ЛИТЕРАТУРА

1. *Грант Н.* Разрушение в условиях высокотемпературной ползучести.— В кн.: Разрушение. М.: Мир, 1976, т. 3, с. 528—578.
2. *Phillips C. W., Sinnott M. J.* A statistical study of the stress-rupture test.— Trans. Amer. Soc. Metals, 1954, v. 46, p. 63—86.
3. *Prnka T., Foldyna V.* The creep properties of low alloy Cr — Mo — V steels with low carbon content.— High temperature properties of steels. L.: Iron and steel Inst., 1967, p. 115—130.
4. *Вакуленко А. А. (мл.)* О хрупком разрушении при ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 6, с. 117—123.
5. *Вакуленко А. А.* О статистике хрупкого разрушения при ползучести.— Проблемы прочности, 1984, № 10, с. 23—27.
6. *Piatti G., Lubek R., Matera R.* Cavitation.— Euro-spectra, 1972, v. 11, No. 4, p. 93—101.
7. *Болотин В. В.* К теории замедленного разрушения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 137—146.
8. *Конторова Т. А.* Статистическая теория прочности.— Ж. техн. физики, 1940, т. 10, вып. 11, с. 886—890.
9. *Новожилов В. В.* О пластическом разрыхлении.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 681—689.
10. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциальные разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
11. *Mandelbrot B.* Fractals, form, chance, dimension. N.Y. Freeman, 1977. 365 p.
12. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
13. *Chen I. W., Argon A. S.* Creep cavitation in 304 stainless steel.— Acta Metallurgica, 1981, v. 29, No. 7, p. 1321—1333.
14. *Klebanov L. B., Melamed I. A.* Several notes on Fisher information in presence of nuisance parameters.— Math. Operationsforsch. und Statistics, 1978, v. 9, No. 1, p. 85—90.

Ленинград

Поступила в редакцию 28.I.1985

УДК 539.3

О ВАРИАЦИОННОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

Хлуднев А. М.

Исследуется вариационное неравенство, описывающее контакт оболочки с жестким штампом на границе. На подмножествах границы строится неотрицательная мера, характеризующая воздействие штампа на оболочку. Устанавливается регулярность решения.

В настоящее время получен ряд результатов, относящихся к исследованию вариационных неравенств, описывающих контактные задачи для упругих тел в условиях одностороннего соприкосновения. В частности, была рассмотрена [1] контактная задача для трехмерного упругого тела (задача Синьорини). Предложена [2], а затем исследована [3] ее более общая постановка для случая штампа, поверхность которого не совпадает с границей упругого тела. Рассматривались односторонние контактные задачи для пластин [4] и оболочек [5] с ограничением внутри области.

Рассмотрим краевую задачу для линейных уравнений пологих оболочек с условиями на части границы Γ_0, имеющими вид

$$u_3 \geqslant 0,\ T(u_3) \geqslant 0,\ u_3 T(u_3) = 0,\ M(u_3) = 0 \tag{1}$$

$$-U_n \geqslant 0,\ -N_n \geqslant 0,\ U_n N_n = 0,\ N_\tau = 0 \tag{2}$$

Здесь $M(u_3)$, $T(u_3)$ — изгибающий момент и перерезывающая сила, $U = (u_1, u_2)$, $U_n = u_i n_i$; u_1, u_2, u_3 — соответственно тангенциальные и нормальное смещения точек оболочки, $n = (n_1, n_2)$ — внешняя нормаль к границе, $N_n = N_{ij} n_j n_i$, N_{ij} — усилия в срединной поверхности, N_τ — касательная составляющая вектора сил на границе. По повторяющимся индексам i, j производится суммирование. Сформулированные краевые условия соответствуют одностороннему контакту оболочки на границе с жестким штампом и допускают отход точек оболочки от штампа как в плоскости $x_1 x_2$

так и в направлении, нормальном к срединной поверхности. Условие отхода обеспечивается возможностью выполнения строгих неравенств $u_3 > 0$ или $-U_n > 0$. В этом случае $T(u_3) = 0$ или соответственно $N_n = 0$. Если же $T(u_3) > 0$ или $-N_n > 0$, то соответственно $u_3 = 0,\ U_n = 0$.

