

УДК 531.384

## О ВЛИЯНИИ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ НА ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Суликашвили Р. С.

В центральном ньютоновском поле сил исследуется задача о влиянии моментов инерции высших порядков на движение твердого тела, закрепленного в центре масс и обладающего шаровым центральным эллипсоидом инерции. Рассматриваются однородные тела простейших геометрических форм: куб, конус и цилиндр. В силу различия симметрий у этих тел, различен характер их движений.

Уравнения движения конуса и цилиндра проинтегрированы в ультра- и гиперэллиптических функциях, соответственно. Указаны множества положений равновесия, перманентных вращений и регулярных прецессий, исследованы их ветвления и устойчивость.

В отличие от случая, когда учитываются моменты инерции только второго порядка, здесь выявляются две особенности: 1) существуют два семейства наклонных положений относительного равновесия; 2) для тела в форме конуса прямое положение относительного равновесия неустойчиво, если вершина конуса расположена между притягивающим центром и неподвижной точкой и устойчиво в противоположном случае, что не имеет аналога для перманентных вращений тела с трехосным центральным эллипсоидом инерции.

1. Пусть  $O\xi\eta\zeta$  — неподвижная система координат с началом в центре масс тела, отстоящим от притягивающего центра на расстоянии  $R$  и осью  $\zeta$ , направленной по восходящей местной вертикали,  $Ox_1x_2x_3$  — система координат, жестко связанная с телом. Взаимную ориентацию осей  $\xi, \eta, \zeta$  и  $x_1, x_2, x_3$  зададим матрицей направляющих косинусов. Орты осей  $\xi, \eta, \zeta$  обозначим  $\alpha, \beta, \gamma$ , а их проекции на оси  $x_1, x_2, x_3$  —  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Координаты  $x_1, x_2, x_3$  точки тела будем записывать в безразмерной форме, относя их к характерному линейному размеру  $a$  тела ( $a$  — сторона куба или радиус основания для конуса и цилиндра).

Силовая функция  $U$  сил ньютоновского притяжения имеет вид ( $\mu$  — постоянная тяготения,  $\rho$  — плотность тела)

$$(1.1) \quad U = \iiint \frac{\mu\rho}{\Delta} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\mu\rho}{R} \iiint f(\varepsilon) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\Delta = R [\varepsilon^2 (\xi^2 + \eta^2) + (1 + \varepsilon\zeta)^2]^{1/2} = R [1 + 2\varepsilon(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) + \varepsilon^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]^{1/2} \quad (\varepsilon = a/R \ll 1)$$

$$f(\varepsilon) = [1 + 2\varepsilon\zeta + \varepsilon^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)]^{-1/2}$$

Видно, что  $U$  не зависит от  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , поэтому равновесие сохраняется при повороте тела вокруг оси  $\zeta$ .

Вычислим  $U$  с точностью до членов четвертого порядка относительно  $\varepsilon$ , используя разложение

$$f(\varepsilon) = 1 + \varepsilon f' + \frac{\varepsilon^2}{2} f'' + \frac{\varepsilon^3}{6} f''' + \frac{\varepsilon^4}{24} f'''' + \dots$$

$$f' = \zeta, \quad f'' = 3\zeta^2 - r^2, \quad f''' = -15\zeta^3 + 9\zeta r^2$$

$$f'''' = 105\zeta^4 - 90\zeta^2 r^2 + 9r^4, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

2. Соответствующее выражение главного члена  $U$  силовой функции (1.1) для куба в предположении, что координатные плоскости системы ко-

ординат  $Ox_1x_2x_3$  параллельны граням куба, имеет вид ( $m$  — масса тела

$$U = \kappa \{ \gamma_1^2 \gamma_2^2 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) [1 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] \}, \quad \kappa = 7\mu t \varepsilon^4 / 96R$$

Уравнения равновесия куба

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} &= -2\kappa(2\gamma_1^3 + \gamma_1\gamma_2^2 - \gamma_1) = 0, & \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} &= \\ &= -2\kappa(2\gamma_2^3 + \gamma_1^2\gamma_2 - \gamma_2) = 0 \end{aligned}$$

допускают следующие три группы решений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \gamma_1^2 &= 1, & \text{б) } \gamma_1 &= 0, & \gamma_2^2 &= \gamma_3^2 = 1/2, & \text{в) } \gamma_1^2 &= \\ &= \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1/3 & & & & & & (123) \end{aligned}$$

Семейство решений а) содержит шесть положений равновесия, в которых ось  $\zeta$  проходит через центр грани; семейство б) содержит двенадцать равновесий, в которых ось  $\zeta$  проходит через середину ребра; семейство в) содержит восемь равновесий, в которых ось  $\zeta$  проходит через вершину куба.

