

УДК 539.3

## МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Солдатов М. М.

Исследуется численное решение класса задач теории упругости, более широкого по сравнению с рассмотренным ранее в [1—3]: плоских задач с негладкой границей методом дискретных особенностей (МДО). МДО названо направление численного решения краевых задач, являющееся по существу методом регуляризации по А. Н. Тихонову [4], основанным на граничных сингулярных интегральных уравнениях (СИУ). При расчетах геометрически сложных объектов целесообразно сочетание МДО с методом конечных элементов, когда для суперэлементов нижнего уровня решение получают при помощи МДО.

К МДО относятся: приведение задачи к СИУ, параметрическое задание контура, исследование свойств СИУ, сглаживание ядер СИУ, выделение единственного решения СИУ, обоснование выбора двух согласованных систем точек на контуре, переход от СИУ к системе линейных алгебраических уравнений и обеспечение ее определенности и невырожденности, анализ сходимости решения, применение квадратурных формул для интегралов типа Коши.

Рассматривается упругая, изотропная, однородная среда, заполняющая на плоскости односвязную область  $D$  с кусочно-гладким замкнутым контуром  $\Gamma$ . Решение плоских задач теории упругости известным образом [5, 6] сводится к определению двух аналитических функций, например  $\varphi$ ,  $\psi$ .

Негладкость границы влияет на реализацию МДО, однако суть метода сохраняется. Цель публикуемой работы — изучение и обоснование нового в МДО для плоских задач теории упругости с негладкой границей по сравнению с изученным случаем гладкой границы.

1. Для приведения двух основных задач (в перемещениях и напряжениях) к СИУ первого рода было предложено [2] аналитические функции  $\varphi$  и  $\psi$  представить через одну комплексную функцию  $\omega$  в следующем виде ( $L$  — гладкий контур):

$$(1.1) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\kappa_k \overline{\omega(\tau)} - \overline{\tau} \omega'(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D$$

При выводе СИУ из краевого условия [5, 6] производная вычислялась из (1.1) по формуле

$$(1.2) \quad \varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega'(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

получаемой из (1.1) после дифференцирования по  $z$  и интегрирования по частям. Однако в некоторых задачах с негладкой границей функция  $\omega(\tau)$  может оказаться такой, что интеграл (1.2) от  $\omega'(\tau)$  не существует. Тогда производную  $\varphi'(z)$  нужно вычислять как интеграл от функции  $\omega(\tau)$ :

$$(1.3) \quad \varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau$$

Поставим следующую задачу: получить СИУ относительно функции  $\omega$  из краевого условия, не зависящее от того, по какой формуле — (1.2) или (1.3) — вычисляется производная  $\varphi'(z)$ .

Из краевого условия задачи и формул (1.1), (1.2) приходим к СИУ первого рода [2] на контуре  $\Gamma$ , если для него верно соотношение (1.2)

$$(1.4) \quad \frac{\kappa_k}{\pi i} \int_{\Gamma} \omega(\tau) \operatorname{Re} \left( \frac{d\tau}{\tau - t} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{\omega(\tau)} d \left( \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} \right) = f_k(t), \quad t \in \Gamma$$

а из (1.3) и соотношений [7], аналогичных (1.1)

$$(1.5) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ c \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau - z} d\tau + \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\tau - z} d\bar{\tau} - \int_{\Gamma} \frac{\bar{\tau}\omega(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau \right], \quad z \in D$$

также приходим к СИУ (1.4) при  $c = \kappa_k$ .

Действительно, определим предельные значения  $\varphi^{\pm}(t)$  функции  $\varphi(z)$  в произвольной точке  $t \in \Gamma$  [8]

$$(1.6) \quad \varphi^{\pm}(t) = \alpha^{\pm} \omega(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad \alpha^+ = 1 - \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \alpha^- = -\frac{\alpha}{2\pi}$$

где индексы плюс и минус соответствуют  $D^+$  (внутренняя задача) и  $D^-$  (внешняя задача).

Обычным образом [9] определим в произвольной точке  $t$  контура  $\Gamma$  правый (левый) касательный вектор с началом в точке  $t$  как предельное положение секущей для окрестности  $(t, t + \Delta t)$  (для окрестности  $(t - \Delta t, t)$ ) контура  $\Gamma$  при его положительном обходе и при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда  $\alpha$  — угол между правым и левым касательными векторами, определяемый против часовой стрелки. Для гладких точек контура  $\Gamma$  имеем  $\alpha = \pi$ , для угловых точек контура  $\alpha \in ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ , а для точек возврата  $\alpha = 0, 2\pi$  — для острия, направленного соответственно вправо и влево при положительном обходе  $\Gamma$ , при котором область  $D$  остается слева.

Аналогично (1.6) находим предельное значение  $[t\overline{\varphi'(t)} + \psi(t)]^{\pm}$  функции  $z\overline{\varphi'(z)} + \psi(z)$

$$(1.7) \quad [t\overline{\varphi'(t)} + \psi(t)]^{\pm} = c\alpha^{\pm}\omega(t) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \left[ c \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau - \bar{t}} d\bar{\tau} + \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau - \bar{t}} d\tau - \int_{\Gamma} \frac{(\tau - t)\overline{\omega(\tau)}}{(\bar{t} - \bar{\tau})^2} d\bar{\tau} \right]$$

и из краевого условия для двух основных задач ( $k = 1, 2$ )

$$(1.8) \quad \kappa_k \varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \psi(t) = f_k(t)$$

с учетом (1.6), (1.7) приходим к СИУ относительно комплексной функции  $\omega(t)$

$$(1.9) \quad (\kappa_k - c)\alpha^{\pm}\omega(t) + \frac{1}{2\pi i} \left[ \kappa_k \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + c \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau - \bar{t}} d\bar{\tau} + \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma} \overline{\omega(\tau)} d \left( \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} \right) \right] = f_k(t)$$

(обозначения такие же, как в [1 — 3, 7]). СИУ (1.9) при  $c = \kappa_k$  переходит в СИУ (1.4).

