Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 539.3

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Зеленин А. А., Зубов Л. М.

На основе трехмерных уравнений нелинейной теории упругости рассматривается проблема разветвления форм равновесия упругого тела. Для консервативных внешних сил выводятся необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной линеаризованной краевой задачи, которые используются при составлении уравнения разветвления. Применительно к трехмерным задачам нелинейной теории упругости строится процедура метода Ляпунова — Шмидта в операторной форме, позволяющего определить число решений, ответвляющихся в точке бифуркации, и получить асимптотические представления решений при нагрузках, близких к критическим. Общая теория иллюстрируется исследованием закритического поведения толстостенного цилиндра, нагруженного по боковой поверхности.

1. Равновесие упругого тела описывается уравнениями [1]

$$\nabla\cdot\mathbf{D}+\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{D}(\mathbf{r},\mathbf{C}(\mathbf{r}))=dW/d\mathbf{C} \tag{1.1}$$
$$\mathbf{C}=\nabla\mathbf{R},\quad \mathbf{r}=x_k\mathbf{i}_k,\quad \nabla=\mathbf{i}_k\partial/\partial x_k$$

Здесь $\mathbf{D}$ — тензор напряжений Пиолы, W — удельная потенциальная энергия деформации, $\mathbf{C}$ — градиент места, ∇ — набла-оператор в отсчетной (недеформированной) конфигурации, x_k- декартовы координаты недеформированного тела, $\mathbf{i}_k$ — орты декартовых координат, $\mathbf{R}$ — вектор места точки деформированного тела, $\mathbf{k}$ — интенсивность объемных сил на единицу объема отсчетной конфигурации. Явная зависимость тензора Пиолы от $\mathbf{r}$, т. е. от лагранжевых координат в (1.1), имеет место для неоднородного тела. Для однородного тела $\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathbf{C}(\mathbf{r}))$.

Предположим, что поверхность тела σ с единичной внешней нормалью $\mathbf{n}$ в отсчетной конфигурации состоит из трех частей. На σ_1 задана внешняя нагрузка: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{f}$, на σ_2 — вектор вращения: $\mathbf{R}=\mathbf{R}_*$; частицы поверхности σ_3 в деформированном состоянии контактируют без трения с гладкой твердой поверхностью П.

Интенсивности внешних сил $\mathbf{k}$ и $\mathbf{f}$ не обязательно являются заданными функциями лагранжевых координат. Они могут заданным образом зависеть от вектора $\mathbf{R}$ и градиента места $\mathbf{C}$. Эта зависимость в дальнейшем предполагается такой, что нагрузка консервативна. Последнее означает, что элементарная работа внешней нагрузки представляет собой вариацию некоторого функционала Ф

$$\int\limits_v \mathbf{k}[\mathbf{r},\mathbf{R}(\mathbf{r}),\mathbf{C}(\mathbf{r})]\cdot\delta\mathbf{R}\,dv+\int\limits_{\sigma_1}\mathbf{f}[\mathbf{r},\mathbf{R}(\mathbf{r}),\mathbf{C}(\mathbf{r})]\cdot\delta\mathbf{R}\,d\sigma=\delta\Phi \tag{1.2}$$

где v — объем, занимаемый упругим телом в отсчетной конфигурации.

Пусть $\mathbf{R}=\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r})$ — некоторое известное решение задачи о равновесии, определяющее докритическое состояние упругого тела. Для изучения решений, близких к $\boldsymbol{\rho}$, положим $\mathbf{R}=\boldsymbol{\rho}+\mathbf{w}$. Используя (1.1), нелинейную краевую задачу относительно вектора $\mathbf{w}$ запишем следующим образом:

$$\nabla\cdot\mathbf{D}^{\boldsymbol{\cdot}}+\mathbf{k}^{\boldsymbol{\cdot}}=-\mathbf{K}\ \text{в}\ v \tag{1.3}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^{\boldsymbol{\cdot}}-\mathbf{f}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{F}\ \text{на}\ \sigma_1,\quad \mathbf{w}=0\ \text{на}\ \sigma_2 \tag{1.4}$$

