

УДК 539.3 : 534

## ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПО ТОЛЩИНЕ ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖУЩИМИСЯ НАГРУЗКАМИ

Белоконь А. В., Наседкин А. В.

В трехмерной постановке изучаются задачи о движении с постоянной досейсмической скоростью осциллирующей нагрузки по границе изотропного неоднородного по толщине упругого слоя. Даются количественные оценки верхних границ для величин скорости движения и частоты колебаний нагрузки, при которых существует и единственно решение задачи в энергетических классах. В случаях, когда энергетического решения не существует, формулируются принципы выделения единственного решения и дается решение в дальнем поле. Приводятся результаты численных расчетов характеристик волнового поля в случае движения нормальной сосредоточенной нагрузки в однородном слое. Отмечаются ситуации, в которых в разных областях слоя распространяется различное число волн. Рассмотренные задачи представляют интерес для сейсмологии и при проектировании аэродромных покрытий.

1. Пусть упругая, изотропная, неоднородная по толщине среда заполняет область  $\Pi = (-\infty < x, y < +\infty; 0 \leq z \leq 1)$ , нижняя граница которой закреплена, т. е.

$$(1.1) \quad u(x, y, 0, t) = 0$$

Верхняя граница нагружена таким образом, что в подвижной системе координат

$$(1.2) \quad x_1 = x - wt, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad t = t$$

граничные условия имеют вид

$$(1.3) \quad \sigma^{3j}(x_1, x_2, 1, t) = f^j(x_1, x_2)e^{i\Omega t} \quad (x_1, x_2) \in S; \quad j = 1, 2, 3$$

Здесь  $S$  — ограниченная область, граница которой имеет в каждой точке непрерывно дифференцируемую кривизну. Предполагается, что вне  $S$  поверхность слоя не нагружена, а упругие постоянные материала подчинены условиям

$$\lambda(x_3), \mu(x_3) \in C_1(0, 1), \rho(x_3) \in C(0, 1); \quad \lambda, \mu, \rho \geq \delta_* > 0$$

Будем изучать установившийся в подвижной системе координат (1.2) режим движения, предполагая, что в (1.2) вектор перемещений имеет вид

$$(1.4) \quad u(x - wt, y, z, t) = v(x_1, x_2, x_3)e^{i\Omega t}$$

В этом случае система уравнений теории упругости принимает форму ( $\delta_{kj}$  — символ Кронекера)

$$(1.5) \quad (\lambda v_{m,m})_{,j} \delta_{kj} + (\mu(v_{k,j} + v_{j,k}))_{,j} - \rho w^2 v_{k,11} = \\ = -\rho \Omega^2 v_k - 2i\rho \Omega w v_{k,1}, \quad k = 1, 2, 3$$

Для удобства анализа постановка задачи дана в безразмерном виде. Переход к размерным параметрам осуществляется по формулам

$$x = \frac{x_d}{h}, \quad y = \frac{y_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \quad w = \frac{w_d}{c_{20d}}, \quad \Omega = \Omega_d \frac{h}{c_{20d}}, \quad t = t_d \frac{c_{20d}}{h} \\ \mu = \frac{\mu_d}{\mu_{0d}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_d}{\mu_{0d}}, \quad \sigma^{ij} = \frac{\sigma_d^{ij}}{\mu_{0d}}, \quad f^j = \frac{f_d^j}{\mu_{0d}}, \quad \rho = \frac{\rho_d}{\rho_{0d}}$$

$$u_k = \frac{u_{kd}}{h}, \quad v_k = \frac{v_{kd}}{h}$$

$$\rho_{0d} = \max \rho_d(z_d), \quad \mu_{0d} = \min \mu_d(z_d), \quad 0 \leq z_d \leq h; \quad c_{20d} = \sqrt{\mu_{0d}/\rho_{0d}}$$

где размерные величины (кроме толщины слоя  $h$ ) помечены индексом  $d$ .

Поставленную задачу при  $\Omega, w \neq 0$  будем называть задачей В. Случай  $\Omega = 0, w \neq 0$  соответствует задаче Б, а случай  $\Omega \neq 0, w = 0$  — задаче А. Для последней ради удобства дальнейших рассуждений будем вместо  $\Omega$  в (1.4) писать символ  $\omega$ .

Задачи Б и В для полупространства изучались в работах [1, 2]. Во взаимосвязи задачи А — В в трехмерной постановке исследовались для стратифицированных по глубине жидкости [3] и упругого полупространства<sup>1</sup>, а также для акустического слоя<sup>2</sup>. Близкие некоторым из излагаемых ниже вопросов рассматривались также в работах [4, 5], где изучались контактные задачи для анизотропного слоя.

Изучим вначале задачи А — В в энергетических классах.

**Определение 1.** Вектор-функцию  $\mathbf{v} \in H_{1\Pi}$  назовем обобщенным решением задач А — В, если для любых  $\varphi \in H_{1\Pi}$  она удовлетворяет интегральному тождеству

$$(1.6) \quad (\mathbf{v}, \varphi)_{H_{1\Pi}} - \int_{\Pi} \rho (wv_{k,1} - i\Omega v_k) (w\bar{\varphi}_{k,1} + i\Omega\bar{\varphi}_k) d\Pi = \\ = \int_S f^j(x_1, x_2) \bar{\varphi}_j(x_1, x_2, 1) dx_1 dx_2$$

Здесь  $H_{1\Pi}$  — пространство вектор-функций (вещественное в случае задачи Б), удовлетворяющих условию (1.1) и оставляющих конечной норму, порожденную скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \varphi)_{H_{1\Pi}} = \int_{\Pi} [2\mu \varepsilon_{mk}(\mathbf{v}) \varepsilon_{mk}(\bar{\varphi}) + \lambda v_{k,k} \bar{\varphi}_{j,j}] d\Pi$$

**Теорема 1.** Пусть

$$(1.7) \quad f^j(x_1, x_2) \in L_{ps}, \quad p > 4/3$$

Тогда существуют такие постоянные  $m, \omega_0$ , что при выполнении условий

$$(1.8) \quad \Omega < \omega_0, \quad w < (1 - \Omega/\omega_0) \sqrt{m/\rho_0}; \quad \rho_0 = \max_{x_3} \rho(x_3)$$

существует энергетическое решение задач А, Б, В.

Доказательство теоремы 1 проводится по аналогии с доказательством теоремы 2 из [6].

