

УДК 539.374

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА НАГРУЖЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ

Быковцев Г. И., Цветков Ю. Д.

Рассматривается общий подход к решению задач о нахождении упругопластических границ при растяжении плоскости, ослабленной отверстием. Изучается распространение пластической области в плоскости в процессе ее нагружения, когда часть контура отверстия находится в упругой зоне. Разработан метод переноса условий сопряжения решений с упругопластической границы на контур отверстия, что позволило свести определение упругопластической границы к решению последовательности краевых задач теории упругости. Анализируется возможность применения развитого метода к задаче об одноосном растяжении упругопластической плоскости, ослабленной круговым отверстием.

Методом возмущений решены многие упругопластические задачи, в которых весь контур тела охвачен пластической областью [1, 2]. Если пластическое течение начинается с некоторой точки контура тела, то этот метод требует определенной модификации [3]. Точное решение задачи о двухосном растяжении упругопластической плоскости, ослабленной круговым отверстием, получено в работе [4].

1. Рассматривается плоское деформированное состояние нагруженной упругопластической плоскости, ослабленной цилиндрическим отверстием с образующими параллельными оси x_3 . Пусть L — контур отверстия в плоскости x_1x_2 .

В упругой и пластической областях плоскости справедливы уравнения равновесия, которые при отсутствии массовых сил будут иметь вид

$$(1.1) \quad \sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0$$

Полагается, что граница отверстия свободна от нагружения, а на бесконечности параллельно осям x_1 и x_2 декартовой прямоугольной системы координат к плоскости приложены усилия P_1 и P_2 соответственно ($P_2 \gg P_1$)

$$(1.2) \quad \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta |_L = \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta |_L = 0, \quad \sigma_{11}^\infty = P_1, \sigma_{22}^\infty = P_2$$

где n_α, t_α ($\alpha = 1, 2$) — компоненты единичных векторов нормали и касательной к контуру отверстия.

Решение рассматриваемой задачи в упругой области можно найти по формулам Колосова—Мусхелишвили [5]

$$(1.3) \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — некоторые аналитические функции аргумента $z = x_1 + ix_2$.

Напряжения, возникающие в пластических областях плоскости, удовлетворяют условию пластичности Треска

$$(1.4) \quad s_{\alpha\beta}s_{\alpha\beta} = k^2; \quad s_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \sigma\delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma = \sigma_{\alpha\alpha}/2$$

Если φ — угол между первым главным напряжением и осью x_1 , то при учете (1.4) связь между компонентами напряжения и главными напряжениями в пластической области такова [1]:

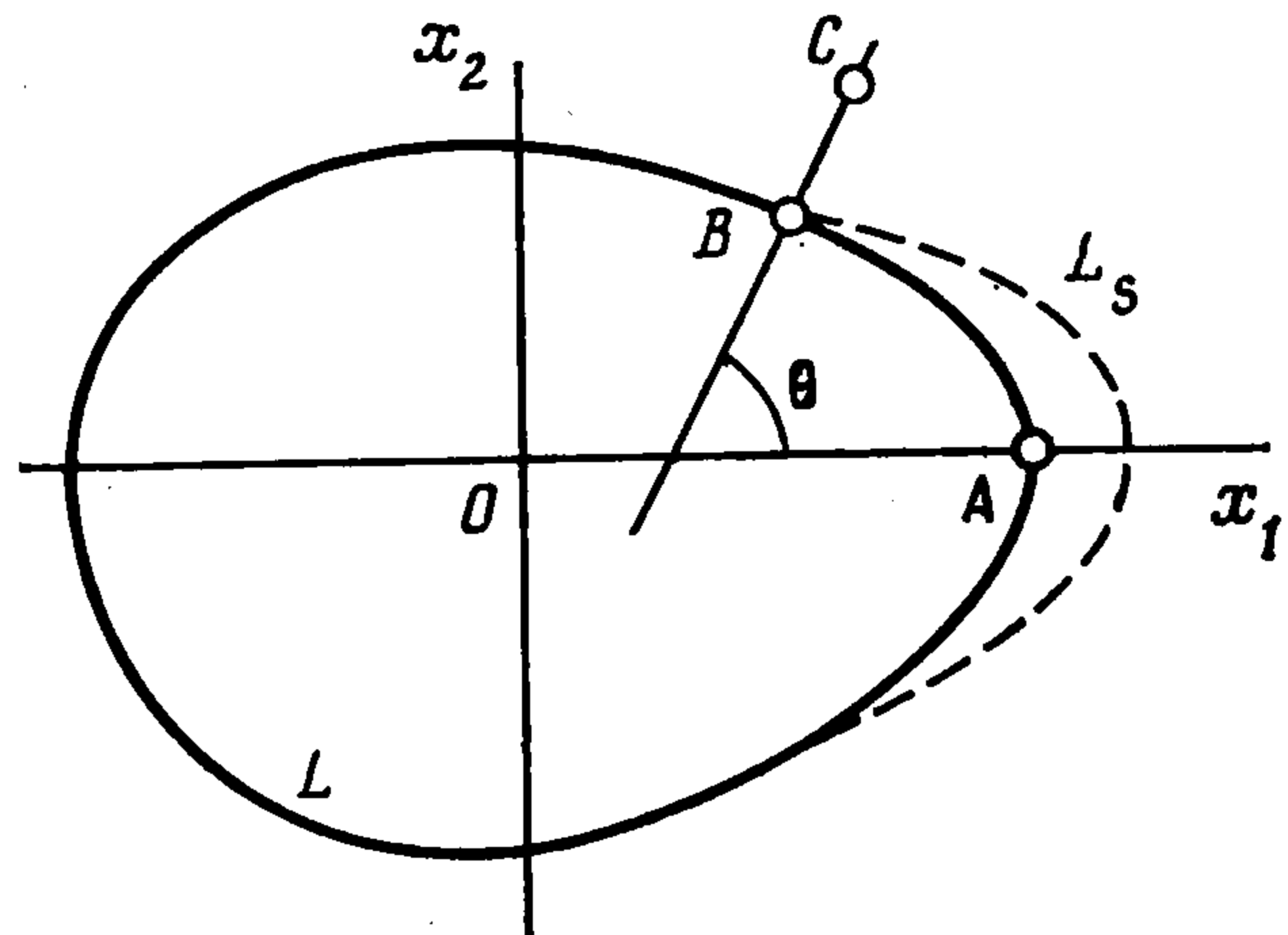
$$(1.5) \quad \left. \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{matrix} \right\} = \sigma \pm k \cos 2\varphi, \quad \sigma_{12} = k \sin 2\varphi, \quad k = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