2. Рассмотрим свойства СИУ (1.4). Его собственные функции зависят от  $\kappa_k$  и были изучены ранее [2]. Так, для  $k = 1$  собственной функцией (1.4) является комплексная постоянная, а для  $k = 2$ , кроме того, и функция  $iat$ , где  $a$  — действительная постоянная.

Для исследования свойств ядер СИУ (1.4) перейдем к новой переменной интегрирования, дифференциал которой — непрерывная функция

на  $\Gamma$ . В качестве таковой может быть взят, например, параметр  $\eta$  взаимно однозначного параметрического задания контура  $\Gamma$

$$(2.1) \quad x = x(\eta), \quad y = y(\eta), \quad \eta \in [0, 2\pi]$$

где  $x(\eta)$ ,  $y(\eta)$  и их производные по  $\eta$  —  $2\pi$ -периодические функции. Контур  $\Gamma$  — замкнутый, следовательно, ядра СИУ (1.4) — периодические функции. С учетом этого выделим особенность из сингулярного ядра  $A_0$  СИУ (1.4) в виде суммы ядра Гильберта и периодической функции  $A(\eta, \xi)$ , регулярность которой доказана [2] для ляпуновского контура  $L$  (штрихами обозначены производные по  $\eta$ )

$$(2.2) \quad \operatorname{Re} \left( \frac{d\tau}{\tau - t} \right) = A_0(\eta, \xi) d\eta = \frac{x'(x - x_0) + y'(y - y_0)}{r^2} d\eta = \\ = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} + A(\eta, \xi) \right] d\eta$$

$$\eta, \xi \in [0, 2\pi], \quad \tau = x + iy, \quad t = x_0 + iy_0, \quad x_0 = x(\xi), \quad y_0 = y(\xi)$$

Здесь

$$(2.3) \quad A(\eta, \xi) = \frac{2}{r^2} [x'a(\eta, \xi) + y'b(\eta, \xi)] + \\ + \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \left[ \frac{4}{r_0^2} (x'x_0' + y'y_0') - 1 \right] \\ a(\eta, \xi) = x - x_0 - x_0' \sin(\eta - \xi), \quad b(\eta, \xi) = y - y_0 - \\ - y_0' \sin(\eta - \xi) \\ r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad r_0^2 = r^2 \sin^{-2} \frac{\eta - \xi}{2}$$

Функция  $A(\eta, \xi)$  при  $\eta = \xi$  получается из (2.3) предельным переходом:

$$(2.4) \quad A(\eta, \eta) = (x'x'' + y'y'')/S'^2 = (x'' \cos \beta + y'' \sin \beta)/S' = \\ = S''/S'$$

$$(2.5) \quad S' = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad S'' = (x'x'' + y'y'')/S'$$

где  $\beta$  — угол наклона касательной к  $\Gamma$  в точке  $\eta$ .

СИУ (1.4) запишем с учетом (2.2)

$$(2.6) \quad \kappa_k \int_0^{2\pi} \omega(\eta) \left[ \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} + A(\eta, \xi) \right] d\eta + \int_0^{2\pi} \overline{\omega(\eta)} B(\eta, \xi) d\eta = \\ = 2\pi i f_k(\xi)$$

$$(2.7) \quad B(\eta, \xi) = A_1(\eta, \xi) + iA_2(\eta, \xi) \\ A_1(\eta, \xi) = 4r^{-4} (x - x_0)(y - y_0) [x'(y - y_0) - y'(x - x_0)] \\ A_2(\eta, \xi) = -2r_0^{-4} [(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2] [x'(y - y_0) - \\ - y'(x - x_0)]$$

Из (2.7) при  $\eta = \xi$  после перехода к пределу получим с учетом (2.5)

$$(2.8) \quad B(\eta, \eta) = ie^{i2\beta} (y'' \cos \beta - x'' \sin \beta)/S' = iKS'e^{i2\beta}$$

где  $K$  — кривизна контура  $\Gamma$  в точке с параметром  $\eta$ .

Запись СИУ (1.4) в виде (2.6) показывает тип исследуемого СИУ (сингулярное ядро  $\operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2}$ ) и выделяет две функции  $A(\eta, \xi)$ ,  $B(\eta, \xi)$ , на которые влияет негладкость контура  $\Gamma$ .

Определим  $\Lambda_2$  — класс кривых  $L$ , для которых  $x''$ ,  $y''$  — функции класса  $H$  [8] и  $S' \neq 0$ . Если контур  $L \in \Lambda_2$ , то [1] в (2.6) функции  $A(\eta, \xi)$ ,  $B(\eta, \xi)$  класса  $H$ .