2. Для практических целей важно не только установить существование  $m$  и  $\omega_0$ , но и дать их количественную оценку. Для ее получения введем пространства  $H_B$  и  $H_{B_0}$ , причем скалярное произведение в них определим соответственно левой частью формулы (1.6) и выражением

$$(\mathbf{v}, \varphi)_{H_{B_0}} = \mu_0 \int_{\Pi} \left[ 2\varepsilon_{mk}(\mathbf{v}) \varepsilon_{mk}(\bar{\varphi}) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_0 v_{k,k} \bar{\varphi}_{j,j} \right] d\Pi - \\ - \rho_0 \int_{\Pi} (wv_{k,1} - i\Omega v_k) (w\bar{\varphi}_{k,1} + i\Omega\bar{\varphi}_k) d\Pi \\ \left( \mu_0 = \min_{x_3} \mu(x_3), \quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_0 = \min_{x_3} \frac{\lambda(x_3)}{\mu(x_3)} \right)$$

<sup>1</sup> Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Возбуждение упругих волн движущимся гармоническим источником. Краснодар, 1985. — 21 с. Деп. в ВИНТИ 3.09.85; № 6470-85.

<sup>2</sup> Белокопъ А. В., Наседкин А. В. Модельная задача на распространение волн от движущихся пульсирующих нагрузок в упругом слое. Ростов н/Д, 1986. — 31 с. Деп. в ВИНТИ 11.05.86; № 3359-В86.

Очевидно, что

$$(2.1) \quad \|v\|_{H_B} > \|v\|_{H_{B_0}}$$

*Лемма 1.* В условиях теоремы 1 решение задачи В дается формулой

$$(2.2) \quad v_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_k(\alpha, \beta, x_3, w\alpha + \Omega)}{D(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega)} \exp\{-i(\alpha x_1 + \beta x_2)\} d\alpha d\beta$$

где  $G_k, D$  — целые функции своих аргументов.

Лемма доказывается по схеме, используемой для доказательства теоремы 1 из [6].

Для среды с постоянными коэффициентами  $\rho_0, \mu_0$  и  $\lambda_0 = \mu_0(\lambda/\mu)_0$  (задача  $B_0$ ) формула для  $v_k$  может быть построена явно и имеет вид (2.2) с функциями  $G_{0k}, D_0$  вместо  $G_k$  и  $D$  соответственно, где

$$(2.3) \quad \begin{aligned} D_0(\alpha, \beta, \omega) &= \operatorname{ch} \gamma_2 D_1(\alpha, \beta, \omega), \quad D_1(\alpha, \beta, \omega) = 4\gamma^2 \theta - \\ &- (\theta^2 + 4\gamma^4) \operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 + \gamma^2 (\theta^2 + 4\gamma_1^2 \gamma_2^2) \operatorname{sh} \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 / (\gamma_1 \gamma_2) \\ \omega &= w\alpha + \Omega, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \theta = 2\gamma^2 - \omega^2 \\ \gamma_1 &= \sqrt{\gamma^2 - \frac{1-2\nu_0}{2(1-\nu_0)} \omega^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \nu_0 = \frac{\lambda_0}{2(\lambda_0 + \mu_0)} \end{aligned}$$

а явный вид  $G_{0k}$  легко восстанавливается.

*Лемма 2.* Пусть  $\Omega = 0, w < w_R$  или  $0 < \Omega < \pi/2, w < w_0(\Omega) < w_R$ , где  $w_{RC_{201}}$  — скорость распространения поверхностных волн Релея, а  $w_0(\Omega)$  — минимальное значение среди  $w_1 = \sqrt{1 - (2\Omega/\pi)^2}$  и  $w$ , для которых система уравнений

$$D_1(\alpha, 0, w\alpha + \Omega) = 0, \quad \frac{d}{d\alpha} D_1(\alpha, 0, w\alpha + \Omega) = 0 \quad (\alpha \neq -\Omega/w)$$

имеет действительное решение  $\alpha$ . Тогда дисперсионное уравнение задачи  $B_0$

$$D_0(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega) = 0 \quad (\alpha \neq -\Omega/w)$$

вещественных решений не имеет.

Отметим, что более простым, но и более грубым условием, обеспечивающим справедливость последнего утверждения, является выполнение неравенства  $w/v_R + 2\Omega/\pi < 1$ .

*Лемма 3.* В условиях леммы 2 и (1.7) задача  $B_0$  имеет единственное энергетическое решение, определяемое по формулам (2.2).

*Теорема 2.* В условиях леммы 2 и (1.7) задача В имеет единственное энергетическое решение, определяемое по формулам (2.2).

Теорема 2 вытекает из лемм 2, 3 и неравенства (2.1) и позволяет дать количественную оценку постоянных  $m$  и  $\omega_0$  из (1.8).

3. Перейдем к изучению неэнергетических решений задачи В. С целью построения единственного решения при анализе неэнергетического решения будем привлекать принцип предельного поглощения и принцип энергетического излучения. В случае плоских задач эти принципы подробно проанализированы в [6, 7]. Процесс перехода от упругой среды к среде с поглощением достаточно подробно описан в работах, указанных выше. В [6] описана конструкция построения решения плоской задачи В для среды с поглощением. Основываясь на этих работах, можно показать, что для среды с поглощением решение имеет вид (2.2), где вместо  $w\alpha + \Omega$  фигурирует величина  $w\alpha + \Omega - i\varepsilon$ . Таким образом, решение

в среде с поглощением имеет вид

$$(3.1) \quad v_k^\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_k(\alpha, \beta, x_3, w\alpha + \Omega - i\varepsilon)}{D(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega - i\varepsilon)} \exp\{-i(\alpha x_1 + \beta x_2)\} d\alpha d\beta$$

*Лемма 4.* Уравнение

$$(3.2) \quad D(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega - i\varepsilon) = 0$$

при  $\varepsilon \neq 0$  не имеет вещественных решений  $(\alpha, \beta)$ .

Очевидно, что нули (3.2) определяют однородные решения краевой задачи (1.1), (1.5), (1.3) при  $f^j = 0$  и  $\varepsilon > 0$ , и поэтому однородные решения, не растущие на бесконечности в среде с поглощением, есть нули. Следовательно, формула (3.1) определяет полное и единственное решение в среде с поглощением в классе функций, не растущих на бесконечности.

На основании принципа предельного поглощения решение для упругой среды имеет вид

$$(3.3) \quad v_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_k^\varepsilon$$

где  $v_k^\varepsilon$  дается формулой (3.1).

Обозначим  $\Gamma_B, \Gamma_A$  соответственно множества вещественных нулей уравнений

$$(3.4) \quad D(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega) = 0, D(\alpha, \beta, \omega) = 0$$

Очевидно, что множество  $\Gamma_B$  содержит точки пересечения множества  $\Gamma_A$  с плоскостью

$$(3.5) \quad \omega = w\alpha + \Omega$$

в пространстве  $(\alpha, \beta, \omega)$ .