На границе упругой и пластической областей L_s полагается выполнение условия непрерывности компонент напряжения

$$(1.6) \quad [\sigma_{\alpha\beta}]|_{L_s} = 0$$

Соотношения (1.1) — (1.6) полностью определяют напряженное состояние плоскости с отверстием при двухосном ее растяжении.

2. Пусть при некоторых значениях растягивающих усилий $P_1 = P_{10} = \text{const}$, $P_2 < P_{20}$ плоскость, ослабленная отверстием, находится в упругом состоянии, а при $P_2 = P_{20}$ найдется хотя бы одна точка A контура L , в которой будет выполняться условие (1.4). На фиг. 1 декартова прямоугольная система координат изображена так, что ось x_1 проходит через эту точку перпендикулярно касательной, проведенной к L в точке A . При $P_2 > P_{20}$ около этой точки образуется пластическая зона.



Фиг. 1

Уравнение границы L_s в параметрической форме можно записать в виде

$$(2.1) \quad x_\alpha(\theta) = x_\alpha^{(0)}(\theta) + r(\theta) n_\alpha$$

где θ — угол наклона единичной нормали, проведенной к контуру L , к оси x_1 , $x_\alpha^{(0)}(\theta)$ ($\alpha = 1, 2$) — координаты точек контура L , $r(\theta)$ — величина отрезка вдоль нормали к границе L с началом на L .

С учетом (2.1) условие сопряжения решений (1.6) можно записать в виде

$$(2.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m}{m!} \frac{\partial^m \sigma_{\alpha\beta}^e}{\partial n^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \frac{\partial^k \sigma_{\alpha\beta}^p}{\partial n^k} \quad \text{на } L$$

где $\sigma_{\alpha\beta}^e$ и $\sigma_{\alpha\beta}^p$ — компоненты напряжений в упругой и пластической областях соответственно.

Таким образом, граничные условия (1.2), (2.2) совместно с равенствами (1.5) дают возможность решить уравнения равновесия и определить компоненты напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^e$, $\sigma_{\alpha\beta}^p$, а также неизвестную функцию $r(\theta)$.

Пусть $P_1 = P_{10} = 0$, а величина растягивающего усилия $P_2 = P$ изменяется с ростом некоторого малого параметра ε

$$(2.3) \quad P = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i P_i, \quad P_0 = P_{20}$$

Поскольку положение границы L_s зависит от величины P , то естественно искать ее в виде

$$(2.4) \quad x_\alpha = x_\alpha^{(0)} + n_\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i r_i$$

Компоненты напряжения в упругой области при $P > P_0$ представляются в форме

$$(2.5) \quad \sigma_{\alpha\beta}^e = \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_{\alpha\beta}^{(i)}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$ — компоненты напряжения, соответствующие растягивающему усилию P_0 .