Если

$$\Gamma = \bigcup_{l=1}^m L_l, \quad L_l \in \Lambda_2$$

и на  $\Gamma$  имеются угловые точки или точки возврата  $\eta_i$  (т. е. точки, в которых орт касательного вектора терпит разрыв первого рода:  $\beta(\eta_i + 0) = \beta_i^+$ ;  $\beta(\eta_i - 0) = \beta_i^-$  и  $\beta_i^+ \neq \beta_i^-$ ), то функции  $A(\eta, \xi)$ ,  $B(\eta, \xi)$  согласно (2.3), (2.7) могут иметь разрывы первого рода за счет производных  $x'$ ,  $y'$ . При  $\eta = \eta_i = \xi$  характер разрыва функции  $B(\eta, \eta)$  будет определяться согласно (2.8) значениями пределов слева и справа в точке  $\eta_i$  кривизны

$$K = (x'y'' - y'x'')/S'^3$$

кривой  $\Gamma$  и предельными значениями угла  $\beta$ . А характер разрыва функции  $A(\eta, \eta)$  согласно (2.4) определяется предельными значениями отношения  $S''/S'$ .

Будем рассматривать контуры  $\Gamma$  с такими особыми точками, наличие которых при допустимом параметрическом задании контура ( $S' \neq 0$ ) приводит к разрывам только первого рода функций  $A(\eta, \xi)$  и  $B(\eta, \xi)$ . Тогда решение СИУ (2.6) — функции  $\omega(\eta)$ , в этих точках может иметь [8, 10] не более чем логарифмическую особенность.

Это же утверждение справедливо для тех точек  $\Gamma$ , в которых правая часть СИУ (2.6) имеет разрыв первого рода, а функции  $A(\eta, \xi)$ ,  $B(\eta, \xi)$  непрерывны. Если же в точке контура  $\Gamma$  одновременно терпят разрыв первого рода и правая часть СИУ (2.6), и функции  $A(\eta, \xi)$ ,  $B(\eta, \xi)$ , то предсказание поведения решения СИУ требует дополнительных исследований.

Действительная и мнимая части СИУ (2.6) дают систему СИУ относительно функций  $\omega_R$ ,  $\omega_I$  ( $\omega = \omega_R + i\omega_I$ )

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \omega_R(\eta) \left\{ \kappa_k \left[ \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} + A(\eta, \xi) \right] + A_1(\eta, \xi) \right\} d\eta + \\ & + \int_0^{2\pi} \omega_I(\eta) A_2(\eta, \xi) d\eta = -2\pi f_{kI}(\xi) \\ & \int_0^{2\pi} \omega_I(\eta) \left\{ \kappa_k \left[ \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} + A(\eta, \xi) \right] - A_1(\eta, \xi) \right\} d\eta + \\ & + \int_0^{2\pi} \omega_R(\eta) A_2(\eta, \xi) d\eta = 2\pi f_{kR}(\xi) \end{aligned}$$

Отметим, что в системе СИУ (2.9) возможны как гладкие, так и негладкие правые части. Например, для задач в напряжениях ( $k = 2$ ) [2] функции  $f_{2I}$ ,  $f_{2R}$ , вообще говоря, имеют разрывы первого рода в тех точках контура  $L$ , где приложены сосредоточенные нагрузки. При отсутствии же сосредоточенных нагрузок функции  $f_{2I}$ ,  $f_{2R}$  непрерывны во всех точках контура  $\Gamma$ .

3. Выделение единственного решения СИУ (1.4) в случае гладкого контура  $L$  достигалось [2,9] введением дополнительных интегральных условий, назначение которых состоит в том, чтобы «снять» СИУ при помощи интегральных условий со спектра. Было проведено [11] численное сравнение этого подхода с традиционным [6, 12], в котором разрешимость СИУ достигалась за счет включения в него дополнительных слагаемых. Показано [11] преимущество дополнительных условий, так как эффективность дополнительных слагаемых, в основном связанная с погрешностью вычислений, резко падает с увеличением порядка  $n$  системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей численно решаемому СИУ.

Интегральные условия, «снимающие» СИУ со спектра, могут быть записаны как раньше [1—3], а также в виде

$$(3.1) \quad \int_{\Gamma} \omega(\tau) dS = 0, \quad k = 1, 2; \quad \int_{\Gamma} \left( \frac{\omega}{\tau} - \frac{\bar{\omega}}{\bar{\tau}} \right) dS = 0, \quad k = 2$$

где  $dS$  — элемент длины контура  $\Gamma$ . Первое равенство (3.1) «не пропускает» собственное решение СИУ (1.4), равное комплексной постоянной, а второе —  $iat$ , где  $a$  — действительная постоянная.

Подынтегральные выражения (3.1), если  $\omega(\tau)$  — непрерывная функция, не имеют разрывов в угловых точках контура  $\Gamma$ . В этом и состоит преимущество условий (3.1) по сравнению с ранее предложенными условиями в [1—3], подынтегральные функции которых в случае негладкого контура  $\Gamma$  могут иметь разрывы первого рода.

Введение условий (3.1) предполагает, что негладкость контура  $\Gamma$  не влияет на собственные функции СИУ (1.4). Это предположение в дальнейшем проверялось численно при решении конкретных задач.

4. Переход от СИУ к системе линейных алгебраических уравнений требует дополнительных ограничений на выбор двух согласованных систем точек  $\eta_i$  и  $\eta_j$  на контуре  $\Gamma$ . Эти ограничения являются обобщением ранее [2] сформулированного утверждения, что в точках разрыва первого рода правой части (1.4) (или (2.9)) должны помещаться расчетные точки (РТ)  $\xi_j$ , а значение правой части берется равным полусумме ее пределов слева и справа от этой точки.