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad & \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^{\cdot}\cdot\mathbf{G}+S\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}=\boldsymbol{\tau},\quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{w}=\varphi \text{ на } \sigma_3\\
& \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}=0,\quad \mathbf{D}^{\cdot}=\frac{d}{d\eta}\mathbf{D}(\mathbf{r},\nabla\boldsymbol{\rho}+\eta\nabla\mathbf{w})\,|_{\eta=0}\\
& \mathbf{f}^{\cdot}=\frac{d}{d\eta}\mathbf{f}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}+\eta\mathbf{w},\nabla\boldsymbol{\rho}+\eta\nabla\mathbf{w})\,|_{\eta=0}\\
& \mathbf{k}^{\cdot}=\frac{d}{d\eta}\mathbf{k}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}+\eta\mathbf{w},\nabla\boldsymbol{\rho}+\eta\nabla\mathbf{w})\,|_{\eta=0}\\
& \mathbf{G}=\mathbf{E}-\mathbf{N}\mathbf{N},\ \ \mathbf{B}=-\mathbf{G}\cdot(\nabla\boldsymbol{\rho})^{-1}\cdot\nabla\mathbf{N}\\
& S=\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\det(\nabla\boldsymbol{\rho})(\mathbf{n}\cdot\Lambda^{-1}\cdot\mathbf{n})^{1/2},\ \ \Lambda=\nabla\boldsymbol{\rho}\cdot(\nabla\boldsymbol{\rho})^{T}
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathbf{N}$ — нормаль к поверхности тела в деформированном состоянии, соответствующем основному решению $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{B}$ — второй фундаментальный тензор [2] поверхности П, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши в основном (доктритическом) состоянии. Дифференциальные выражения $\mathbf{D}^{\cdot}$, $\mathbf{k}^{\cdot}$, $\mathbf{f}^{\cdot}$ в (1.3)—(1.5) линейны относительно $\mathbf{w}$. Выражения $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{\tau}$, φ не содержат линейных по $\mathbf{w}$ членов. Это означает, что если положить $\mathbf{w}=\varepsilon\mathbf{w}_0$, то разложение данных выражений по степеням параметра ε будет начинаться с членов не ниже второго порядка.

В (1.5) использованы полученные в [3] линеаризованные граничные условия на поверхности контакта предварительно напряженного упругого тела с абсолютно твердым телом.

Основное решение $\boldsymbol{\rho}$ зависит от параметра нагружения p. Следовательно, параметр p участвует в формулировке краевой задачи (1.3)—(1.5).

Отбросив в (1.3)—(1.5) нелинейные члены, получим однородную линейную краевую задачу

$$
(1.6)\qquad \nabla\cdot\mathbf{D}^{\cdot}+\mathbf{k}^{\cdot}=0 \text{ в } v
$$

$$
(1.7)\qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^{\cdot}-\mathbf{f}^{\cdot}=0 \text{ на } \sigma_1,\quad \mathbf{w}=0 \text{ на } \sigma_2
$$

$$
(1.8)\qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^{\cdot}\cdot\mathbf{G}+S\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}=0,\quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{w}=0 \text{ на } \sigma_3
$$

При некоторых значениях параметра p, называемых критическими нагрузками, задача (1.6)—(1.8) относительно вектора $\mathbf{w}$ может иметь нетривиальные решения. Пусть p_0 — одно из собственных значений краевой задачи (1.6)—(1.8). В общем случае собственному значению p_0 может соответствовать несколько собственных функций (мод выпучивания), которые обозначим $\boldsymbol{\psi}_m$ $(m=1, 2, \ldots N)$.