Обозначим $x_\alpha^{(0)}(\theta_*)$ координаты точек пересечения границы L_s при $P > P_0$ с контуром отверстия L . Если процесс внешнего нагружения достаточно гладкий, а переход упругой работы материала плоскости к пластической плавный, то можно предположить, что угол θ_* охвата пластической зоной контура L будет величиной порядка ε .

В криволинейных ортогональных координатах x и y уравнения равновесия (1.1) запишутся в виде

$$(2.6) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + H \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 2 \frac{\tau_{xy}}{R} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + H \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{R} = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_{xx}, \quad \sigma_y = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy} = \tau_{xy}, \quad H = 1 + y/R$$

Здесь за координату x выбрана длина дуги AB контура L (фиг. 1), а за координату y — длина нормали BC .

Компоненты напряжения (1.5) в пластической зоне в новой системе координат представляются в виде

$$(2.7) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_y \\ \sigma_x \end{array} \right\} = \sigma \pm k \cos 2(\varphi - \theta), \quad \tau_{xy} = k \sin 2(\varphi - \theta)$$

В дальнейшем при переходе от системы координат x_1x_2 к системе xy угол φ необходимо заменить на угол $\varphi - \theta$, сохраняя за ним прежнее обозначение.

Внося соотношения (2.7) в уравнения (2.6), после преобразований получим

$$(2.8) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{R} \right) \sin 2\varphi - H \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos 2\varphi \right] = 0$$

$$H \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2k \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{R} \right) \cos 2\varphi + H \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin 2\varphi \right] = 0$$

В принятых обозначениях уравнение упругопластической границы (2.4) запишется так:

$$(2.9) \quad x = x^{(0)}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i r_i = \varepsilon \bar{r}$$

Уравнения равновесия справедливы всюду в упругой области, включая и границу L_s , а следовательно, используя соотношения (2.5) и (2.9), уравнения (2.6) можно представить в форме

$$(2.10) \quad \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^{m+1} \sigma_x^{(k)}}{\partial x \partial y^m} + \left(1 + \frac{\varepsilon \bar{r}}{R} \right) \frac{\partial^{m+1} \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y^{m+1}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2}{R} \frac{\partial^m \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y^m} \right] \varepsilon^{m+k} \bar{r}^m \right\} \Big|_L = 0$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^{m+1} \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x \partial y^m} + \left(1 + \frac{\varepsilon \bar{r}}{R} \right) \frac{\partial^{m+1} \sigma_y^{(k)}}{\partial y^{m+1}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^m \sigma_y^{(k)}}{\partial y^m} - \frac{\partial^m \sigma_x^{(k)}}{\partial y^m} \right) \right] \varepsilon^{m+k} \bar{r}^m \right\} \Big|_L = 0$$

Уравнения (2.8) справедливы всюду в пластической области, включая границу L_s .

Следствием предположения о порядке малости величины угла θ_* охвата пластической областью контура L можно считать следующее равенство

$$(2.11) \quad x_*^{(0)} = o(\varepsilon)$$

Учитывая соотношения (2.7) и (2.9), запишем уравнения (2.8) с точностью $O(\varepsilon)$ в виде

$$(2.12) \quad \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} \Big|_L = 0, \quad \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{R} \right) \right\} \Big|_L = 0$$

Вдоль свободного от внешней нагрузки контура L величина σ постоянна, откуда, учитывая условие пластичности, заключаем

$$(2.13) \quad \sigma \Big|_L = k$$

Из условия постоянства угла φ вдоль ненагруженного контура отверстия вытекает

$$(2.14) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_L = 0$$

Согласно выражениям (2.13), (2.14), уравнения (2.12) с точностью $O(\varepsilon)$ принимают вид

$$(2.15) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_L = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} \Big|_L = 2k/R$$

С учетом (2.9) и (2.15) компоненты напряжения вдоль границы L , со стороны пластической области с точностью $O(\varepsilon^2)$ можно записать следующим образом:

$$(2.16) \quad \sigma_y = \varepsilon 2kr_1/R, \quad \sigma_x = 2k + \varepsilon 2kr_1/R, \quad \tau_{xy} = 0$$

Принимая во внимание (2.5), (2.9) и (2.16), условие сопряжения решений (1.6) в системе координат xy с точностью $O(\varepsilon^2)$ перепишем в виде равенств

$$(2.17) \quad \sigma_y^{(1)} \Big|_L = -r_1 \left(\frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y} \Big|_L - \frac{2k}{R} \right), \quad (\sigma_x^{(0)} \Big|_L - 2k) + \varepsilon G_x^{(1)} \Big|_L = \\ = -\varepsilon r_1 \left(\frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial y} \Big|_L - \frac{2k}{R} \right), \quad \tau_{xy}^{(1)} \Big|_L = -r_1 \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} \Big|_L$$

Рассмотрим слагаемое $F(x) = \sigma_x^{(0)} \Big|_L - 2k$, входящее в левую часть второго равенства (2.17). По предположению, сделанному выше, при $P = P_0$ в точке A контура L реализуется пластическое состояние. В той же точке $\sigma_x^{(0)}$ принимает на L свое максимальное значение, т. е.

$$(2.18) \quad F(0) = (\sigma_x^{(0)} - 2k) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

С учетом этих равенств ряд Тейлора для функции $F(x)$ в окрестности точки A можно записать в виде

$$(2.19) \quad F(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial x^m} \Big|_{x=0} x^m = o(\varepsilon^2)$$

так как x в соотношении (2.19) лежит на дуге $[0; x_*^{(0)}]$.