Действительно, выделим в СИУ (1.4) ядро Гильберта [2, 10]. Для него известно [13], что если плотность  $\varphi(\eta)$  разлагается в ряд Фурье

$$(4.1) \quad \varphi(\eta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\eta + b_k \sin k\eta), \quad \varphi(\eta) \in L_2[0, 2\pi]$$

то

$$(4.2) \quad I(\xi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \varphi(\eta) d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k \sin k\xi + b_k \cos k\xi) = f(\xi)$$

Полученный ряд является рядом Фурье для функции  $f(\xi)$ , поэтому если  $f(\xi)$  имеет разрыв первого рода  $\xi_0$ , то

$$(4.3) \quad I(\xi_0) = 1/2 [f(\xi_0 - 0) + f(\xi_0 + 0)]$$

так как, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в равенстве

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi_n}{2} S_n(\varphi) d\eta = S_n(f)$$

где  $S_n(\varphi)$  — частичная сумма ряда (4.1), в силу ограниченности этого оператора в  $L_2[0, 2\pi]$  получим (4.3). Отсюда аналогичное утверждение следует для СИУ (1.4) с регулярной частью, т. е.

$$(4.4) \quad \frac{\kappa_k}{\pi i} \int_{\Gamma} \omega(\tau) \operatorname{Re} \left( \frac{d\tau}{\tau - t_0} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{\omega(\tau)} d \left( \frac{\tau - t_0}{\bar{\tau} - \bar{t}_0} \right) = \\ = 1/2 [f_k(t_0 - 0) + f_k(t_0 + 0)], \quad t_0 \in \Gamma$$

где  $t_0$  — точка разрыва первого рода правой части СИУ (1.4).

Из (4.4) следует, что левая часть СИУ принимает строго определенное значение в точке  $t_0$ . Это учитывается в численном решении при переходе от СИУ к дискретному аналогу тем, что  $t_0$  назначается РТ (точкой коллокации) СИУ (1.4).

При изменении суммарного числа  $n$  РТ на контуре  $\Gamma$  РТ в точках разрыва первого рода правой части (1.4) сохраняются и в отличие от других РТ их будем называть неподвижными РТ.

При переходе от СИУ к дискретному аналогу, как обычно [1, 2], используются две согласованные системы точек  $\eta_i$  и  $\xi_j$ . Исследования, проведенные численно при решении конкретных задач, позволили установить, что угловые точки контура  $\Gamma$  нужно принимать за неподвижные РТ (объяснение см. в п. 7). Другие варианты выбора точек  $\eta_i$ ,  $\xi_j$  приводят, как правило, к существенным возмущениям решения СИУ в окрестностях особых точек. Проверка этого результата производилась на задачах, в которых заведомо известно, что решение в напряжениях не имеет возмущений вблизи угловых точек  $\Gamma$ , например в случае внутренней задачи  $k = 2$  о всестороннем равномерном растяжении прямоугольной области  $D$ .

Итак, при переходе к дискретному аналогу СИУ неподвижные РТ должны фиксироваться в угловых точках контура  $\Gamma$  и точках разрыва первого рода правой части СИУ (1.4). Положение неподвижных РТ определяет максимально возможный шаг разбиения (или минимальное число точек) на контуре  $\Gamma$  при построении двух равноотстоящих по параметру задания контура  $\Gamma$  согласованных систем точек  $\eta_i$  и  $\xi_j$ . Отметим, что на контуре  $\Gamma$  распределение точек  $\eta_i$ ,  $\xi_j$  может оказаться существенно неравномерным.

5. Переход от СИУ (1.4) и интегральных условий (3.1) к системе линейных алгебраических уравнений в задачах на негладком односвязном контуре  $\Gamma$  ( $\Gamma = L_1 + \dots + L_m$ ,  $L_l \in \Lambda_2$ ,  $l = 1, \dots, m$ ) проводится после разбиения интегралов по  $\Gamma$  в (1.4), (3.1) на сумму интегралов по  $L_l$ . Этому предшествует разбиение области определения переменных  $\eta$ ,  $\xi$ , принадлежащих отрезку  $[0, 2\pi]$  на  $m$  участков, например пропорционально длинам кривых  $L_l$ , и выбор шага разбиения на каждом из участков с учетом наличия на контуре  $\Gamma$  неподвижных РТ. В результате из (2.9) и (3.1) перейдем к системе линейных алгебраических уравнений (суммирование по  $i$  от 1 до  $n$ )

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad & \sum [\omega_{Rn}(\eta_i)(2\kappa_k A_0 + A_1) + \omega_{In}(\eta_i) A_2] \alpha_{ij} + \\
 & + \beta_1 + (k-1)\beta_3 \cos \xi_j = -2\pi f_{kI}(\xi_j) \\
 & \sum [\omega_{Rn}(\eta_i) A_2 + \omega_{In}(\eta_i)(2\kappa_k A_0 - A_1)] \alpha_{ij} + \\
 & + \beta_2 + (k-1)\beta_3 \sin \xi_j = 2\pi f_{kR}(\xi_j) \\
 & \sum \omega_{Rn}(\eta_i) S'(\eta_i) = 0, \quad \sum \omega_{In}(\eta_i) S'(\eta_i) = 0 \\
 & (k-1) \sum [\omega_{Rn}(\eta_i) B_1(\eta_i) - \omega_{In}(\eta_i) B_2(\eta_i)] = 0; \\
 & k = 1, 2; \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Величины  $\alpha_{ij}$  определяются квадратурными формулами [1] в зависимости от выбора закона распределения двух согласованных систем точек  $\eta_i$ ,  $\xi_j$  на контуре  $\Gamma$ ; при распределении  $\eta_i$ ,  $\xi_j$  с постоянным шагом по  $\Gamma$  имеем