*Лемма 5.* Пусть  $\Omega < \infty, w < \sqrt{m/\rho_0}$ . Тогда, если дисперсионные поверхности  $\Gamma_A$  не пересекаются между собой и плоскость (3.5) не касается  $\Gamma_A$ , то множество  $\Gamma_B$  представляется в виде конечного объединения  $N$  замкнутых кривых  $L_j, j = 1, 2, \dots, N$ , не имеющих общих точек и не вырождающихся в точку. При этом

$$(3.6) \quad |\text{grad } D|^2 = (D_{,\alpha} + wD_{,\omega})^2 + D_{,\beta}^2 \neq 0, \forall (\alpha, \beta) \in L_j$$

*Теорема 3.* В условиях леммы 5 решение задачи В дается при помощи следующей формулы:

$$(3.7) \quad v_k = \frac{1}{4\pi^2} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_k(\alpha, \beta, x_3, w\alpha + \Omega)}{D(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega)} \exp\{-i(\alpha x_1 + \beta x_2)\} d\alpha d\beta - \\ - \frac{1}{4\pi i} \sum_{j=1}^N \oint_{L_j} R_k(\alpha, \beta, x_3) \exp\{-i(\alpha x_1 + \beta x_2)\} ds \\ R_k(\alpha, \beta, x_3) = \frac{G_k(\alpha, \beta, x_3, w\alpha + \Omega)}{|\text{grad } D(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega)|} \text{sign } D_{,\omega}$$

Теорема 3 доказывается на основе анализа смещения вещественных корней  $(\alpha_0, \beta_0)$  уравнения (3.4) при введении  $\varepsilon$  в комплексную область.

Именно, при выполнении условия (3.6) корни уравнения (3.2), близкие к  $(\alpha_0, \beta_0)$ , можно представить в виде

$$(3.8) \quad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon\tau \cos \zeta + o(\varepsilon), \beta = \beta_0 + \varepsilon\tau \sin \zeta + o(\varepsilon)$$

Разложив функцию, стоящую в левой части уравнения (3.2), в ряд по  $\varepsilon$  в окрестности  $(\alpha_0, \beta_0)$ , получаем, что

$$(3.9) \quad \tau = -ic_\zeta^{-1}(\alpha_0, \beta_0)$$

$$(3.10) \quad c_\zeta(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = w \cos \zeta, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \cos \zeta + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \sin \zeta$$

где  $\partial\omega/\partial\zeta$  — алгебраическая проекция на направление  $\zeta$  вектора групповой скорости с компонентами

$$(3.11) \quad \partial\omega/\partial\alpha = -D_{,\alpha}/D_{,\omega}, \quad \partial\omega/\partial\beta = -D_{,\beta}/D_{,\omega}$$

вычисленного в точке  $(\alpha_0, \beta_0)$  для задачи А.

Формулы (3.8), (3.9) и определяют смещение корней  $(\alpha_0, \beta_0)$  в комплексную область при введении  $\varepsilon$ .

Если плоскость (3.5) касается дисперсионной поверхности множества  $\Gamma_A$  в точке  $(\alpha_1, \beta_1)$ , то для существования ограниченного предела (3.3) необходимо и достаточно выполнения равенств

$$G_k(\alpha_1, \beta_1, x_3, w\alpha_1 + \Omega) = 0$$

4. Предположим, что кривые  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) в каждой точке имеют кривизну, отличную от нуля. В дальнейшем понадобится формула [8]

$$(4.1) \quad \int_{\Gamma} f(\alpha, \beta) \exp\{-i(\alpha x_1 + \beta x_2)\} ds \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \sum_k \frac{f(\alpha_k, \beta_k)}{\sqrt{|\kappa_k(\theta)|}} \times \\ \times \exp\{-irl_k \cos(\theta - \eta_k) - 1/4\pi i \operatorname{sign}(\beta''(\alpha_k) \sin \theta)\} + O(r^{-1}), \\ r \rightarrow \infty; \quad l_k = l(\alpha_k, \beta_k), \quad \alpha_k = l_k \cos \eta_k, \quad \beta_k = l_k \sin \eta_k, \\ x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

Здесь  $\Gamma = \Gamma(\alpha, \beta)$  — кривая в  $R^2$ , в данном случае совпадающая с частью кривой  $L_j$ ;  $\alpha_k, \beta_k$  — стационарные точки, определяемые из уравнений

$$(4.2) \quad \frac{d\alpha}{ds} \cos \theta + \frac{d\beta}{ds} \sin \theta = 0, \quad (\alpha, \beta) \in \Gamma$$

либо, что то же, из системы уравнений

$$(4.3) \quad D(\alpha, \beta, w\alpha + \Omega) = 0, \quad D_{,\alpha} - D_{,\beta} \operatorname{ctg} \theta + wD_{,\omega} = 0$$

при фиксированных  $w$  и  $\Omega$ ;  $\kappa_k(\theta) > 0$  — кривизна кривой  $\Gamma$  в точке  $(\alpha_k, \beta_k)$ , зависящей в силу (4.2) или (4.3) от  $\theta$ .

Используя формулы (3.7), (4.1), можно показать, что решение задачи В в дальнем поле имеет вид

$$(4.4) \quad v_k \approx \frac{i}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M(j)} \frac{H(c_\theta^m)}{\sqrt{|\kappa_m(\theta)|}} R_k(\alpha_m, \beta_m, x_3) \times \\ \times \exp\{-i(l_m r \cos(\theta - \eta_m) - 1/4 \operatorname{sign} c_n^m)\} + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty \\ c_\theta^m = c_\theta(\alpha_m, \beta_m), \quad c_n^m = c_n(\alpha_m, \beta_m)$$

Здесь  $H(x)$  — функция Хевисайда;  $(\alpha_m, \beta_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M(j)$ ) — полный набор стационарных точек на  $L_j$  для фиксированного  $\theta$ , причем  $M(j) = 2$  в случае, если  $\kappa > 0$  всюду на  $L_j$ ;  $c_\theta, c_n$  определяются аналогично (3.10),  $n$  — внешняя единичная нормаль к  $L_j$ .

Асимптотические представления, аналогичные (4.4), для других задач с подвижными пульсирующими воздействиями были получены ранее [3] (см. также работы, приведенные в сносках на с. 306).