Для определения порядка малости других величин, входящих в краевые условия (2.17), необходимо рассмотреть уравнения (2.10) для нулевых приближений ($\varepsilon = 0$)

$$(2.20) \quad \left\{ \frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} \right\} \Big|_L = 0, \quad \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y} \right\} \Big|_L = \frac{2k}{R}$$

Из первого соотношения (2.18) и предположения (2.11) следует $\frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial x} \Big|_L = o(\varepsilon)$, откуда согласно первому уравнению (2.20) $\frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} \Big|_L = o(\varepsilon)$. Так как боковая поверхность цилиндрического отверстия свободна от нагружения, то справедливо равенство $\frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial x} \Big|_L = 0$, с учетом которого из второго уравнения (2.20) получим $\frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y} \Big|_L - 2k/R = o(\varepsilon)$.

Таким образом, краевые условия (2.17) с точностью $O(\varepsilon)$ запишутся в виде

$$(2.21) \quad \sigma_y^{(1)}|_L = 0, \quad \sigma_x^{(1)}|_L = -r_1 \left(\frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial y} - \frac{2k}{R} \right) \Big|_L, \quad \tau_{xy}^{(1)}|_L = 0$$

Первое и третье условия (2.21) совместно с условием на бесконечности определяют напряженное состояние материала плоскости в упругой области

$$\sigma_x^{(1)} = h\sigma_x^{(0)}, \quad \sigma_y^{(1)} = h\sigma_y^{(0)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = h\tau_{xy}^{(0)}, \quad h = \text{const}$$

Подстановка этих решений во второе краевое условие (2.21) дает

$$(2.22) \quad r_1 = 2kh \left(\frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial y} \Big|_L - \frac{2k}{R} \right)^{-1} = \text{const} + O(\varepsilon)$$

Из сопоставления соотношений (2.11) и (2.22) вытекает

$$(2.23) \quad r_1 = P_1 = h = 0$$

Таким образом, при сделанном допущении (2.11) относительно порядка малости $x_*^{(0)}$ разложение искомым решений в ряд по малому параметру начинается со второй степени ε .

Без ограничения общности можно положить

$$(2.24) \quad P = P_0 (1 + \varepsilon^2)$$

тем самым определив малый параметр нагружения, который во всех предыдущих разложениях был неопределенным.

Используя соотношения (2.23) и проводя рассуждения, аналогичные проведенным ранее, компоненты тензора напряжения вдоль L_s со стороны пластической области с точностью $O(\varepsilon^3)$ можно записать в виде

$$\sigma_y = \varepsilon^2 2kr_2/R, \quad \sigma_x = 2k + \varepsilon^2 2kr_2/R, \quad \tau_{xy} = 0$$

С учетом этих равенств условие сопряжения решений (1.6) с точностью $O(\varepsilon^3)$ запишем в форме

$$(2.25) \quad \sigma_y^{(2)}|_L = 0, \quad \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} (\sigma_x^{(0)} - 2k) + \sigma_x^{(2)} \right\} \Big|_L = -r_2 \left(\frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial y} - \frac{2k}{R} \right) \Big|_L, \\ \tau_{xy}^{(2)}|_L = 0$$

Первое и третье граничные условия (2.25) совместно с (2.24) определяют напряженное состояние материала плоскости в упругой зоне

$$\sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(0)}, \quad \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{(0)}, \quad \tau_{xy}^{(2)} = \tau_{xy}^{(0)}$$

Второе условие (2.25) позволяет найти функцию

$$r_2 = \left(\frac{\sigma_x^{(0)}|_L - 2k}{\varepsilon^2} + \sigma_x^{(2)}|_L \right) \left(\frac{2k}{R} - \frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial y} \Big|_L \right)^{-1}$$