Введем ряд обозначений и сформулируем точную постановку задачи. Пусть $\Omega \subset \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, представленной в виде объединения двух частей: $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Для простоты предполагаем, что Γ_0 и Γ_1 — дуги, причем длина Γ_1 больше нуля. Обозначим $H_{\Gamma_1}{}^1(\Omega)$ пространство С. Л. Соболева, полученное замыканием в $H^1(\Omega)$ гладких функций, равных нулю в окрестности Γ_1. Аналогично определяется пространство $H_{\Gamma_1}{}^2(\Omega)$. Пусть также $H(\Omega) = H_{\Gamma_1}{}^1(\Omega) \times \times H_{\Gamma_1}{}^1 \times H_{\Gamma_1}{}^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_s$ — норма в $H^s(\Omega)$. Рассмотрим функционал энергии оболочки

$$\Pi(\omega) = \Pi_1(\omega) - 2\int\limits_{\Omega} F\omega\, dx, \quad \omega = (u_1, u_2, u_3) \tag{3}$$

$$\Pi_1(\omega) = B(u_3, u_3) + \int\limits_{\Omega}\left\{\varepsilon_{11}{}^2 + \varepsilon_{22}{}^2 + 2\sigma\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}(1-\sigma)\varepsilon_{12}{}^2\right\} dx$$

$$\varepsilon_{11} = u_{1x_1} + k_{11}u_3,\ \varepsilon_{22} = u_{2x_2} + k_{22}u_3,\ \varepsilon_{12} = u_{1x_2} + u_{2x_1}$$

Здесь $F = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega)$ — вектор заданных сил, $k_{11}, k_{22} \in C^1(\overline{\Omega})$ — кривизны, σ — коэффициент Пуассона, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Билинейная форма $B(\cdot, \cdot)$ определена ниже формулой (7).

Введем далее замкнутое выпуклое множество в $H(\Omega)$

$$K = \{\omega = (U, u_3) \in H(\Omega) \mid u_3 \geqslant 0,\ -U \in 0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

и рассмотрим задачу минимизации функционала энергии $\Pi(\omega)$ на множестве K. Она эквивалентна решению вариационного неравенства

$$\omega \in K: \langle \Pi'(\omega), \chi - \omega\rangle \geqslant 0,\ \forall\chi \geqslant K \tag{4}$$

Здесь $\Pi'(\omega)$ — градиент функционала Π в точке ω.

Можно показать, что решение сформулированной задачи существует.

Из неравенства (4) получаем, что в смысле распределений будут выполнены следующие уравнения в области Ω:

$$\Delta^2 u_3 + k_{11}N_{11} + k_{22}N_{22} = f_3;\quad -\partial N_{ij}/\partial x_j = f,\quad i = 1,\ 2 \tag{5}$$

$$N_{11} = \varepsilon_{11} + \sigma\varepsilon_{22},\ N_{22} = \varepsilon_{22} + \sigma\varepsilon_{11},\ N_{12} = {}^1/_2(1 - \sigma)\,\varepsilon_{12}$$

Для доказательства этого факта достаточно в неравенство (4) в качестве χ подставить $\omega + \omega_0$, где $\omega_0 \in C_0{}^\infty(\Omega)$ — произвольная функция.

Выпишем далее формулы для момента и перерезывающей силы

$$M(u_3) = \sigma\Delta u_3 + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} \tag{6}$$

$$T(u_3) = -\frac{\partial}{\partial n}\Delta u_3 - (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial^2 u_3}{\partial n\partial\tau}$$

Здесь $\tau = (-n_2, n_1)$ — вектор, касательный к Γ. Введем также билинейную форму, участвующую в представлении функционала энергии $\Pi(\omega)$

$$B(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega}\{\varphi_{x_1x_1}\psi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2}\psi_{x_2x_2} + \sigma(\varphi_{x_1x_1}\psi_{x_2x_2} + \varphi_{x_2x_2}\psi_{x_1x_1}) + \tag{7}$$

$$+ 2(1-\sigma)\varphi_{x_1x_2}\psi_{x_1x_2}\}\, dx$$

Формальное (в предположении достаточной регулярности решения) обоснование того, что на Γ_0 будут выполнены краевые условия (1), (2), можно получить используя формулы Грина для бигармонического оператора и оператора плоской задачи теории упругости.