При $p=p_0$ краевая задача (1.3)—(1.5) разрешима не для любых правых частей $\mathbf{F}$, $-\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\tau}$, φ. Для вывода условий разрешимости умножим уравнение равновесия (1.3) на собственную вектор-функцию $\boldsymbol{\psi}_m$ и проинтегрируем по области v. Применив теорему о дивергенции, учтя тождество [4]

$$
(1.9)\qquad \mathbf{D}^{\cdot}(\nabla\mathbf{w})\cdot\cdot(\nabla\boldsymbol{\psi}_m)^{T}=\mathbf{D}^{\cdot}(\nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\cdot(\nabla\mathbf{w})^{T}
$$

и граничные условия (1.4), (1.5), (1.7), получим

$$
\begin{aligned}
(1.10)\qquad & \int_v \mathbf{k}^{\cdot}(\mathbf{w},\nabla\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,dv+\int_{\sigma_1}\mathbf{f}^{\cdot}(\mathbf{w},\nabla\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\sigma-\\
& -\int_{\sigma_3} S\boldsymbol{\psi}_m\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}\,d\sigma-\int_v \mathbf{D}^{\cdot}(\nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\cdot(\nabla\mathbf{w})^{T}\,dv+\\
& +\int_v \mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,dv+\int_{\sigma_1}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\sigma+\int_{\sigma_3}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\sigma=0
\end{aligned}
$$

На основании (1.4)—(1.7) имеем

$$\int_v \mathbf{D}^\cdot(\nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\cdot(\nabla\mathbf{w})^T\,dv = \int_v \mathbf{k}^\cdot(\boldsymbol{\psi}_m, \nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\mathbf{w}\,dv + \int_{\sigma_1}\mathbf{f}^\cdot(\boldsymbol{\psi}_m, \nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\mathbf{w}\,d\sigma - \int_{\sigma_3} S\mathbf{w}\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\sigma + \int_{\sigma_3}\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^\cdot(\nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\mathbf{N}\varphi\,d\sigma \tag{1.11}$$

Соотношение (1.2), выражающее существование потенциала внешних сил, влечет равенство [5]

$$\int_v \mathbf{k}^\cdot(\mathbf{w}, \nabla\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,dv + \int_{\sigma_1}\mathbf{f}^\cdot(\mathbf{w}, \nabla\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\sigma = \int_v \mathbf{k}^\cdot(\boldsymbol{\psi}_m, \nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\mathbf{w}\,dv + \int_{\sigma_1}\mathbf{f}^\cdot(\boldsymbol{\psi}_m, \nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\mathbf{w}\,d\sigma \tag{1.12}$$

Из (1.10)—(1.12) и свойства симметричности тензора $\mathbf{B}$ получаем

$$\int_v \mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,dv + \int_{\sigma_1}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\sigma + \int_{\sigma_3}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\sigma - \int_{\sigma_3}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^\cdot(\nabla\boldsymbol{\psi}_m)\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = 0 \tag{1.13}$$

Соотношения (1.13), выведенные как необходимые условия разрешимости, при определенных допущениях, сформулированных ниже, являются также и достаточными условиями разрешимости задачи (1.3)—(1.5) при $p = p_0$.

2. Будем предполагать, что упругий материал удовлетворяет строгому неравенству Адамара [6]

$$\frac{\partial^2 W}{\partial C_{st}\partial C_{mn}}\, a_m b_n a_s b_t > 0, \quad C_{mn} = \mathbf{i}_m\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{i}_n$$

где a_m, b_n — компоненты двух произвольных ненулевых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Из этого неравенства следует, что система уравнений, получаемая из (1.6) путем проектирования на оси координат $\mathbf{i}_k$, будет сильно эллиптической, однородной с порядком однородности, равным двум.

Предположим также, что $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, а граничные условия (1.7) являются дополнительными [7]. Поскольку для упругого материала общего вида и для произвольного основного решения установить дополнительность краевых условий затруднительно, это требование следует проверять в каждой конкретной задаче. Заметим, что кинематическое граничное условие $\mathbf{w} = 0$, являющееся условием типа Дирихле, удовлетворяет требованию дополнительности для любых сильно эллиптических систем [8].