Таким образом, с учетом сделанных допущений задачу об одноосном растяжении упругопластической плоскости, ослабленной цилиндрическим отверстием, можно свести к совокупности краевых задач теории упругости. Граничные условия для последовательности упругих задач определяются при помощи условия сопряжения решений на L_s . В общем виде они могут быть записаны следующим образом:

$$(2.26) \quad \sigma_y^{(i+1)}|_L = f_1^{(i+1)}(r_i, \varepsilon, x) \\ \sigma_x^{(i+1)}|_L = f_2^{(i+1)}(r_{i+1}, \varepsilon, x) \\ \tau_{xy}^{(i+1)}|_L = f_3^{(i+1)}(r_i, \varepsilon, x), \quad i = 2, 3, \dots \\ \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(0)}, \quad \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{(0)}, \quad \tau_{xy}^{(2)} = \tau_{xy}^{(0)}$$

Первое и третье граничные условия (2.26) определяют напряженное состояние материала плоскости при решении соответствующей упругой задачи; при помощи второго граничного условия находится искомая функция r_{i+1} .

На построенное решение рассматриваемой задачи накладывается ограничение, являющееся следствием статической определенности данной задачи: каждый пластический элемент плоскости должен быть соединен с контуром отверстия линиями скольжения, целиком лежащими в пластической зоне.

Отметим также, что введенные выше разложения в ряд по малому параметру нагружения не являются разложениями в ряд Тейлора, так как не учитывают зависимость $x_*^{(0)}$ от ε , т. е. построенные разложения формальные. Оправданием такого разложения служат следующие соображения: в упругой и пластической областях получающиеся решения удовлетворяют теории упругости и пластичности, а также краевым условиям; приближенно выполняются только условия на упругопластической границе, поэтому в рассмотренном ниже примере для построенного решения были численно определены разности напряжений на границе L_s .

3. Рассматривается задача о двухосном растяжении плоскости, ослабленной круговым отверстием единичного радиуса. Решение упругой задачи с граничными условиями (1.2) при $P_1 = P_{10}$, $P_2 = P_{20}$ ($P_{20}/P_{10} \geq 1$) ищется при помощи формул (1.3) и будет таким [5]:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r^{(0)} &= \frac{1}{2} A \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{2} B \left(1 + 3 \frac{1}{r^4} - 4 \frac{1}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta^{(0)} &= \frac{1}{2} A \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2} B \left(1 + 3 \frac{1}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}^{(0)} &= \frac{1}{2} B \left(1 + 2 \frac{1}{r^2} - 3 \frac{1}{r^4}\right) \sin 2\theta; \quad A = P_{20} + P_{10}, \\ &B = P_{20} - P_{10} \end{aligned}$$

Пусть условия на бесконечности заданы в виде

$$(3.2) \quad \sigma_{11}^\infty = P_{10} (1 + \alpha \varepsilon^2), \quad \sigma_{22}^\infty = P_{20} (1 + \varepsilon^2), \quad \alpha \in [0, 1]$$

При $P_2 = P_{20}$, $P_1 = P_{10}$ ($3P_{20} - P_{10} = 2k$) в двух точках контура L с координатами $(1, 0)$, $(1, \pi)$ напряжения (3.1) удовлетворяют условию пластичности (1.4). При $P_2 > P_{20}$ (3.2) вокруг этих точек образуются пластические области, в которых компоненты напряжения определяются равенствами [1]

$$(3.3) \quad \sigma_r^p = 2k \ln r, \quad \sigma_\theta^p = 2k + \sigma_r^p, \quad \tau_{r\theta}^p = 0$$

Уравнение границы L_s (2.4) с учетом соотношений (2.23) в полярных координатах запишем в виде

$$(3.4) \quad r_s = 1 + \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 r_3 + O(\varepsilon^4)$$

Угол θ_* охвата пластической областью контура отверстия определяется из условия

$$(3.5) \quad r_s(\varepsilon, \theta_*) = 1, \quad \sin \theta_* = o(\varepsilon)$$

Согласно (3.3), (3.4), компоненты напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^p$ вдоль упругопластической границы будут следующими:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma_r^p|_{L_s} &= 2k [\varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 r_3 + O(\varepsilon^4)], \quad \sigma_\theta^p|_{L_s} = 2k [1 + \varepsilon^2 r_2 + \\ &+ \varepsilon^3 r_3 + O(\varepsilon^4)], \quad \tau_{r\theta}^p|_{L_s} = 0 \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения (2.5), (3.4), (3.6), условия сопряжения решений (1.6) можно записать в виде

$$(3.7) \quad \left\{ \sigma_r^{(0)} + \varepsilon^2 \left(\sigma_r^{(2)} + \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} r_2 \right) + \varepsilon^3 \left(\sigma_r^{(3)} + \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} r_3 \right) + O(\varepsilon^4) \right\} \Big|_{L_*} = \\ = 2k [\varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 r_3 + O(\varepsilon^4)] \\ \left\{ \sigma_\theta^{(0)} + \varepsilon^2 \left(\sigma_\theta^{(2)} + \frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial r} r_2 \right) + \varepsilon^3 \left(\sigma_\theta^{(3)} + \frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial r} r_3 \right) + O(\varepsilon^4) \right\} \Big|_{L_*} = \\ = 2k [1 + \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 r_3 + O(\varepsilon^4)] \\ \left\{ r_{r\theta}^{(0)} + \varepsilon^2 \left(\tau_{r\theta}^{(2)} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} r_2 \right) + \varepsilon^3 \left(\tau_{r\theta}^{(3)} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} r_3 \right) + O(\varepsilon^4) \right\} \Big|_{L_*} = 0$$

где L_* — часть контура отверстия, находящаяся в пластической зоне.