Краевым условиям (1), (2) можно придать точный математический смысл. Для этого необходимо воспользоваться теоремами о следах. Из первого уравнения (5) следует, что $\Delta^2 u_3 \in L^2(\Omega)$. Кроме того, из принадлежности u_3 пространству $H^2(\Omega)$ на границе Γ имеем $u_3 \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\partial u_3/\partial n \in H^{1/2}(\Gamma)$. Согласно работе [6], для элементов пространства $\{w \in H^2(\Omega) \mid \Delta^2 w \in L^2(\Omega)\}$ можно определить $M(w) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $T(w) \in \in H^{-3/2}(\Gamma)$, причем справедлива обобщенная формула Грина

$$B(w, \psi) = \langle\Delta^2 w, \psi\rangle + \langle T(w), \psi\rangle_{3/2} + \left\langle M(w), \frac{\partial\psi}{\partial n}\right\rangle_{1/2},\ \forall\psi \in H^2(\Omega) \tag{8}$$

Здесь $H^{-s}(\Gamma)$ — пространство, топологически сопряженное к пространству $H^s(\Gamma)$, скобки $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_s$ означают двойственность между $H^{-s}(\Gamma)$ и $H^s(\Gamma)$. Необходимые для справедливости этого результата условия на граничные операторы M, T проверены в [7]. Так что величина $u_3 T(u_3)$ в (1) допускает точную интерпретацию.

Из уравнений (5) следует, что $\partial N_{ij}/\partial x_j \in L^2(\Omega)$. Как показано в [8], для функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, удовлетворяющих включениям φ, $\operatorname{div}\varphi \in L^2(\Omega)$, на границе можно определить $\varphi_i n_i \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Поэтому $N_{ij}n_j \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Отсюда получаем $N_n \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Учитывая включение $U_n \in H^{1/2}(\Gamma)$, произведению $U_n N_n$ в (2) также можно придать точный смысл.

Ниже на подмножествах границы $\Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$ строятся неотрицательные меры μ_1, μ_2, характеризующие реакцию штампа на оболочку. Мера μ_2 характеризует реакцию штампа в плоскости x_1x_2 по направлению нормали к границе, а μ_1 — в направлении, ортогональном срединной поверхности оболочки.

Введем в рассмотрение пространство $C_0(\Gamma_0)$ финитных непрерывных на Γ_0 функций со следующей сходимостью. Считаем, что $\varphi_n \to \varphi$, если φ_n сходятся к φ равномерно и носители всех φ_n принадлежат фиксированному компакту $B \subset \Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$.

Теорема 1. На σ-алгебре борелевских подмножеств границы $\Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$ можно определить неотрицательные меры μ_1, μ_2, для которых справедливо представление

$$\langle \Pi'(\omega),\ \chi\rangle = \int_{\Gamma_0} v_3\, d\mu_1 - \int_{\Gamma_0} V_n\, d\mu_2, \quad \forall\chi = (V,\ v_3) \in H(\Omega) \cap C_0(\Gamma_0) \tag{9}$$