При указанных требованиях краевая задача (1.6), (1.7) эллиптическая [7] и ей отвечает оператор A, действующий из Банахова пространства E_1, вектор-функций $\mathbf{w}$, компоненты которых принадлежат пространству Соболева $W_2^2(v)$ и удовлетворяют краевым условиям на σ_2, в банахово пространство E_2, состоящее из набора функций $h = (-\mathbf{K}, \mathbf{F})$, в котором компоненты вектор-функций $\mathbf{K}$ принадлежат пространству Лебега $L_2(v)$, а компоненты вектор-функций $\mathbf{F}$ — пространству Слободецкого $W_2^{1/2}(\sigma_1)$. Кроме того, в силу (1.9), (1.12) для любых вектор-функций $\mathbf{w}_1 \in E_1$, $\mathbf{w}_2 \in E_1$ справедлива формула Грина

$$\int_v [\nabla\cdot\mathbf{D}^\cdot(\nabla\mathbf{w}_1)]\cdot\mathbf{w}_2\,dv - \int_{\sigma_1}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^\cdot(\nabla\mathbf{w}_1)\cdot\mathbf{w}_2 - \mathbf{f}^\cdot(\mathbf{w}_1, \nabla\mathbf{w}_1)\cdot\mathbf{w}_2]\,d\sigma = \int_v [\nabla\cdot\mathbf{D}^\cdot(\nabla\mathbf{w}_2)]\cdot\mathbf{w}_1\,dv - \int_{\sigma_1}[\mathbf{n}\cdot D^\cdot(\nabla\mathbf{w}_2)\cdot\mathbf{w}_1 - \mathbf{f}^\cdot(\mathbf{w}_2, \nabla\mathbf{w}_2)\cdot\mathbf{w}_1]\,d\sigma \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что задача (1.6), (1.7) формально самосопряженная. Тогда согласно [7] соотношения (1.13) в случае $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ не только необходимы, но и достаточны для разрешимости задачи (1.3), (1.4) при условии, что правая часть $h = (-\mathbf{K}, \mathbf{F})$ принадлежит пространству E_2.

Запишем краевую задачу (1.3), (1.4) в операторной форме

$$A\mathbf{w} = h(\mathbf{w}) \tag{2.2}$$

Здесь A — линейный, $h(\mathbf{w})$ — нелинейный операторы, действующие из E_1 в E_2. Обозначим $E_1{}^N$ подпространство нулей оператора A размерности N с базисными вектор-функциями $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N$, $E_1^{\infty-N}$ — дополнение подпространства $E_1{}^N$ до E_1. Пусть A^* — сужение оператора A на $E_1^{\infty-N}$. В отличие от оператора A он будет иметь ограниченный обратный оператор.

Для исследования форм равновесия упругого тела при нагрузках, близких к критической, положим

$$p = p_0 + \lambda, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \boldsymbol{\psi}_i, \quad \mathbf{u} \in E_1^{\infty-N}$$

где λ — малый параметр. Операторное уравнение (2.2) примет вид

$$A^*\mathbf{u} = h(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \lambda) \tag{2.3}$$

В силу теоремы о неявных операторах [9] в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{v} = 0$, $\lambda = 0$ существует единственное решение уравнения (2.3), $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{u}(\xi_1, \ldots, \xi_N, \lambda)$, непрерывное и такое, что $u(0, 0) = 0$. Подставляя это решение в условия разрешимости (1.13), получим уравнения разветвления, из которых определяются значения параметров $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Детальное рассмотрение уравнений разветвления содержится в [9].

3. Для иллюстрации изложенного выше подхода к изучению ветвления решений статических задач рассмотрим выпучивание толстого полого цилиндра, защемленного между двумя жесткими неподвижными пластинами, под действием внешнего гидростатического давления интенсивности q.

Уравнения равновесия (1.1) при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.1}$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты в недеформированном состоянии тела $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{i}_3$ — соответствующие им базисные векторы. Граничные условия поставленной задачи таковы:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}\,|_{r=r_1} = 0, \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}\,|_{r=r_0} = -qJ\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{C}^T)^{-1}; \quad J = \det \mathbf{C} \tag{3.2}$$

где r_0, r_1 — внешний и внутренний радиусы цилиндра.