Полученное решение (4.4) позволяет провести энергетический анализ распространяющихся волн. Для этого уравнение баланса энергии для системы уравнений движения в подвижной системе координат (1.2) запишем в форме

$$(4.5) \quad \partial E / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

$$E = \frac{1}{2} [\sigma_{kl}(\mathbf{u}) u_{k,l} + \rho (u_k \dot{\phantom{u}} - w u_{k,1})^2]$$

$$\mathbf{J}_m = - [\sigma_{km}(\mathbf{u}) (u_k \dot{\phantom{u}} - w u_{k,1}) + \delta_{1m} w E], \quad m = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}(x - wt, y, z, t)$$

Здесь  $E$  — механическая энергия в подвижной системе координат. Поэтому  $J_m$  естественно считать компонентами вектора плотности потока энергии. (Данные энергетические характеристики введены в безразмерном виде.)

Учитывая, что для больших  $r$  граничные условия рассматриваемой задачи однородны, найдем

$$(4.6) \quad \frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{\partial J_{1c}}{\partial x_1} + \frac{\partial J_{2c}}{\partial x_2} = 0 \quad \left( E_c = \int_0^1 E dx_3, \quad J_{kc} = \int_0^1 J_k dx_3 \right)$$

Представим теперь одну из волн (4.4) в вещественной форме

$$(4.7) \quad u_k = r^{-1/2} (v_{kc} \cos \delta + v_{ks} \sin \delta), \quad \delta = \alpha x_1 + \beta x_2 - \Omega t$$

где  $v_{kc}$  и  $v_{ks}$  — соответственно действительная и мнимая части выражения

$$i (2\pi |k|)^{-1/2} R_k(\alpha, \beta, x_3) \exp(i/4 \pi i \operatorname{sign} c_n)$$

в стационарных точках.

Далее вычислим осредненные за период колебаний величины, входящие в (4.5), (4.6). Учитывая, что осредненные энергия и поток энергии из (4.6) — асимптотически аддитивные величины для волн вида (4.4), и проводя действия, аналогичные [6] при выводе осредненных формул в плоских задачах, найдем

$$(4.8) \quad E = \frac{1}{T} \int_0^T E_c dt = \frac{1}{2} (w\alpha + \Omega)^2 B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \int_0^1 \rho(x_3) \sum_{k=1}^3 (v_{kc}^2 + v_{ks}^2) dx_3$$

$$P_k = \frac{1}{T} \int_0^T J_{kc} dt = \frac{1}{2} (w\alpha + \Omega)^2 B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \times \begin{cases} (\partial\omega/\partial\alpha - w), & k=1 \\ \partial\omega/\partial\beta, & k=2 \end{cases}$$

Из формул (4.8), приняв во внимание, что в стационарных точках, как следует из (4.3), (3.11)

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \sin \theta - \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \cos \theta - w \sin \theta = 0$$

можно получить, что поток энергии в направлении оси  $r$  при фиксированном  $\theta$  равен

$$(4.9) \quad P_r = (\partial\omega/\partial\theta - w \cos \theta) E$$

а поток энергии в направлении  $\theta$  равен нулю.

Сформулируем теперь принцип энергетического излучения для задачи В.

*Определение 2.* Будем считать, что решение задачи В подчиняется принципу энергетического излучения, если для распространяющихся волн вида (4.7) выполняется условие  $0 < P_r < \infty$ .

Поскольку в (4.4) функцией  $H(c_\theta^m)$  фактически отбираются лишь те волны, у которых  $c_\theta^m = \partial\omega/\partial\theta - w \cos \theta > 0$ , то из (4.9) следует, что  $P_r > 0$ . Следовательно, построенное на основании принципа предельного поглощения в условиях леммы 5 решение не противоречит принципу энергетического излучения. Можно показать, что решение, построенное на основе принципа энергетического излучения, будет иметь вид (3.7). Таким образом, имеет место следующая

**Теорема 4.** В условиях леммы 5 решение задачи В, построенное на основании принципов предельного поглощения и энергетического излучения, совпадают.

Из (4.7)—(4.9) можно получить, что полный поток энергии, проходящий через бесконечно удаленную цилиндрическую поверхность, равен

$$P = \int_0^{2\pi} r P_r d\theta = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \oint_{L_j} \int_0^1 \rho \sum_{k=1}^3 |G_k(\alpha, \beta, x_3, \omega\alpha + \Omega)|^2 dx_3 \frac{(\omega\alpha + \Omega)^2}{|D_{,\omega} \text{grad } D|} ds$$

Отметим, что критерием выделения единственного решения задачи В не может служить условие  $P > 0$ , поскольку из предыдущего ясно, что в этом случае можно построить неединственное решение.

5. В качестве иллюстрации процессов распространения волн в дальнем поле рассмотрим задачу В для однородного слоя, находящегося под действием подвижной пульсирующей нормальной сосредоточенной нагрузки  $f^3(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2)$ . Значения  $\Omega$  и  $\omega$  выбираются так, чтобы выполнялись условия леммы 5.

Характерный вид кривых  $L_j$  в этом случае показан для  $\beta > 0$  на фиг. 1—3 при следующих значениях  $\omega, \Omega, \nu_0$ : 0,5; 2; 0,29 (фиг. 1), 0,6; 2; 0,29 (фиг. 2), 0,4; 4,25; 0,43 (фиг. 3, где показана только одна из двух имеющихся здесь кривых  $L_j$ ). Для  $\beta < 0$  кривые  $L_j$  симметричны приведенным на фиг. 1—3. (Все кривые  $L_j$  симметричны по  $\beta$  ввиду той же симметрии функции  $D_1$  из (2.3).)

Как следует из предыдущего, для фиксированного угла  $\theta$  на плоскости  $x_1, x_2$  стационарные точки на  $L_j$  определяются как точки, в которых внешняя нормаль к кривой образует угол  $\theta$  с положительным направлением оси  $\alpha$ . При этом угол  $\theta$  отсчитывается по часовой стрелке (фиг. 1), если на  $L_j$  имеем  $c_n > 0$ , и против часовой стрелки, если  $c_n < 0$ . На всех кривых, показанных на фиг. 1—3,  $c_n > 0$ .

Кривизна кривых на фиг. 1 нигде не обращается в нуль, поэтому для любого угла  $\theta$  существует ровно одна точка на  $L_j$ . Следовательно, каждой кривой здесь отвечает по одной волне вида (4.4).