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= \frac{2\pi}{n}, \quad B_1(\eta_i) = \frac{y}{r^2} S'(\eta_i), \quad B_2(\eta_i) = \\
 &= \frac{x}{r^2} S'(\eta_i), \quad S'(\eta_i) = \sqrt{x'^2 + y'^2}.
 \end{aligned}$$

Неизвестные  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ , как и в случае гладкого контура  $L$  [1—3], являются регуляризирующими факторами и вводятся для обеспечения определенности и невырожденности системы (5.1), в которой число уравнений  $N = 2n + 3$  равно числу неизвестных значений функций  $\omega_R$ ,  $\omega_I$  в  $n$  точках каждая плюс три неизвестные постоянные  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ . Три последние неизвестные стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  [2].

6. Сходимость решения системы (5.1) порядка  $N$  к решению СИУ (1.4) с условиями (3.1) следует из доказательства в [1] и применения формулы типа прямоугольников для вычисления по замкнутому контуру  $L$  интеграла типа Коши

$$(6.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau \approx \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \frac{\omega(\tau_i) \Delta\tau_i}{\tau_i - t_k}, \quad t, \tau_i, t_k \in L$$

где  $\tau_1, t_k$  — две согласованные, взаимочередующиеся системы точек на контуре  $L$ , полученные на нем при помощи равномерного разбиения по параметру параметрического задания контура  $L$ . Если при этом  $L$  — гладкий замкнутый контур и функция  $\omega(\tau) \in H(\alpha)$  на  $L$  (гельдеровская), то сходимость интеграла (6.1) равномерная типа  $O(\ln n/n^\alpha)$ ; если  $L = \Gamma$  имеет углы или функция  $\omega(\tau)$  имеет разрывы первого рода, то сходимость интеграла (6.1) равномерная того же типа вне окрестности углов и интегральная в целом на всем контуре  $\Gamma$  [1].

Выполнение интегральной сходимости решения системы (5.1) для задач  $k = 2$  означает, в частности, сходимость по  $N$  определяемых напряжений во всех точках области  $D$ , а равномерная сходимость на  $\Gamma$  вне окрестности углов означает сходимость по  $N$  определяемых напряжений на  $D \cup \Gamma$  вне окрестности углов. Вычисление напряжений в окрестности углов требует равномерной сходимости численного решения СИУ в окрестности углов контура  $\Gamma$ .

7. Сглаживанием ядер  $A$  и  $B$  СИУ (2.6) будем называть устранение в них разрывов первого рода.

Предлагается способ сглаживания ядер  $A$  и  $B$  СИУ (2.6), основанный на устранении в них разрывов первого рода, определяемых из формул (2.3), (2.7) при  $\eta \neq \xi$ . В то же время разрывы при  $\eta = \xi$  в соответствии с формулами (2.4), (2.8) в общем случае остаются. Однако согласно (2.4), в угле, образованном дугами окружности при их параметризации в виде  $x = R \cos \eta$ ,  $y = R \sin \eta$ , значение функции  $A(\eta, \eta) = 0$ . А значение функции  $B(\eta, \eta)$  согласно (2.8), равно нулю в угле, образованном прямыми линиями, так как на них кривизна  $K = 0$ . В указанных случаях функции  $A(\eta, \eta)$ ,  $B(\eta, \eta)$  не имеют разрывов первого рода в угловых точках  $\Gamma$ .

Предлагаемое сглаживание ядер  $A$ ,  $B$  при  $\eta \neq \xi$  достигается специальным выбором параметрического задания контура  $\Gamma$  и двух согласованных систем точек на нем.

Контур  $\Gamma$  может быть задан параметрически как единым законом на всей длине, так и разными законами, например на каждой кривой  $L_l$  своими параметрическими уравнениями  $x = x(\eta)$ ,  $y = y(\eta)$ . Если такое параметрическое задание контура  $\Gamma$  найдено, то по нему, как и раньше, задаются две согласованные, равноотстоящие по параметру задания контура  $\Gamma$  системы точек  $\eta_i, \xi_j$ , с использованием которых согласно методу дискретных особенностей находим численное решение СИУ, которое может, как показывают расчеты, обладать равномерной сходимостью всюду на  $\Gamma$ .

Рассмотрим пример параметрического задания контура  $\Gamma$  в виде степенных рядов по корням многочлена Чебышева первого рода.