В качестве определяющего соотношения примем модель полулинейного материала [1] ($\mathbf{U}$ — тензор искажения, μ, ν — постоянные)

$$\mathbf{D} = 2\mu\left(\frac{\nu s_1}{1-2\nu} - 1\right)\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C} + 2\mu\mathbf{C} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}, \quad s_1 = \operatorname{tr} \mathbf{U} - 3$$

Краевая задача (3.1)—(3.3) имеет следующее осесимметричное решение [1]:

$$\boldsymbol{\rho} = (Q_1\eta + Q_2\eta^{-1})\,\mathbf{e}_r + \mathbf{i}_3 z, \quad Q_1 = \frac{k-1-pk}{k-1-p(1-2\nu+k)} \tag{3.4}$$

$$Q_2 = \frac{kp}{k-1-p(1-2\nu+k)}, \quad k = \frac{r_1^2}{r_0^2}, \quad p = \frac{q}{2\mu}, \quad \eta = \frac{r}{r_0}$$

Будем отыскивать плоские формы равновесия, близкие к решению (3.4), т. е. положим

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + u(\eta, \theta)\, \mathbf{e}_r + v(\eta, \theta)\, \mathbf{e}_\theta \tag{3.5}$$

С учетом (3.5) краевую задачу (1.3), (1.4) запишем в виде

$$l(x, D)\, \mathrm{w}(x) = -\mathbf{K}(\mathrm{w}, x) \tag{3.6}$$

$$b(x, D)\, \mathrm{w}(x) = \mathbf{F}(\mathrm{w}, x) \text{ при } \eta = 1,\ \eta = k_1 \tag{3.7}$$

Здесь

$$x = (\eta, \theta),\ \mathrm{w} = (u, v),\ \mathbf{K} = (K_1, K_2),\ \mathbf{F} = (F_1, F_2)$$
$$k_1 = r_1 r_0^{-1},\ l(x, D)\,\mathrm{w}(x) \equiv [l_{11}(x, D)\, u(x) + l_{12}(x, D)\, v(x),$$
$$l_{21}(x, D)\, u(x) + l_{22}(x, D)\, v(x)]$$
$$b(x, D)\,\mathrm{w}(x) \equiv [b_{11}(x, D)\, u(x) + b_{12}(x, D)\, v(x),$$
$$b_{21}(x, D)\, u(x) + b_{22}(x, D)\, v(x)]$$
$$l_{11}(x, D) = \partial_1^2 + \eta^{-1}\partial_1 + B\eta^{-2}\partial_2^2 - \eta^{-2}$$
$$l_{12}(x, D) = (1 - B)\,\eta^{-1}\partial_1\partial_2 - (1 + B)\,\eta^{-2}\partial_2$$
$$l_{21}(x, D) = (1 - B)\,\eta^{-1}\partial_1\partial_2 + (1 + B)\,\eta^{-2}\partial_2$$
$$l_{22}(x, D) = \eta^{-2}\partial_2^2 + B\partial_1^2 + B\eta^{-1}\partial_1 - B\eta^{-2}$$
$$b_{11}(x, D) = \nu_1(\partial_1 + \eta^{-1}) - \eta^{-1}p_1$$
$$b_{12}(x, D) = \nu_1\eta^{-1}\partial_2 - \eta^{-1}p_1\partial_2$$
$$b_{21}(x, D) = -\nu_1 B\eta^{-1}\partial_2 + \eta^{-1}p_1\partial_2$$
$$b_{22}(x, D) = \nu_1 B(\partial_1 + \eta^{-1}) - \eta^{-1}p_1$$
$$K_1 = -(1 - \nu)^{-1}(\partial_1 M_1 - \eta^{-1}\partial_2 N_1 + Q_3^{-1}\eta^{-1}\partial_2 N)$$
$$K_2 = -(1 - \nu)^{-1}(\partial_1 N_1 + \eta^{-1}\partial_2 M_1 - Q_3^{-1}\partial_1 N)$$
$$F_1 = (1 - 2\nu)^{-1}(M_1 - 1),\ F_2 = (1 - 2\nu)^{-1}(N_1 - Q_3^{-1}N)$$
$$Q_3 = 2Q_1,\ \nu_1 = (1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1}$$
$$B = (1 - \nu)^{-1}Q_3^{-1}[(1 - \nu)\,Q_3 - 1]$$
$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial\eta},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial\theta},\ N = \partial_1 v + \eta^{-1}v - \eta^{-1}\partial_2 u$$
$$M = Q_3 + \partial_1 u + \eta^{-1}u + \eta^{-1}\partial_2 v$$
$$N_1 = NQ^{-1},\ M_1 = MQ^{-1},\ Q = (M^2 + N^2)^{1/2}$$
$$p_1 = \begin{cases} 1 - p, & \eta = 1 \\ 1 & \eta = k_1 \end{cases}$$