Краевые условия для нахождения второго приближения решения уравнений (1.1) в упругой области определяются соотношениями (3.1), (3.2), (3.5), (3.7) и будут такими:

$$(3.8) \quad \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=1} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=1} = 0, \quad \sigma_{11}^\infty = \alpha P_{10}, \quad \sigma_{22}^\infty = P_{20} \\ \sigma_\theta^{(2)} \Big|_{r=1} - 4(P_{20} - P_{10})\varepsilon^{-2} \sin^2 \theta = 2r_2(5P_{20} - 3P_{10})$$

Решение поставленной задачи с первыми четырьмя краевыми условиями (3.8) имеет вид (3.1) при $A = P_{20} + \alpha P_{10}$, $B = P_{20} - \alpha P_{10}$. Из пятого условия (3.8) определяется неизвестная функция r_2 :

$$(3.9) \quad r_2 = \frac{s_0}{2s_2} - 2 \frac{s_1}{s_2} \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon^2}, \quad s_0 = 3P_{20} - \alpha P_{10}, \quad s_1 = P_{20} - P_{10}, \\ s_2 = 5P_{20} - 3P_{10}$$

Первое приближение $\theta_*^{(1)}$ для угла охвата пластической зоной контура L находится из уравнения (3.5) при учете (3.9)

$$(3.10) \quad \sin \theta_*^{(1)} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{s_0/s_1}$$

Краевые условия для определения третьего приближения решения рассматриваемой задачи согласно (3.2), (3.7) запишутся в виде

$$(3.11) \quad \sigma_r^{(3)} \Big|_{L_*} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(3)} \Big|_{L_*} = -8\kappa s_1 \varepsilon^{-1} \sin \theta, \quad \sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0, \\ \sigma_\theta^{(3)} \Big|_{L_*} = 2s_2 r_3, \quad \kappa = \text{sign}(\cos \theta)$$

На отрезке $[-\pi, \pi]$ $r_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=1}$ — нечетная функция. Ее разложение в ряд Фурье будет иметь вид

$$(3.12) \quad \tau_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=1} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \cos 2m\theta \\ b_{2m} = \frac{2}{\pi} \left\{ C \left[\frac{\sin(2m-1)\theta_*^{(1)}}{2m-1} - \frac{\sin(2m+1)\theta_*^{(1)}}{2m+1} \right] + \right. \\ \left. + D \left[\frac{\sin(2m-3)\theta_*^{(1)}}{2m-3} - \frac{\sin(2m+3)\theta_*^{(1)}}{2m+3} \right] \right\} \\ C = 4 \frac{s_1}{s_2} \left(3 \frac{s_1}{\varepsilon^3} - \frac{s_0}{\varepsilon} \right), \quad D = -4 \frac{s_1^2}{s_2 \varepsilon^3}$$

Решение уравнений (1.1) с краевыми условиями (3.11), (3.12) ищется при помощи формул (1.3), в которых функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ определяются равенствами [5]

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \frac{1}{z^{2m}}, \quad \Psi(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} (m+1) \frac{1}{z^{2m+2}}$$

И, следовательно, компоненты напряжения имеют вид

$$(3.13) \quad \sigma_r^{(3)} = - \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) b_{2m} \frac{1}{r^{2m}} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos 2m\theta$$

$$\sigma_{\theta}^{(3)} = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) b_{2m} \frac{1}{r^{2m}} \left(\frac{m-1}{m+1} - \frac{1}{r^2}\right) \cos 2m\theta$$

$$\tau_{r\theta}^{(3)} = - \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) b_{2m} \frac{1}{r^{2m}} \left(\frac{m}{m+1} - \frac{1}{r^2}\right) \sin 2m\theta$$

С учетом (3.5), (3.12), (3.13) из пятого граничного условия (3.11) определяем неизвестную функцию r_3

$$r_3 = \frac{8}{\pi} \frac{s_1^2}{s_2^2} \left[\frac{s_0}{s_1} \frac{\sin \theta_*^{(1)}}{\varepsilon} - \frac{4}{3} \frac{\sin^3 \theta_*^{(1)}}{\varepsilon^3} - 4 \frac{\sin \theta_*^{(1)} \sin^2 \theta}{\varepsilon^3} \right] + O(\varepsilon)$$