Пусть на кривой  $L_l \in \Lambda_2$  параметр  $\eta \in (\eta_l, \eta_{l+1})$ , а координата  $x = x_l$  изменяется от  $a$  до  $b$ . Тогда параметрически координата  $x_l(\eta)$  кривой  $L_l$  при ее линейной аппрокси-

мации может быть задана в виде

$$(7.1) \quad \begin{aligned} x_l(\eta) &= c_0 + c_1 \cos \eta_{0l}, \quad \eta_{0l} = \alpha_0 + \alpha_1 \eta \\ \eta &= \eta_l, \quad x_l(\eta_l) = a, \quad \alpha_0 + \alpha_1 \eta_l = 0, \quad l = 1, \dots, m \\ \eta &= \eta_{l+1}, \quad x_l(\eta_{l+1}) = b, \quad \alpha_0 + \alpha_1 \eta_{l+1} = \pi \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$(7.2) \quad x_l(\eta) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos \eta_{0l}, \quad \eta_{0l} = \frac{\eta - \eta_l}{\eta_{l+1} - \eta_l} \pi$$

В (7.2) аргумент косинуса изменяется на  $L_l$  от 0 до  $\pi$ . Если дискретные точки  $\eta_0$  подчинить условию

$$\eta_{0i} = \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, \dots, n$$

то это будут корни многочлена Чебышева  $T_n(x_0)$  первого рода ( $x_{0i} = \cos \eta_{0i}$ ), причем  $S'(\eta_{0i}) \neq 0$ , если в угловой точке будет находиться неподвижная расчетная точка.

При аппроксимации кривой  $L_l$  по точкам  $k+1$  для параметрического задания координаты  $x_l(\eta)$  вместо (7.1) получим

$$(7.3) \quad x_l(\eta) = \sum_{m=0,1}^k c_{lm} \cos^m \eta_{0l}$$

где все  $c_{lm}$  определяются при условии, что каждой  $k+1$  точке  $L_l$  соответствует свое значение параметра  $\eta$ . Этому удовлетворяет, например, изменение  $\eta$  вдоль  $L_l$  пропорционально длине участка  $L_l$  при обходе  $\Gamma$  от точки  $x_l(\eta_l)$  до точки  $x_l(\eta)$ .

Параметрическое задание контура  $\Gamma$  по формулам (7.1), (7.3) (координаты  $y$  аналогично  $x$ ) обеспечивает равенство пределов слева и справа первых производных  $x'(\eta)$ ,  $y'(\eta)$  во всех угловых точках контура  $\Gamma$ , так как для всех  $L_l$  в конечных точках согласно (7.3) будут выполняться равенства

$$(7.4) \quad x_l'(\eta_l) = x_l'(\eta_{l+1}) = y_l'(\eta_l) = y_l'(\eta_{l+1}) = 0$$

Следовательно, тем самым дан пример сглаживания ядер  $A, B$  при  $\eta \neq \xi$ .

8. Вычислением интегралов типа Коши в рассматриваемых задачах определяются искомые характеристики на контуре  $\Gamma$  по формулам Колосова — Мусхелишвили [5, 6].

Следуя [9], условимся интегралу типа Коши по сложному контуру  $\Gamma$  ( $\Gamma = L_1 + \dots + L_m$ ) в особых точках  $\Gamma$  не придавать определенного значения. Интеграл типа Коши во всех гладких точках, а также пределы его слева и справа в особых точках  $\Gamma$  могут быть вычислены по формуле прямоугольников (6.1). О сходимости (6.1) сказано в п. 6. Дополнительно следует отметить, что аппроксимируя  $\omega$ , при вычислении интеграла типа Коши число точек разбиения  $\Gamma$  можно взять существенно большим, чем  $n$ , используемое при решении СИУ. Так, например, в рассмотренных задачах  $n = 16 - 160$ , а число точек при вычислении интегралов типа Коши по формуле прямоугольников достаточно было взять на порядок больше. Дальнейшее увеличение числа точек (на два порядка) не меняло значение интеграла. Это же подтверждено и при решении других задач механики сплошных сред [14].

Следует отметить неприменимость формул трапеций и Симпсона непосредственно для вычисления особых интегралов типа Коши<sup>1</sup>. Поэтому основной способ повышения точности их вычисления состоит в уменьшении шага численного интегрирования.