Дифференциальные выражения l и b в левой части (3.6), (3.7) линейные. Дифференциальные выражения $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}$ не содержат линейных составляющих. Можно показать, что при $\nu \neq 0{,}5$ система (3.6) правильно-эллиптическая [7], а граничные условия (3.7) являются дополнительными. Поставим в соответствие левым частям уравнений (3.6), (3.7) линейный оператор $A\mathrm{w} \equiv (l\mathrm{w}, b\mathrm{w})$, который определим на банаховом пространстве E_1.

Предположим, что искомые функции u, v принадлежат пространству $W_2^4(v)$, где v: $(k_1 < \eta < 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$. Тогда можно показать, что правые части уравнений (3.6), (3.7) принадлежат E_2. Это позволяет записать краевую задачу (3.6), (3.7) в операторной форме

$$A\mathrm{w} = \tau,\ \tau \equiv (-\mathbf{K}, \mathbf{F}) \tag{3.8}$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (3.8), согласно (1.13), будут иметь вид

$$(3.9)\qquad -\int_{k_1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\eta\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\eta\,d\theta-\nu_1^{-1}\int_{0}^{2\pi}\eta\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\psi}_m\,d\theta\,\Big|_{\eta=k_1}^{\eta=1}=0,\quad m=1,2,\ldots$$

Здесь $\boldsymbol{\psi}_m=(\psi_m^1,\psi_m^2)$ — собственные векторы оператора A, образующие базис подпространства нулей этого оператора.

Для нахождения критических значений параметра p, при которых возникает бифуркация равновесия цилиндра, рассмотрим линеаризованную задачу

$$(3.10)\qquad A\mathrm{w}=0$$

Следуя [1], собственные функции задачи (3.10) будем искать в виде

$$(3.11)\qquad u_n=a_n(\eta)\cos n\theta,\quad v_n=b_n(\eta)\sin n\theta$$
$$b_0(\eta)=0,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Подставим (3.11) в левую часть уравнений (3.6) и решим их относительно a_n, b_n при $K=0$. В результате получаем

$$(3.12)\qquad a_0=\frac{1}{2}A_0\eta+\frac{C_0}{\eta},\quad b_0=0$$
$$a_1=\frac{3B-1}{8}A_1\eta^2+\frac{1+B}{2}B_1\ln\eta+C_1+\frac{D_1}{\eta^2}$$
$$b_1=\frac{3-B}{8}A_1\eta^2+\frac{B-1}{2}B_1-\frac{1+B}{2}B_1\ln\eta-C_1+\frac{D_1}{\eta^2}$$
$$a_n=\frac{2B-Dn}{4(n+1)}A_n\eta^{n+1}-\frac{2B+Dn}{4(n-1)}B_n\frac{1}{\eta^{n-1}}+C_n\eta^{n-1}+D_n\frac{1}{\eta^{n+1}},$$
$$b_n=\frac{2B+D(n+2)}{4(n+1)}A_n\eta^{n+1}-\frac{D(n-2)-2B}{4(n-1)}B_n\frac{1}{\eta^{n-1}}-$$
$$-C_n\eta^{n-1}+D_n\frac{1}{\eta^{n+1}},\quad n=2,3,4,\ldots$$

Здесь $D=1-B$, A_0, C_0, A_i, B_i, C_i, D_i $(i=1,2,\ldots)$ — постоянные интегрирования.