Вычисляя вторую вариацию  $\delta^2 U$  функции  $U$ , можно убедиться, что семейство равновесий в) устойчиво, а а) и б) неустойчивы, для них степень неустойчивости равна соответственно 1 и 2.

3. Для нахождения силовой функции конуса и цилиндра ось  $x_3$  направим по оси симметрии указанных тел. Высота конуса и цилиндра, определяемая из условия равенства моментов инерции второго порядка, равна соответственно  $2a$  и  $\sqrt{3}a$ .

Для конуса и цилиндра главные члены в разложении силовой функции имеют соответственно вид

$$(3.1) \quad U_1 = k_0 (3 - 5\gamma_3^2) \gamma_3 \quad (k_0 = \mu t \varepsilon^2 / (16R))$$

$$(3.2) \quad U_2 = \nu_0 (6 - 7\gamma_2^3) \gamma_3^2 \quad (\nu_0 = 11 \mu t \varepsilon^4 / (128R))$$

Очевидно, положения равновесия конуса и цилиндра не зависят от углов поворота тел вокруг осей  $\zeta$  и  $x_3$ .

Уравнения равновесия конуса и цилиндра записываются в виде

$$(3.3) \quad dU_1/d\theta = 3k_0 (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta = 0$$

$$(3.4) \quad dU_2/d\theta = 2\nu_0 (7 \cos^2 \theta - 3) \sin 2\theta = 0 \quad (\gamma_3 = \cos \theta)$$

и имеют следующие решения:

$$(3.5) \quad \text{а) } \cos \theta = -1, \quad \text{б) } \cos \theta = 1/\sqrt{5}, \quad \text{в) } \cos \theta = 1/\sqrt{5}, \quad \text{г) } \cos \theta = 1$$

$$(3.6) \quad \text{а) } \cos \theta = -1, \quad \text{б) } \cos \theta = -\sqrt{3/7}, \quad \text{в) } \cos \theta = 0, \quad \text{г) } \cos \theta = \sqrt{3/7}, \quad \text{д) } \cos \theta = 1$$

Вопрос об устойчивости равновесий (3.5) и (3.6) решается исследованием знака второй производной от  $U_1$  и  $U_2$ . Можно показать, что равновесия конуса а) и б) устойчивы, а равновесия б) и г) неустойчивы, равновесия цилиндра б) и г) устойчивы, а равновесия а), в) и д) неустойчивы.

4. Исследование перманентных вращений и регулярных прецессий конуса и цилиндра будем проводить в переменных Эйлера.

Для обоих случаев кинетическая энергия

$$(4.1) \quad T = 1/2 A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta)$$

и силовые функции (3.1) и (3.2) не зависят от  $\varphi$  и  $\psi$ . Следовательно, уравнения движения допускают циклические интегралы

$$(4.2) \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = c_1, \quad \omega_\zeta = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = c_2$$

где  $\omega_3$  и  $\omega_\zeta$  — проекции мгновенной угловой скорости  $\omega$  на оси  $x_3$  и  $\zeta$ .  
Уравнение для  $\theta$  приводится к виду:

для конуса

$$(4.3) \quad \theta'' + \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \theta = k \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \quad (k = 3k_0/A)$$

для цилиндра

$$(4.4) \quad \theta'' + \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \theta = v \sin \theta \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3) \quad (v = 4v_0/A)$$