Доказательство. Прежде всего отметим такой факт. Пусть $\chi_0 = (0,\ 0,\ v_3) \in H(\Omega)$ и $v_3 \geqslant 0$ на Γ_0. Тогда

$$\langle \Pi'(\omega)),\ \chi_0\rangle \geqslant 0 \tag{10}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно в неравенство (4) в качестве χ подставить функцию $\omega + \chi_0$. Пусть далее $v_3 \in H_{\Gamma_1}{}^2(\Omega) \cap C_0(\Gamma_0)$ и $v_3{}^*$ — след этой функции на Γ_0. Линейное многообразие всех таких функций на Γ_0 обозначим V. Определим линейный функционал на V формулой

$$L(v_3{}^*) = \langle \Pi'(\omega),\ \chi\rangle,\ \chi = (0{,}0,\ v_3)$$

Этой формулой функционал L определен однозначно. Действительно. Если $v_3{}^{1*} = v_3{}^{2*}$, то согласно (10) имеем $L(v_3{}^{1*}) = L(v_3{}^{2*})$. Выберем далее произвольный элемент $v_3{}^* \in C_0{}^2(\Gamma_0)$; $C_0{}^2(\Gamma_0)$ — пространство финитных на Γ_0 функций, имеющих две непрерывные производные. Функцию $v_3{}^*$ можно продолжить нулем на всю границу Γ, а затем продолжить внутрь области Ω так, чтобы она стала функцией класса $H_{\Gamma_1}{}^2(\Omega)$. Это означает, что линеал V содержит все функции из $C_0{}^2(\Gamma_0)$. Функционал L по непрерывности продолжается на $C_0(\Gamma_0)$. В то же время произвольный линейный положительный функционал на $C_0(\Gamma_0)$ определяется мерой

$$L(v_3{}^*) = \int_{\Gamma_0} v_3{}^*\, d\mu_1$$

Для функции $\chi \in H(\Omega) \cap C_0(\Gamma_0)$ вида $(0,\ 0,\ v_3)$ это означает справедливость представления

$$\langle \Pi'(\omega),\ \chi\rangle = \int_{\Gamma_0} v_3\, d\mu_1 \tag{11}$$

Заметим далее, что второе и третье уравнения (5) с краевыми условиями (2) — аналог двумерной задачи Синьорини. Тот факт, что усилия N_{ij} зависят от прогиба u_3 и кривизн k_{11}, k_{22}, не принципиален. Поэтому построение меры μ_2 можно провести аналогично [3]. Следовательно, для любой функции $\chi \in H(\Omega) \cap C_0(\Gamma_0)$ вида $\chi = (v_1,\ v_2,\ 0)$ справедливо равенство

$$\langle \Pi'(\omega),\ \chi\rangle = -\int_{\Gamma_0} V_n\, d\mu_2, \quad V = (v_1,\ v_2) \tag{12}$$

В силу аддитивности из (11), (12) получаем представление (9).

Построенные меры принимают конечные значения на всех компактах $B \subset \Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$. Свойства меры μ_2 зависят, главным образом, от регулярности функции U. В частности, имеющиеся результаты о гладкости решения задачи Синьорини позволяют доказать абсолютную непрерывность меры μ_2 относительно меры Лебега на $\Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$. А именно, для произвольной точки $x \in \Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$ существует окрестность Ω_0, такая, что $U \in H^2(\Omega_0 \cap \Omega)$. Плотность меры μ_2 оказывается равной $-N_n$, причем

$N_n \in H^{1/2}_{loc}(\Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0)$. Что же касается меры μ_1, то ее свойства определяются гладкостью функции u_3.

Теорема 2. Для произвольной точки $x^0 \in \Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$ существует окрестность Ω_0, такая, что $u_3 \in H^3(\Omega_0, \cap\, \Omega)$.

Доказательство. Поместим начало координат в точку x°, считая, что направление оси x_2 совпадает с направлением внешней нормали к границе Г. Для простоты пока предположим, что вблизи x° участок границы Γ_0 прямолинейный. Положим

$$d_\tau h(x) = \tau^{-1}[h(x + \tau e_1) - h(x)], \quad \Delta_\tau = -d_{-\tau} d_\tau$$