Подставляя (3.11) в граничные условия (3.7) с нулевыми правыми частями, получаем с учетом (3.12) систему уравнений для определения постоянных интегрирования. Для каждого $n=2,3,\ldots$, приравняв нулю ее определитель, находим собственные значения оператора A

$$p=p_0=\frac{(1-k)S}{2(1-\nu)+(1-k)S},\quad S=\frac{k-\gamma}{\gamma+k^2+k\sqrt{(1-k)^2+4\gamma}}$$
$$\gamma=\frac{n^2(1-k)^2}{k^n+k^{-n}-2},\quad n=2,3,\ldots$$

Решая полученную систему для случая $n=1$, имеем $A_1=B_1=D_1=0$, C_1 — произвольная постоянная, что соответствует движению цилиндра как абсолютно твердого тела. Поэтому данный случай исключается из рассмотрения. При $n=0$ имеем $A_0=B_0=0$.

Критическое давление p_* является минимальным собственным значением из набора собственных чисел $p_0(n,k)$, где n принимает последовательно целые значения 2, 3, . . ., при фиксированном k. Можно показать, что собственные значения p_0 всегда простые и принимают наименьшее значение при $n=2$.

Пусть λ—малый параметр добавочного нагружения. Тогда, полагая $p=p_0+\lambda$, уравнения (3.8) можно записать в виде (A_0 — оператор A, в котором величина p заменена на собственное значение p_0)

(3.13) $$A_0 \mathbf{w} = \tau - A\mathbf{w} + A_0\mathbf{w} \equiv h(\mathbf{w}), \quad h(\mathbf{w}) \equiv (-\mathbf{t}, \mathbf{T})$$

(3.14) $$\mathbf{t} = (K^1, K^2), \ \mathbf{T} = (F^1, F^2)$$
$$K^1 = K_1 - \eta^{-1}\partial_2 N (A - A_0), \ K^2 = K_2 + (A - A_0)\partial_1 N$$
$$F^1 = F_1 - p_2\eta^{-1}(u + \partial_2 v), \quad F^2 = F_2 - \nu_1 N (A - A_0) - - p_2\eta^{-1}(v - \partial_2 u)$$
$$p_2 = \begin{cases} \lambda, & \eta = 1 \\ 0, & \eta = k_1 \end{cases}$$

Будем искать малые решения уравнения (3.13) в виде ряда

(3.15) $$\mathbf{w} = \xi\psi_n + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{w}_{i0}\xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{w}_{ij}\lambda^j$$
$$\mathbf{w}_{ij} \equiv (u_{ij}(\eta, \theta), v_{ij}(\eta, \theta))$$

Здесь ξ — формальный параметр, $\psi_n = (u_n, v_n)$ — собственная функция оператора A_0. Разлагая в правой части уравнения (3.13) члены, содержащие u и v, в ряд по степеням u, v, а члены, содержащие p, — в ряд по степеням λ, получим, учитывая (3.15)

(3.16) $$h(\mathbf{w}) = \sum_{i+j \geqslant 1} h_{ij}\xi^i\lambda^j, \quad h_{ij} \equiv (-\mathbf{t}_{ij}, \mathbf{T}_{ij})$$
$$\mathbf{t}_{ij} \equiv (K_{ij}^1, K_{ij}^2), \quad \mathbf{T}_{ij} \equiv (F_{ij}^1, F_{ij}^2)$$

где K_{ij}^1, K_{ij}^2, F_{ij}^1, F_{ij}^2 — коэффициенты разложения функций K^1, K^2, F^1, F^2, определенных соотношениями (3.14).

Подставляя (3.15) в (3.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\xi^i\lambda^j$, с учетом (3.16) получаем рекуррентную систему для нахождения $\mathbf{w}_{ij}$

(3.17) $$A_0^* \mathbf{w}_{ij} = h_{ij}$$

из которой находим все $\mathbf{w}_{ij}$. Здесь A_0^* — сужение оператора A_0 на $E_1^{\infty-1}$.