На фиг. 2 на кривой  $L_j$  при  $\beta > 0$  имеются две точки перегиба, отмеченные светлыми кружками. В этих точках нормали образуют с положительным направлением оси  $\alpha$  углы  $\theta_1 \approx 58,8^\circ$  и  $\theta_2 \approx 166,4^\circ$ . Поэтому в областях слоя  $\theta_1 < |\theta| < \theta_2$  будут распространяться по три волны, порожденные одной кривой. Действительно, таким углам соответствуют по три стационарные точки, а формула (4.4) справедлива и в случае  $\kappa_m < 0$ , только вместо  $\text{sign } c_n^m$  надо подставить  $-\text{sign } c_n^m$ . (Кривизна  $\kappa$  в точке  $(\alpha_*, \beta_*) \in L_j$  считается отрицательной, если кривая  $L_j$  в окрестности этой точки вогнута относительно ограничиваемой ею внутренней области.) В остальной области слоя распространяется одна волна.

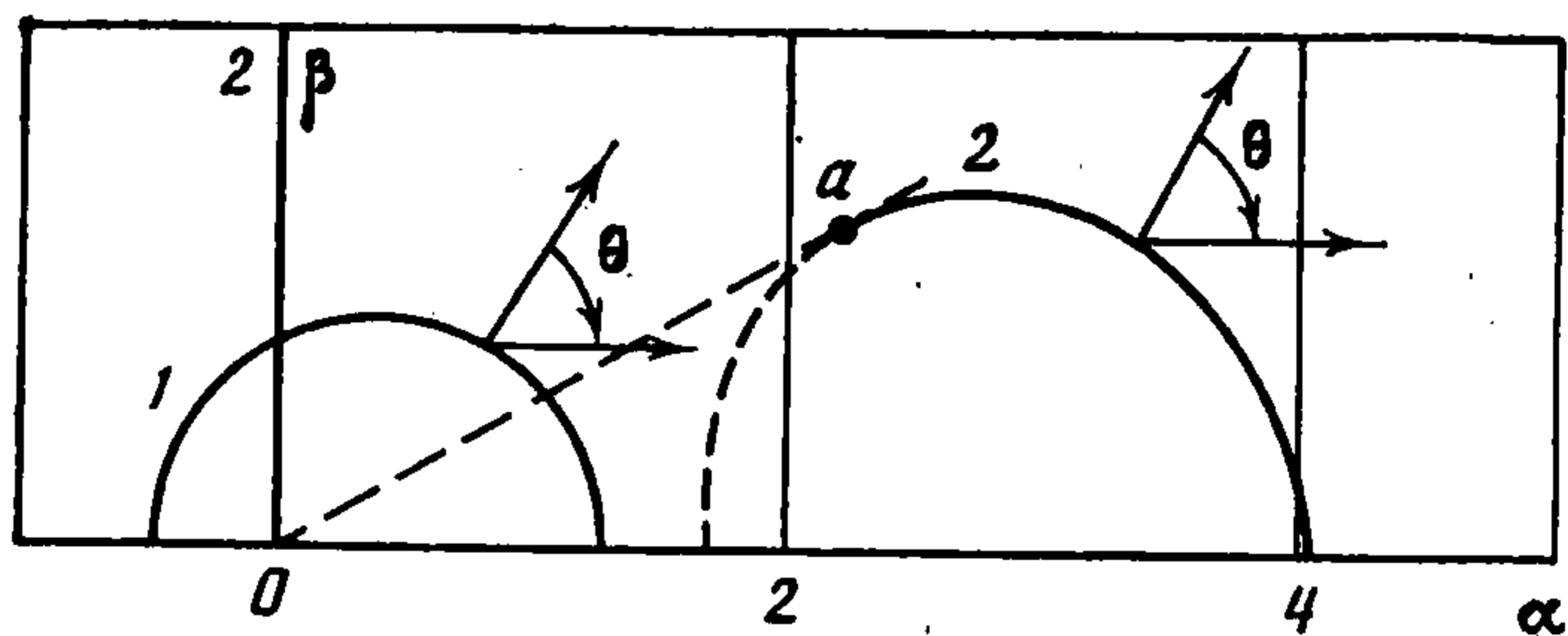
На фиг. 3 для  $\beta > 0$  имеем одну точку перегиба с углом  $\theta_3 \approx 87,7^\circ$ . Здесь в области  $|\theta| > \theta_3$  распространяются три волны, а в области  $|\theta| < \theta_3$  — одна ( $|\theta| \leq \pi$ ).

В точках перегиба кривизна кривых  $\kappa_m$  равна нулю, а вблизи этих точек  $\kappa_m \rightarrow 0$ . Для вычисления поля в этих областях необходимо использовать формулы метода стационарной фазы для стационарных точек второго порядка и для близко расположенных стационарных точек [9].

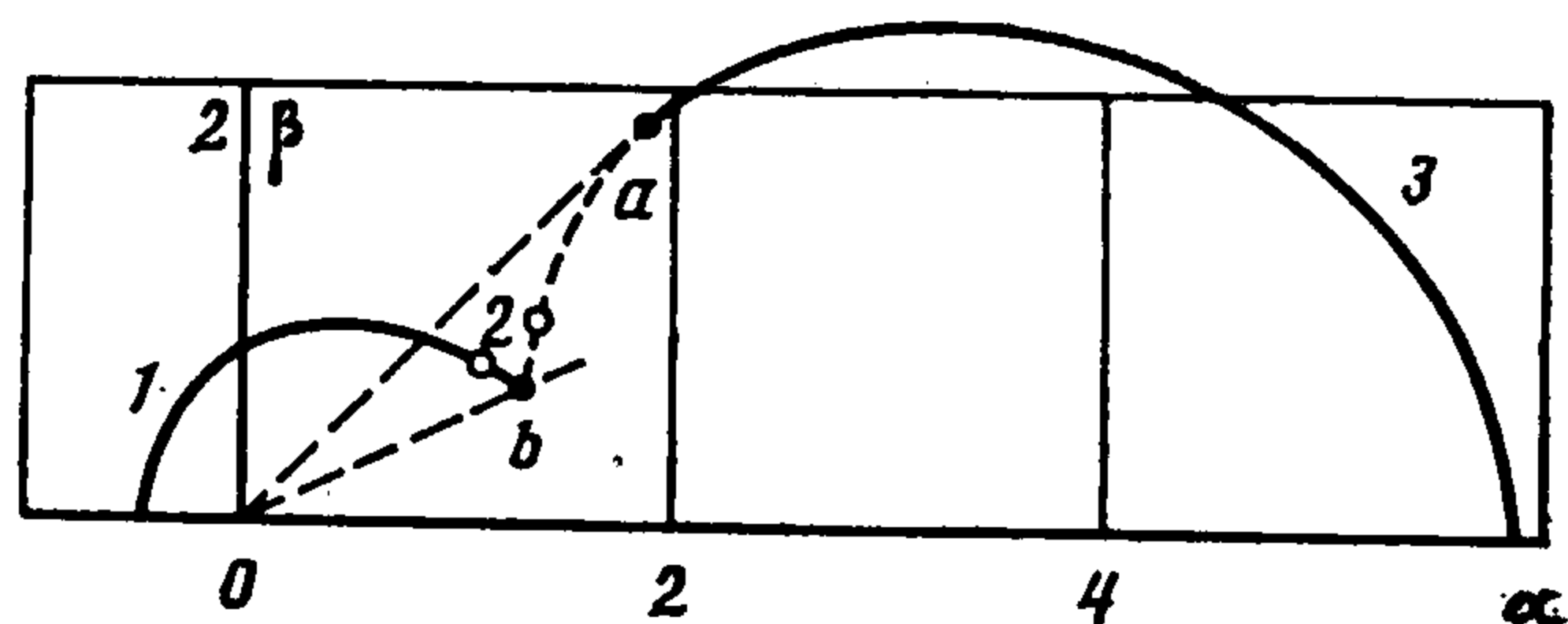
Отметим, что, несмотря на убывание поля в окрестности особых направлений как  $r^{-1/2}$ , поток энергии  $P$  через цилиндрическую поверхность  $r = \text{const}$ ,  $0 \leq x_3 \leq 1$  будет ограничен при  $r \rightarrow \infty$  в силу малости угла раствора  $\theta$  особой области, где  $\kappa_m \rightarrow 0$  ( $\theta \sim r^{-1/2}$ ).