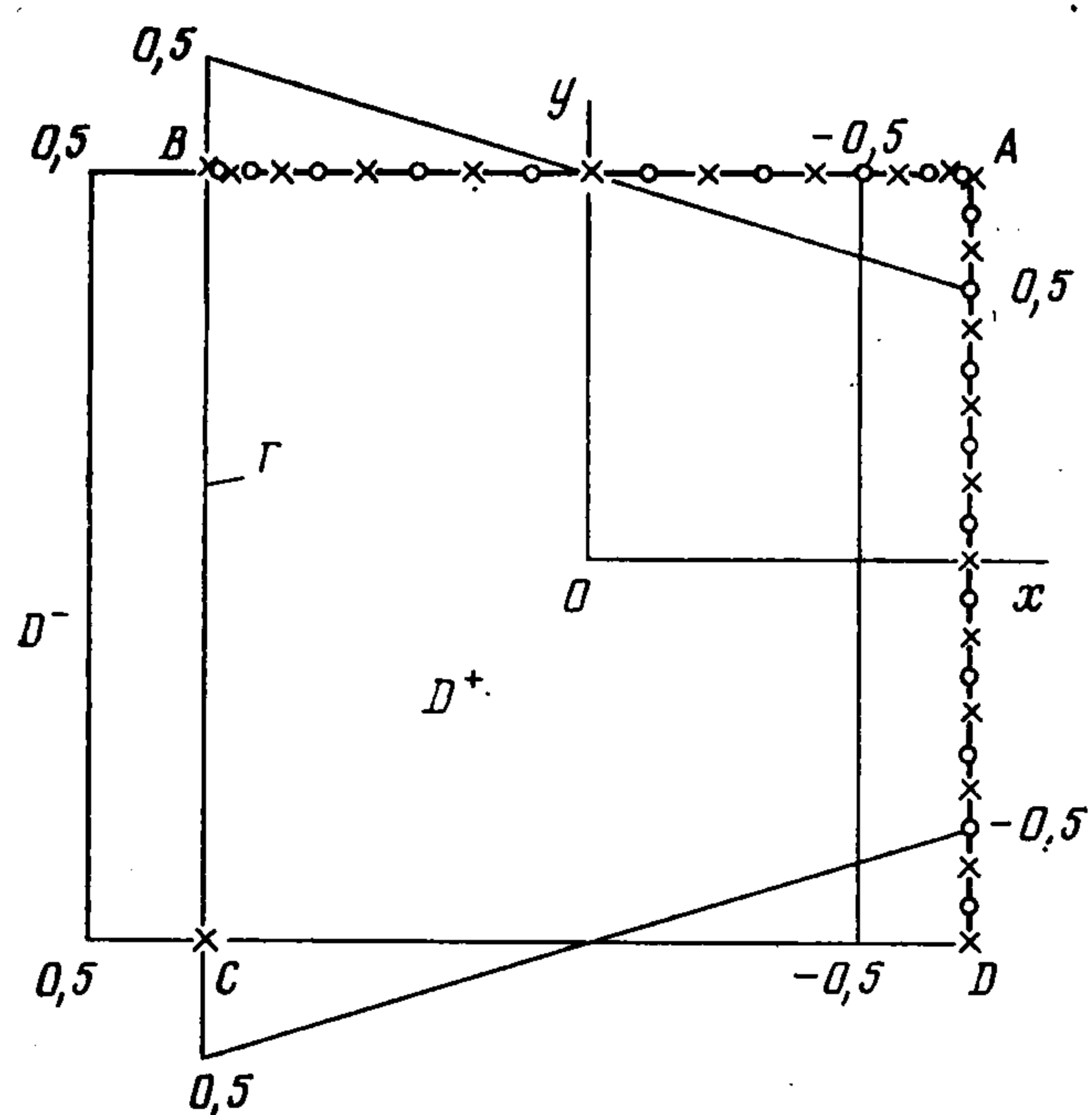
Применение ранее полученной формулы [11]

$$\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z} d\tau = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\omega(\tau_k)}{\tau_k - z} \frac{2\pi i \tau_k}{2n+1} \left[ 1 - \begin{cases} (z/\tau_k)^{n+1}, & z \in D^+ \\ (\tau_k/z)^n, & z \in D^- \end{cases} \right]$$

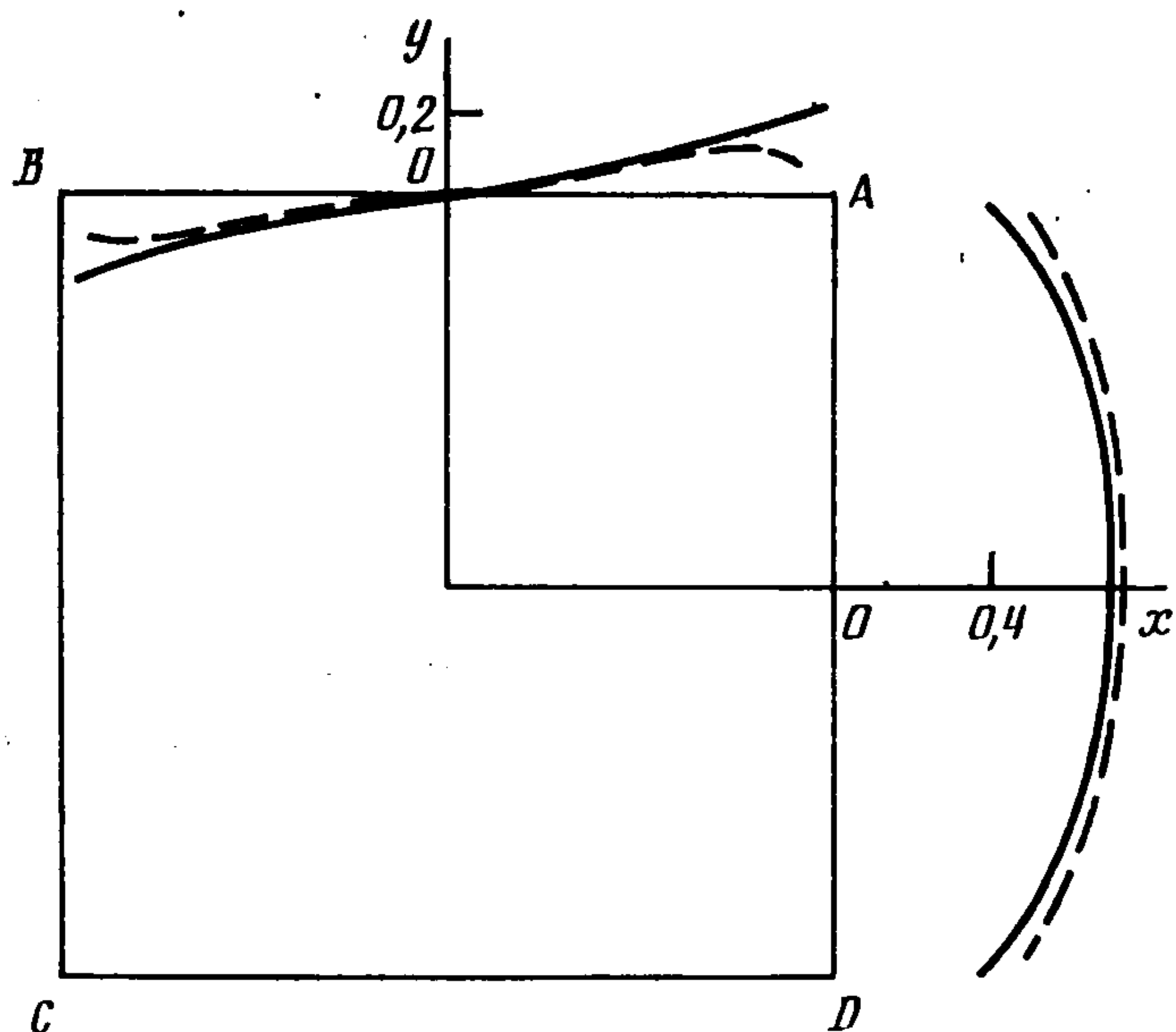
где  $z$  может приближаться к расчетной точке на окружности  $L$ , возможно, если контур  $\Gamma$  отобразить на  $L$ .