Для получения уравнения разветвления подставим (3.15) в условие разрешимости (3.9) для уравнения (3.13). В результате получаем

(3.18) $$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i0}\xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}\lambda^j = 0$$
$$L_{ij} = -\int_{k_1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \eta \mathbf{t}_{ij}\cdot\psi_n \, d\eta\, d\theta - \nu_1^{-1}\int_0^{2\pi} \eta \mathbf{T}_{ij}\cdot\psi_n \, d\theta \Big|_{\eta=k}^{\eta=1}$$

Первые коэффициенты уравнения (3.18) будут иметь вид

$$L_{01} = 0, \ L_{02} = 0, \ L_{20} = 0$$
$$L_{11} = \delta \int_{k_1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \eta N_n^2 \, d\eta\, d\theta + \nu_1^{-1}\int_0^{2\pi} (u_n^2 + u_n\partial_2 v_n + v_n^2 - v_n\partial_2 u_n)\, d\theta|_{\eta=1}$$
$$L_{30} = \delta_1^{-1}\int_{k_1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \eta\left(N_n^2 M_{20} - Q_{10}^{-1}N_n^2 M_n^2 + 2N_n M_n N_{20} + \frac{1}{4}Q_{10}^{-1}N_n^4\right) d\eta\, d\theta$$
$$\delta = \frac{k-1}{2\nu_1(k-1-p_0 k)^2}, \quad \delta_1 = 4Q_{10}^2(1-\nu), \quad Q_{10} = Q_1|_{p=p_0}$$
$$N_n = \partial_1 v_n + \eta^{-1}v_n - \eta^{-1}\partial_2 u_n, \ M_n = \partial_1 u_n + \eta^{-1}u_n + \eta^{-1}\partial_2 v_n$$
$$N_{20} = \partial_1 v_{20} + \eta^{-1}v_{20} - \eta^{-1}\partial_2 u_{20}, M_{20} = \partial_1 u_{20} + \eta^{-1}u_{20} + \eta^{-1}\partial_2 v_{20}$$

Приближенно уравнение разветвления (3.18) примет вид $L_{30}\xi^3 + L_{11}\xi\lambda \approx 0$, откуда следует, что $\xi = \pm(L_{11}L_{30}^{-1}\lambda)^{1/2} + o(\lambda^{1/2})$, и решение

(3.15) уравнения (3.13) запишется в форме

$$\mathrm{w} = \pm(-L_{11}L_{30}^{-1}\lambda)^{1/2}\psi_n - (L_{11}L_{30}^{-1})\lambda \mathrm{w}_{20} \pm (-L_{11}L_{30}^{-1}\lambda)^{1/2}\mathrm{w}_{11}\lambda + o(\lambda)$$

В зависимости от знака $(-L_{11}L_{30}{}^{-1})$ в одной из полуокрестностей $(p_0 - \varepsilon, p_0)$ или $(p_0, p_0 + \varepsilon)$ будет возникать два новых решения, а в другой новых решений возникать не будет.

Численное исследование коэффициентов L_{11}, L_{30} для случая минимального собственного значения p_* показало, что всегда $L_{11} < 0$; $L_{30} > 0$ при $k_1 > 0{,}5098$; $L_{30} < 0$ при $k_1 < 0{,}5097$ при всех допустимых значениях ν.

Таким образом, для цилиндров, геометрический параметр которых характеризуется неравенством $k_1 > 0{,}5098$ (сюда относятся и тонкостенные цилиндры), формы равновесия, отличающиеся от осесимметричного состояния (3.4), существуют при нагрузках, больших критической p_*. Для толстостенных цилиндров ($k_1 < 0{,}5097$) формы равновесия, близкие к осесимметричной, существуют лишь при давлениях, меньших критического.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
3. *Зубов Л. М.* Об условиях единственности в малом состоянии гидростатического сжатия упругого тела.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 497—506.
4. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости: Случай наложения малой деформации на конечную.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 848—852.
5. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
6. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
7. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения.— Мат. сб., 1969, т. 78, вып. 3, с. 446—472.
8. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II.— Comm. Pure Appl. Math., 1964, v. 17, No. 1, p. 35—92.
9. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
8.IV.1986