Здесь $\tau > 0$, e_1 — единичный орт оси x_1. Обозначим R_δ круг радиуса δ с центром в точке x°. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(R_\delta)$, $\varphi \equiv 1$ на $R_{\delta/2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, а $r < \delta/2$. Тогда функция $u_{3\tau} = u_3 + {}^1/_2\tau^2\varphi^2\Delta_\tau u_3$ удовлетворяет неравенству $u_{3\tau} \geqslant 0$ на Γ_0. Действительно, считая параметр δ достаточно малым, имеем при $x \in \Gamma_0$

$$u_{3\tau}(x) = (1 - \varphi^2(x))u_3(x) + {}^1/_2\varphi^2(x)\,(u_3(x + \tau e_1) + u_3(x - \tau e_1)) \geqslant 0$$

Это означает, что $(u_1, u_2, u_{3\tau}) \in K$. Подставим функцию $(u_1, u_2, u_{3\tau})$ в качестве пробной в неравенство (4). Получим

$$B(u_3, \varphi^2\Delta_\tau u_3) - \langle f_3 - k_{11}N_{11} - k_{22}N_{22}, \varphi^2\Delta_\tau u_3\rangle \geqslant 0 \tag{13}$$

Справедлива следующая цепочка, разность между двумя последовательными членами которой либо равна нулю, либо оценивается сверху величиной, содержащейся в правой части полученного ниже неравенства (14):

$$B(u_3, \varphi^2\Delta_\tau u_3) \to B(\varphi u_3, \Delta_\tau\varphi u_3) \to B(\varphi u_3, -d_{-\tau}d_\tau\varphi u_3) \to$$
$$\to -B(d_\tau\varphi u_3, d_\tau\varphi u_3)$$

Оценка второго слагаемого в (13) осуществляется проще. Таким образом, из (13) следует

$$\| d_\tau(\varphi u_3)\|_2^2 \leqslant c\,\{\|f_3\|_0^2 + \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2 + \|u_3\|_2^2 + \|d_\tau(\varphi u_3)\|_2\|u_3\|_2\} \tag{14}$$

Постоянная c здесь не зависит от τ. Отсюда получаем ограниченность $\|d_\tau(\varphi u_3)\|_2$ равномерно по τ. Это означает, что все третьи прозводные от u_3, за исключением $\partial^3 u_3/\partial x_2^3$, принадлежат $L^2(R_{\delta/2} \cap \Omega)$. Первое уравнение (5) запишем в виде

$$\partial^4 u_3/\partial x_2^4 = g \tag{15}$$

Из доказанного следует, что $g \in H^{-1}(R_{\delta/2} \cap \Omega)$. В то же время из принадлежности u_3 пространству $H^2(\Omega)$ имеем $\partial^3 u_3/\partial x_2^3 \in H^{-1}(R_{\delta/2} \cap \Omega)$. Вместе с уравнением (15) это дает $\partial^3 u_3/\partial x_2^3 \in L^2(R_{\delta/2} \cap \Omega)$, что и доказывает теорему в данном случае. Здесь использован следующий факт. Если φ, $\varphi_{x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, то $\varphi \in L^2(\Omega)$ (см. [9]). Если участок Γ_0 вблизи точки x° не прямолинейный, то можно произвести замену переменных с единичным якобианом: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - \alpha(x_1)$. Здесь $x_2 = \alpha(x_1)$ — уравнение границы вблизи точки x°. Характер проводимых в этом случае рассуждений аналогичен приведенным выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
2. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 329—337.
3. *Хлуднев А. М.* К проблеме контакта линейного упругого тела с упругими и жесткими телами (вариационный подход).— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 999—1005.
4. *Caffarelli L. A., Friedman A.* The obstacle problem for the biharmonic operator.— Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1979, ser. 4, v. 6, p. 151—184.
5. *Хлуднев А. М.* Вариационный подход к проблеме контакта пологой оболочки с жестким телом.— В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С. Л. Соболева, № 2). Новосибирск: Изд-е Ин-та математики СО АН СССР, 1981, с. 109—114.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
7. *John O., Naumann J.* On regularity of variational solutions of the von Kárman equations.— Math. Nachr., 1976, v. 71, p. 23—36.
8. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
9. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
30.IX.1985