9. Вычисления проводились для задач в напряжениях ( $k = 2$ ) с прямоугольной областью  $D$ . В соответствии с изложенным в п. 3 численно установлено, что однородная система (5.1) имеет только тривиальное решение независимо от способа задания допустимых двух согласованных систем точек на прямоугольном контуре  $\Gamma$ .

<sup>1</sup> Матвеев А. Ф. О саморегуляции задачи вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта в метрике  $C$ . Препринт ИТЭФ. М., 1982, № 165. 37 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве первой тестовой задачи рассмотрено всестороннее растяжение квадрата со стороной  $h$  равномерной нагрузкой  $p$ , приложенной по его сторонам, ориентированной вдоль координатных осей. В этом случае правые части системы (5.1) — непрерывные функции  $f_{2R}$  и  $f_{2I}$ , изменяющиеся по линейным законам. Безразмерные значения  $f_{2R}$  на контуре  $\Gamma$ , отнесенные к  $ph$ , показаны на фиг. 1. График функции  $f_{2I}$  получается поворотом квадрата с графиками фиг. 1 на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки.

Были рассмотрены два разных способа задания согласованных систем точек на контуре  $\Gamma$ : с постоянным шагом на  $\Gamma$  для  $n = 40$  (показан на стороне  $DA$  фиг. 1) и по корням многочлена Чебышева первого рода (показан там же на стороне  $AB$ ). В обоих случаях в углах контура  $\Gamma$  помещаются расчетные точки, обозначенные крестиками, между РТ находятся дискретные особенности, обозначенные точками.

Решение системы (5.1) относительно  $\omega_{Rn}$ ,  $\omega_{In}$  для  $n = 40$  приведено на фиг. 2 для  $\omega_R$  (для  $\omega_I$  получается поворотом  $\omega_R$  на  $\pi/2$  против часовой стрелки) штриховыми линиями для первого способа задания согласованных систем точек и сплошной линией для второго способа.

Функция  $\omega_R$  симметрична относительно оси  $x$  и антисимметрична относительно оси  $y$ , а функция  $\omega_I$  обладает противоположными свойствами. На графиках фиг. 2 подтверждаются все утверждения п. 6 о сходимости решения и эффективность сглаживания ядер СИУ.

Расчет напряжений во всех точках квадрата, на его сторонах и в углах по решению на системе точек, заданных по второму способу, обеспечивается с ошибкой не более 1% уже при  $n = 40$  и выполняется согласно п. 8.

Доказано, что решение аналогичных внешних задач для прямоугольного отверстия, однородно нагруженного по контуру  $\Gamma$  или на бесконечности, сводится к решению СИУ (1.4) с правой частью, соответствующей внутренней задаче (см. фиг. 1), т. е. его решение  $\omega_{Rn}$ ,  $\omega_{In}$  совпадает с решением на фиг. 2. Напряжения на контуре в этих случаях определяются двумя функциями  $f_{2R}'(t)$ ,  $\text{Re } \varphi'^-(t)$  и имеют разрывы первого рода в угловых точках.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
2. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Солдатов М. М. Метод дискретных особенностей в плоских задачах теории упругости.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 781—789.
3. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Солдатов М. М. К численному решению задач теории упругости.— Докл. АН СССР, 1984, т. 277, № 2, с. 323—327.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
7. Солдатов М. М. Метод дискретных особенностей в плоских и пространственных задачах теории упругости.— В кн.: Вопросы кибернетики: Численный экспери-

- мент в прикладной аэрогидродинамике. М.: Науч. совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. 1986, с. 141—166.
8. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
  9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
  10. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
  11. *Лифанов И. К., Солдатов М. М.* Метод дискретных особенностей в плоских задачах.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985, с. 248—253.
  12. *Перлин П. И., Шалюхин Ю. Н.* К численному решению интегральных уравнений плоской теории упругости.— Изв. КазССР. Сер. физ-мат., 1976, № 1, с. 86—88.
  13. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 551 с.
  14. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К.* Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975. 424 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.IV.1986