 года (Сейранян А. П. Кратные собственные значения и задача Лагранжа.— Успехи математических наук, 1984, т. 39, вып. 4 (238), с. 130—131).

Автор благодарит В. Б. Лидского за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Olhoff N., Rasmussen S. H.* On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns.— Intern. J. Solids and Struct., 1977, v. 13, No. 7, p. 605—614.
2. *Арман Ж.-Л. П., Лурье К. А., Черкаев А. В.* К решению задач оптимизации собственных значений, возникающих при проектировании упругих конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 159—162.
3. *Медведев Н. Г.* Некоторые спектральные особенности оптимальных задач устойчивости оболочек переменной толщины.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 59—63.
4. *Choi K. K., Haug E. J.* Optimization of structures with repeated eigenvalues.— In: Optimization of Distributed Parameter Structures. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1981, p. 219—277.
5. *Blachut J., Gajewski A.* On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches.— Intern. J. Solids and Struct., 1981, v. 17, No. 7, p. 653—667.
6. *Сейранян А. П.* Об одной задаче Лагранжа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 101—111.
7. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 546—554.

8. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Достаточные условия экстремума в задачах оптимизации собственных значений.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 657—667.
9. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 525 с.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
11. *Masur E. F.* Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints.— Intern. J. Solids and Struct., 1984, v. 20, No. 3, p. 211—231.
12. *Братусь А. С.* Кратные собственные значения в задачах оптимизации спектральных свойств систем с конечным числом степеней свободы.— ЖВМ и МФ, 1986, т. 26, № 5, с. 645—654.
13. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию 22.IV.1985

I ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ»

будет проведена 20—22 октября 1987 г. в г. Львове

Конференцию организуют: Научный совет АН СССР по проблемам прочности и пластичности, Научный совет АН СССР «Новые процессы получения и обработки металлических материалов», Научный совет по проблеме «Механика твердого деформируемого тела» при Президиуме АН УССР, Физико-механический институт АН УССР, Институт проблем механики АН СССР, МГУ им. М. В. Ломоносова.

На конференции планируется обсудить следующие вопросы: микро- и макромодели механики разрушения, методы решения задач механики деформируемого тела с дефектами типа трещин, трещиностойкость материалов и методы ее определения, применение механики разрушения в инженерной практике и к анализу природных процессов.

Для участия в работе конференции необходимо выслать в Оргкомитет до 15 мая 1987 г.: заявку на участие; тезисы доклада в трех экземплярах (1 стр. машинописного текста, напечатанного через полтора интервала); разрешение на опубликование; полные сведения об авторах.

Тезисы докладов будут издаваться ротапринтным способом, поэтому должны быть тщательно подготовлены и отредактированы в полном соответствии с требованиями к научным публикациям. Текст должен быть отпечатан на машинке с черной лентой, на одной стороне стандартного (297 × 210 мм) листа. Исправления не допускаются. В левом верхнем углу дать индекс УДК. Заглавие печатается прописными буквами, через два интервала, затем ниже строчными буквами инициалы и фамилии авторов, с отступом в 5 знаков — полное название организации и, через запятую, город. В названии доклада переносы не допускаются (верхнее поле 20 мм, нижнее — 20 мм, левое — 30 мм, правое — 15 мм).

Формулы вписываются черной тушью, разборчиво и тщательно. Высота букв и цифр в формулах не менее 3,0 мм. Иллюстрации и список литературы в текст тезисов не включать. Неправильно оформленные или поврежденные тексты не могут быть опубликованы в сборнике тезисов.

Оргкомитет сообщит о включении доклада в программу конференции в июне 1987 г.

Адрес Оргкомитета: 290601 Львов, ГСП, ул. Научная, 5. Физико-механический институт АН УССР. Ученому секретарю ДАЦЫШИН А. П. Тел.: 39-52-75, 63-63-90.

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 26.01.87	Подписано к печати 17.03.87	Т-06131	Формат 70×108¹/₁₆
Высокая печать	Усл. печ. л. 15,4 / Усл. кр.-отт. 36,1	Уч.-изд. л. 15,7	Бум. л. 5,5

Тираж 2319 экз. Зак. 74

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука» 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6