Второе приближение $\theta_*^{(2)}$ для угла охвата пластической областью контура L определяется соотношением

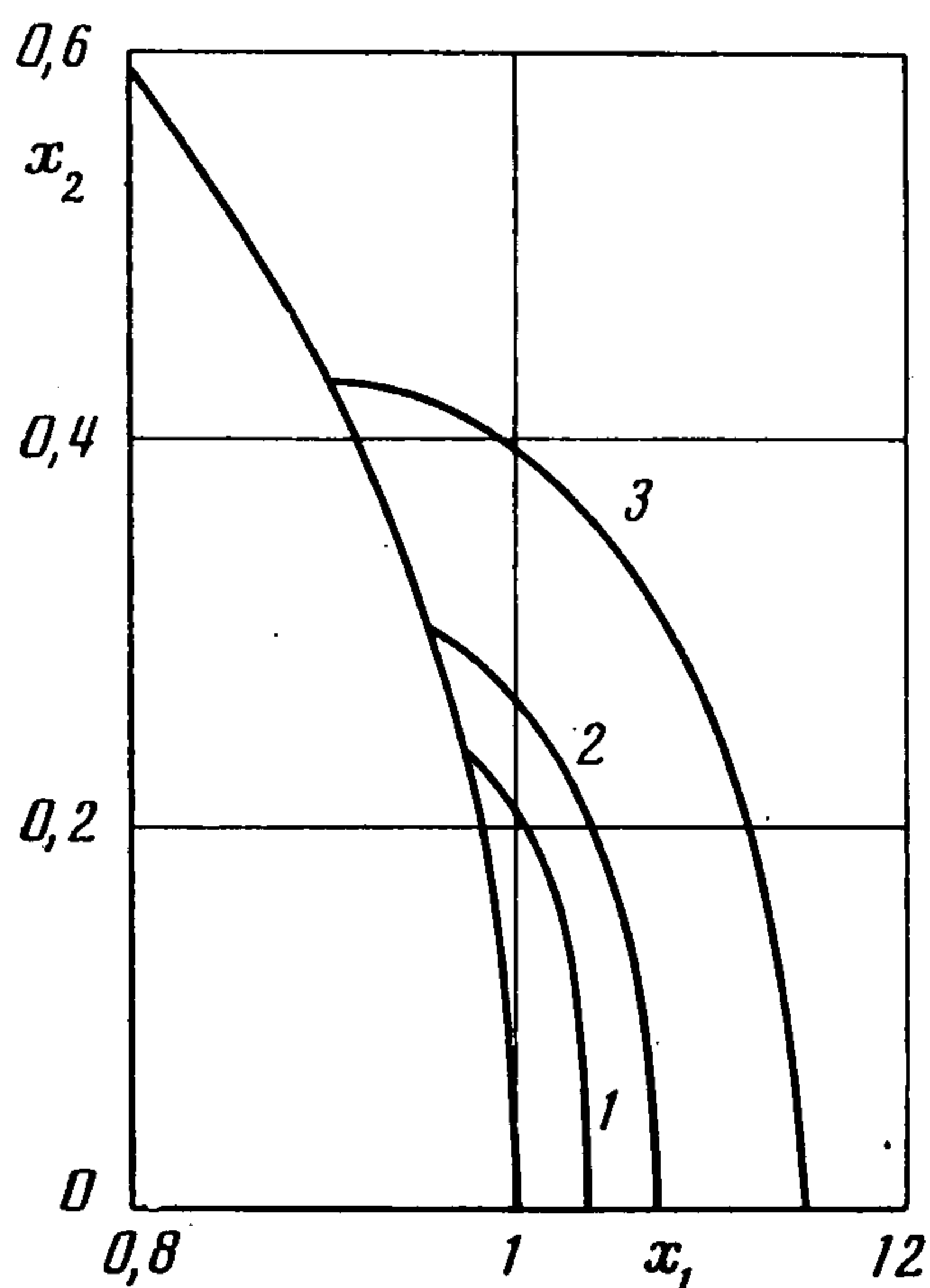
$$\sin \theta_*^{(2)} = \pm \left(\frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{\frac{s_0}{s_1}} - \varepsilon^2 \frac{2s_0}{3\pi s_2} \right)$$

В случае одноосного растяжения ($P_{10} = 0$) упругопластической плоскости с круговым отверстием имеем