Областей с различным числом распространяющихся волн, порожденных одной кривой  $L_j$ , не будет в случае задачи  $A_0$ , в случае задачи  $B_0$  для полупространства и для плоских задач.

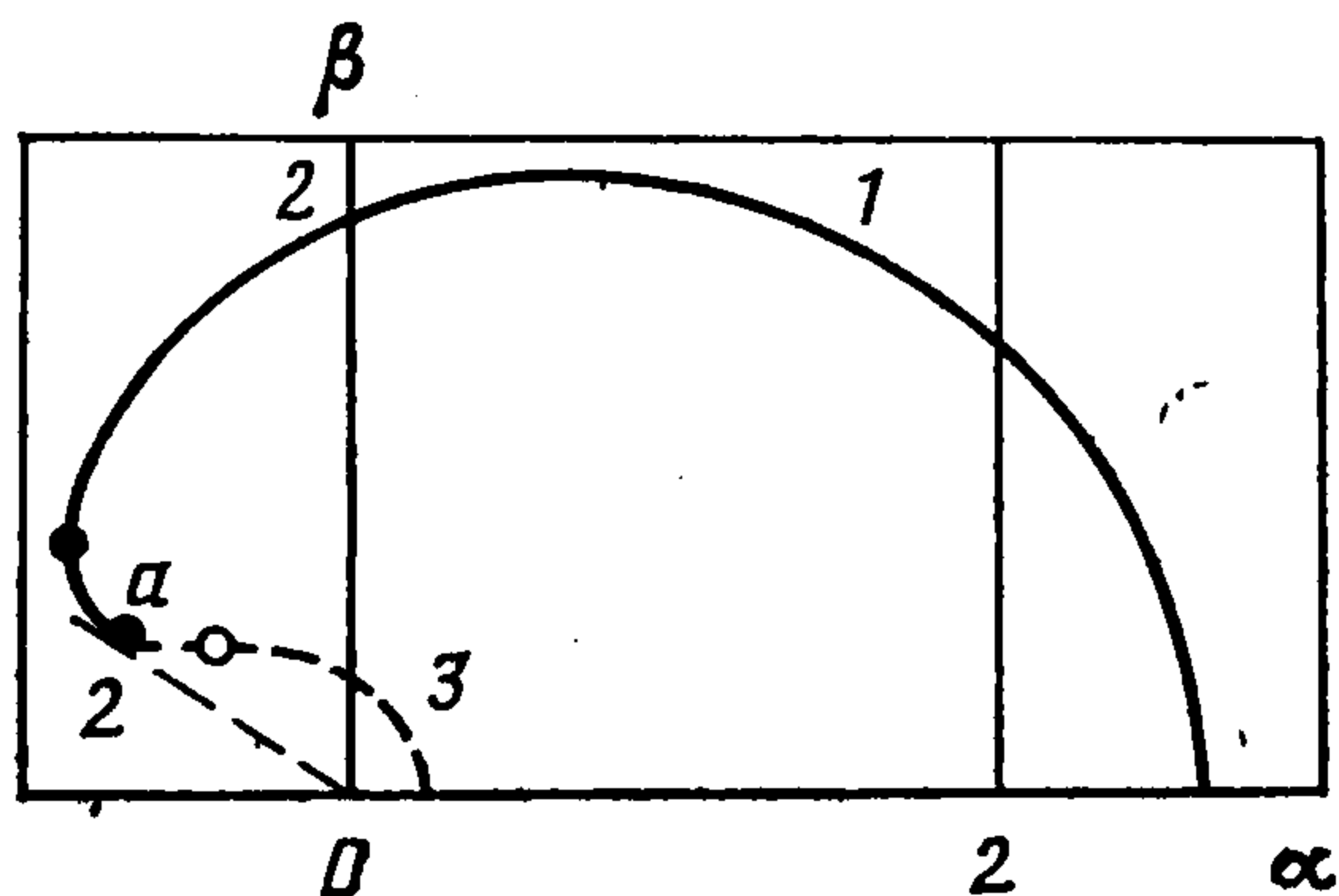
На фиг. 4—6 приведены графики зависимости  $P_r$  от  $\theta$ , соответствующие кривым  $L_j$  фиг. 1—3 при тех же значениях  $\omega, \Omega, \nu_0$ . Отсчет значений  $P_r$  с множителями  $4\pi r$  ведется от круга, обведенного жирной линией. Кривые или участки кривых  $L_j$  и соответствующие им кривые  $4\pi r P_r(\theta)$  помечены одинаковыми цифрами.



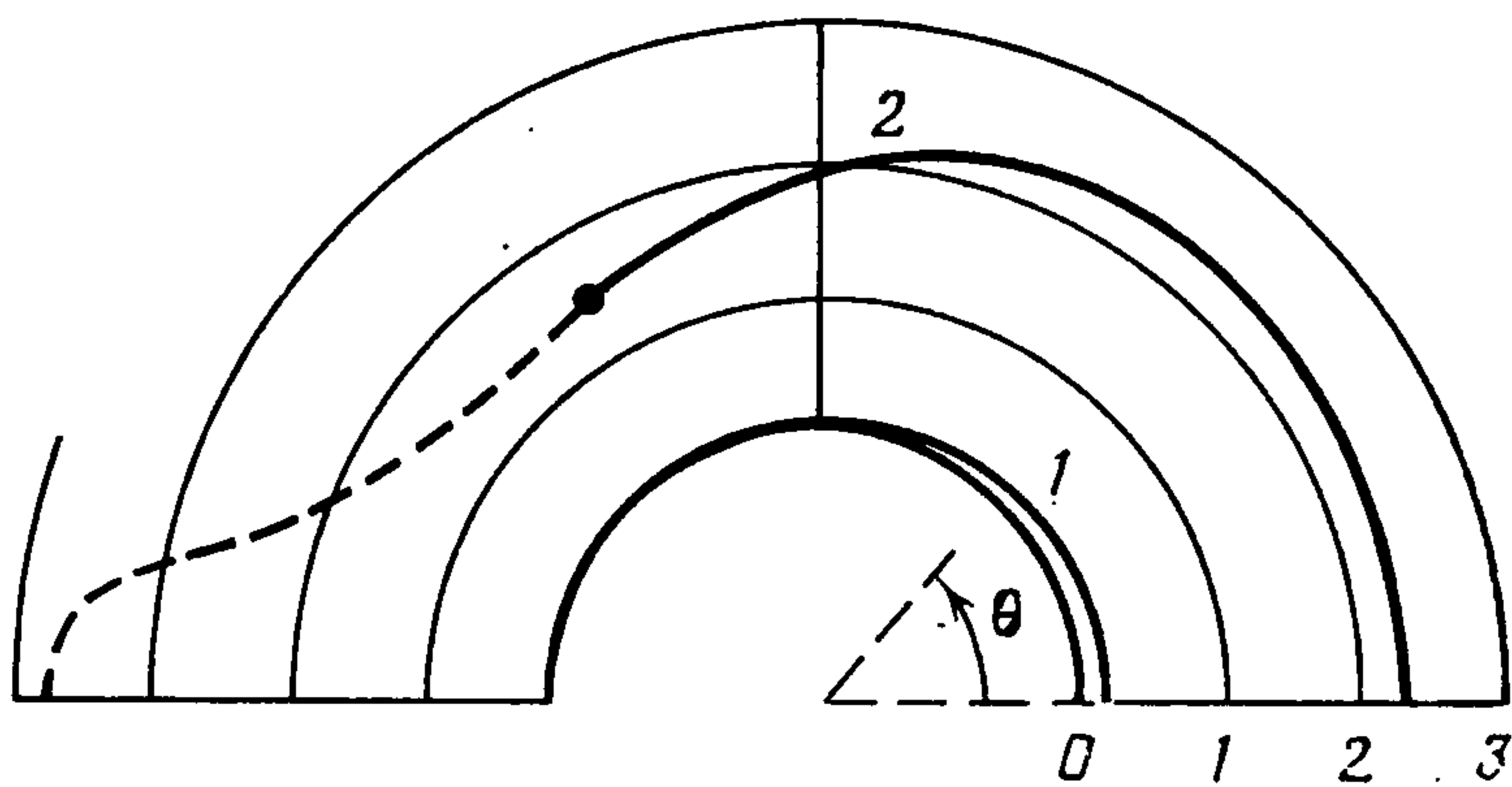
Фиг. 1



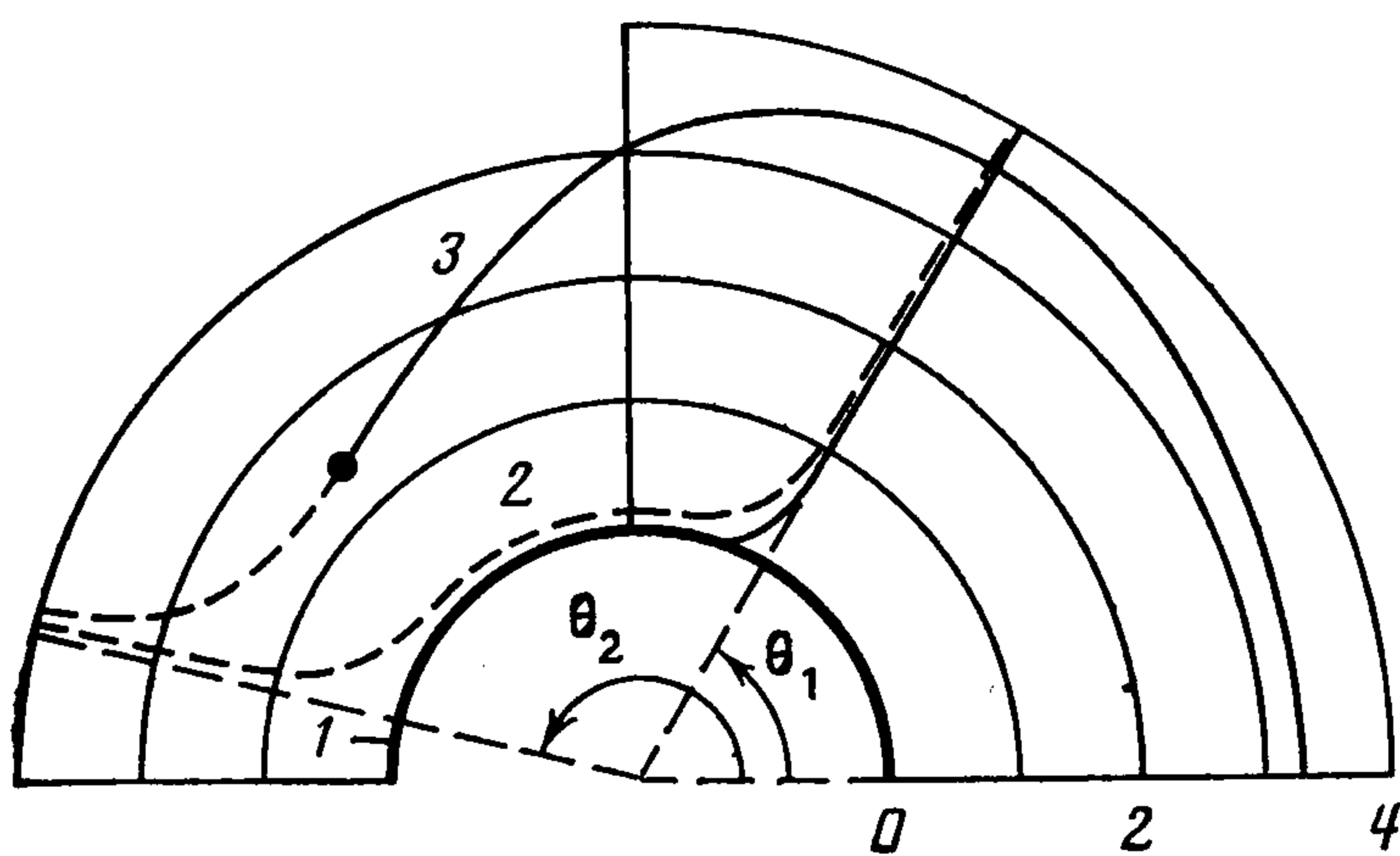
Фиг. 2



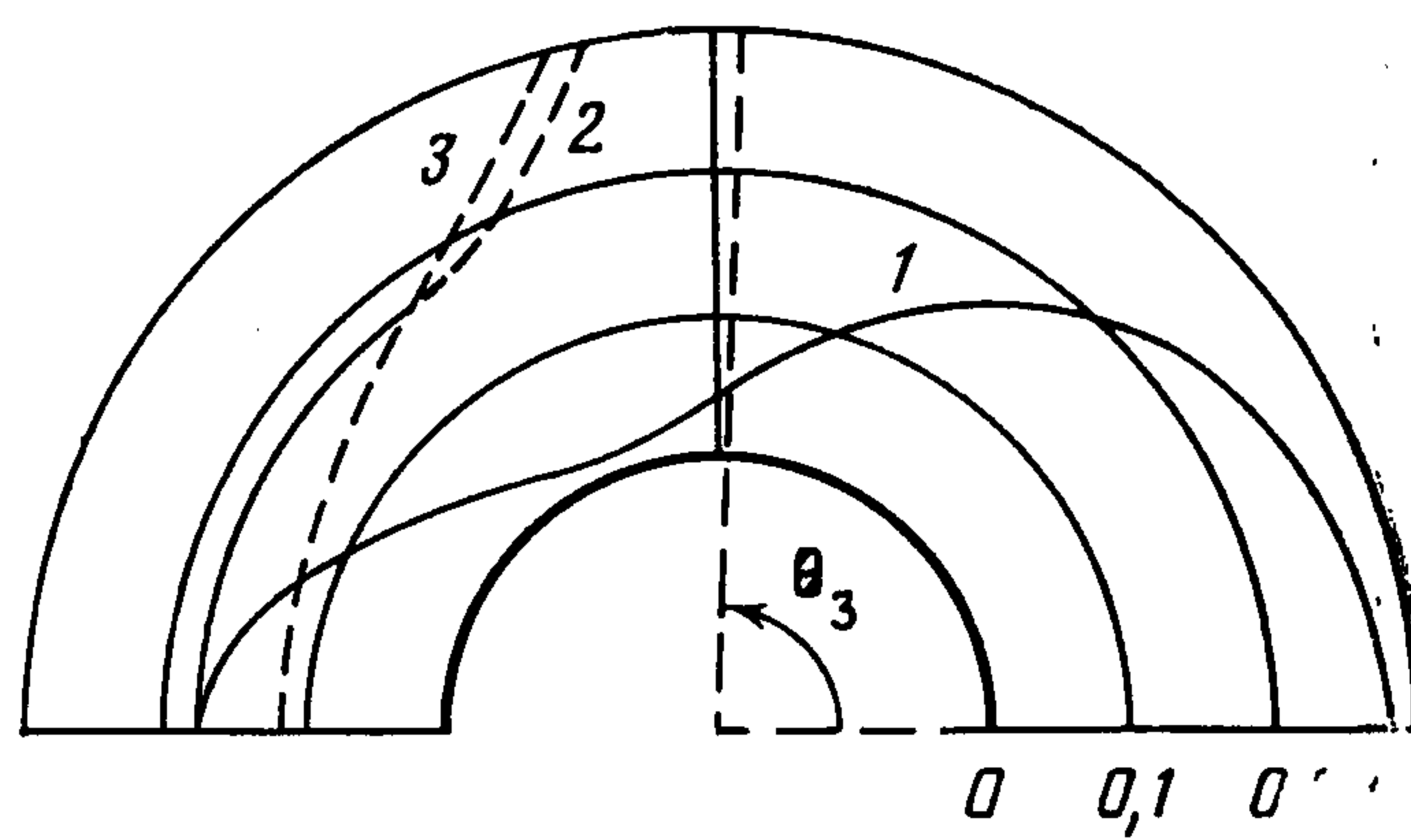
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Видно, что наибольший вклад в поток энергии  $P_r$  дают участки кривых  $L_j$  с малой кривизной. Значителен также и вклад таких участков кривых  $L_j$ , где  $\text{grad } D_1$  мал (направление  $\theta = \pi$  на фиг. 4 и соответствующий участок второй кривой на фиг. 1).

Наконец, отметим следующее. Буквами  $a$  на фиг. 1, 3 и  $a, b$  на фиг. 2 обозначены точки кривых  $L_j$ , в которых касательные к кривым проходят через начало координат. Участки кривых между этими точками и точками, симметричными им относительно  $\alpha$ , порождают обратные волны, т. е. волны, бегущие из бесконечности. (Для  $\beta > 0$  эти участки кривых показаны на фиг. 1—3 штрихами.) На границе области распространения таких волн волновое движение по  $r$  отсутствует. Однако обратные волны здесь переносят энергию на бесконечность и не дают никаких особенностей в распределение потока энергии (показанные штрихами части кривых на фиг. 4—6). В этих случаях нарушается аналог принципа излучения Зоммерфельда, т. е. принцип отбора волн, бегущих в подвижной системе координат от источника на бесконечность.

Таким образом, здесь, как и в плоских задачах [6], для рассмотренного в работе случая дорелеевского движения принцип предельного поглощения эквивалентен энергетическому принципу, но не эквивалентен аналогу принципа излучения Зоммерфельда.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Распространение упругих волн, возникающих при движении системы нормальных напряжений по поверхности полупространства.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, т. 1, с. 167—186.
2. Ставровский А. С. Об одной модификации задачи Лэмба.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1975, № 5, с. 86—95.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкости. М.: Мир, 1981. 598 с.

4. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
5. *Бабешко В. А., Ватульян А. О., Головки Т. С.* Возбуждение гармонических волн в анизотропной слоистой среде.— Нефтяная промышленность. Нефтегазовая геол. и геофиз.: Реферат. научн.-техн. сб., 1983, № 11, с. 16—18.
6. *Белокопъ А. В.* Колебания упругой неоднородной полосы, вызванные движущимися нагрузками.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 296—302.
7. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. *Вайнберг Б. Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982. 294 с.
9. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 547 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
16.II.1986