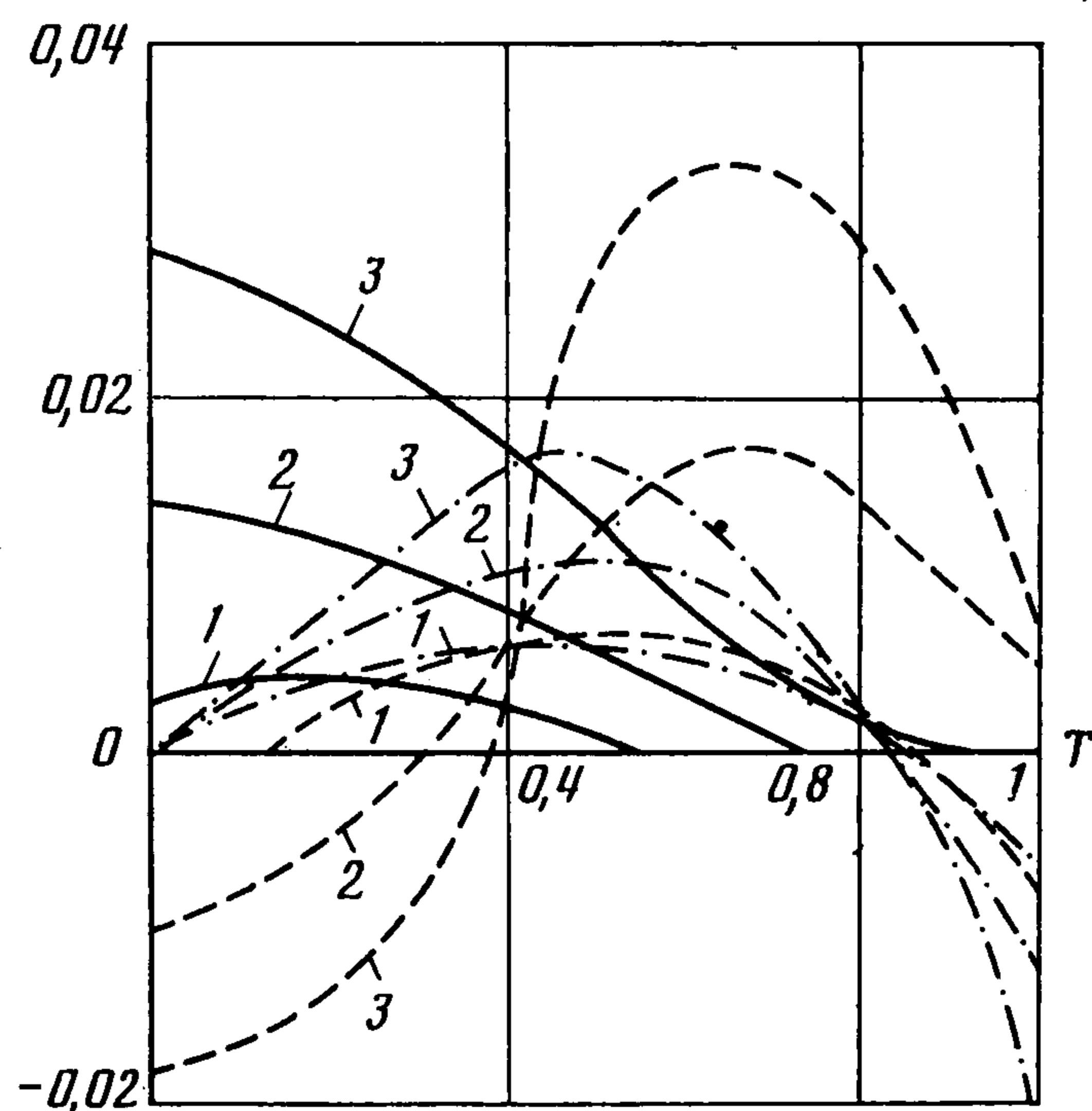
$$r_2 = \frac{1}{10} \left(3 - 4 \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon^2} \right), \quad \sin \theta_*^{(1)} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon$$

$$r_3 = \frac{8\sqrt{3}}{25\pi} \left(1 - 2 \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon^2} \right), \quad \sin \theta_*^{(3)} = \pm \left(\varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon^2 \frac{2}{5\pi} \right)$$

На фиг. 2 показано положение упругопластических границ L_s для случая одноосного растяжения плоскости с круговым отверстием, на



Фиг. 2



Фиг. 3

фиг. 3 даны графики зависимости $[\sigma_r]/2k$ (сплошные линии), $[\sigma_{\theta}]/2k$ (штриховые), $[\tau_{r\theta}]/2k$ (штрихпунктирные) от $T = \sin \theta / \sin \theta_*$ вдоль границы L_s при значениях малого параметра нагружения $\varepsilon = 0,3; 0,4; 0,6$ (кривые 1—3 соответственно).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ислев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
3. *Быковцев Г. И., Цветков Ю. Д.* Применение метода возмущений в теории кручения упругопластических стержней.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 932—939.
4. *Галин Л. А.* Плоская упругопластическая задача.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 367—386.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию
16.II.1986