Уравнения (4.2), (4.3) и (4.2), (4.4) интегрируемы. Их общее решение получается обращением соответственно ультра- и гиперэллиптических интегралов

$$d\gamma_3/dt = \pm [p_5(\gamma_3)]^{1/2}, \quad d\gamma_3/dt = \pm [p_6(\gamma_3)]^{1/2}$$

$$p_5(\gamma_3) = h(1 - \gamma_3^2) + 2k\gamma_3(1 - \gamma_3^2)(3 - 5\gamma_3^2) + 2c_1c_2\gamma_3 - (c_1^2 + c_2^2)$$

$$p_6(\gamma_3) = h(1 - \gamma_3^2) + 2v\gamma_3^2(1 - \gamma_3^2)(6 - 7\gamma_3^2) + 2c_1c_2\gamma_3 - (c_1^2 + c_2^2)$$

Уравнения (4.2), (4.3) и (4.2), (4.4) допускают семейства частных решений, которые приведены в таблице ( $\lambda = 1/\sqrt{5}$  для конуса и  $\lambda = \sqrt{3/7}$  для цилиндра) и описывают перманентные вращения конуса и цилиндра.

№	$\cos \theta$	$\dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$	Примечания	№	$\cos \theta$	$\dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$	Примечания
1°	0	0	$c_2$	Только для цилиндра $\omega_3 = c_1 = c_2$ $\omega_3 = c_2 = -c_1$	5°	$\lambda$	0	$c_2$	$c_1 = \lambda c_2$
2°	0	$c_1$	0		6°	$\lambda$	$c_1$	0	$c_2 = \lambda c_1$
3°	1				7°	$-\lambda$	0	$c_2$	$c_1 = -\lambda c_2$
4°	-1				8°	$-\lambda$	$c_1$	0	$c_2 = -\lambda c_1$

Для решений 5°—8° ось конуса наклонена относительно оси  $\zeta$  и конус вращается с постоянной угловой скоростью  $\dot{\psi} = c_2$  вокруг оси  $\zeta$  или  $\dot{\varphi} = c_1$  вокруг оси  $x_3$ .

Кроме указанных решений, уравнения (4.2), (4.3) допускают также семейство решений вида  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ ,  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ ,  $\theta' = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ , существующих при выполнении условий  $-k \leq \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 \leq 4k$ . Этим решениям отвечают регулярные прецессии конуса. Если  $\dot{\varphi} = 0$  или  $\dot{\psi} = 0$ , то регулярные прецессии конуса переходят в перманентные вращения. Если вместо  $\dot{\varphi}_0$ ,  $\dot{\psi}_0$  в качестве параметров взять  $c_1$  и  $c_2$ , то для определения  $\theta_0$  будем иметь уравнение

$$(4.5) \quad (c_1 - c_2\beta)(c_2 - c_1\beta) + k(1 - \beta^2)(1 - 5\beta^2) = 0, \quad \beta = \cos \theta$$

Очевидно, что при любых  $c_1$  и  $c_2$  ( $c_1 \neq \pm c_2$ ) уравнение (4.5) имеет, по крайней мере, один вещественный корень  $\theta = \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi$ ), так как функция в левой части (4.5) меняет знак на отрезке  $[-1, 1]$ .

Рассмотрим случай цилиндра. Для решений 1°, 2° ось симметрии цилиндра  $x_3$  перпендикулярна оси  $\zeta$ , цилиндр в этом случае вращается с произвольной угловой скоростью  $\dot{\psi}_0$  вокруг оси  $\zeta$  или  $\dot{\varphi}_0$  вокруг оси  $x_3$ . В случае 5°—8° ось цилиндра наклонена относительно оси  $\zeta$  и цилиндр вращается с произвольной угловой скоростью  $\dot{\psi}_0$  вокруг оси  $\zeta$  или  $\dot{\varphi}_0$  вокруг оси  $x_3$ .

Помимо указанных решений, уравнения (4.2), (4.4) допускают также семейства решений вида  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ ,  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ ,  $\theta' = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ , описывающие регулярные прецессии цилиндра. Значения  $\theta_0$  определяются из урав-

нения

$$(4.6) \quad (c_1 - c_2\beta)(c_2 - c_1\beta) + \nu\beta(1 - \beta^2)(1 + \beta)^2(3 - 7\beta^2) = 0, \\ \beta = \cos \theta$$

Аналогично (4.5) уравнение (4.6) для любых  $c_1$  и  $c_2$  ( $c_1 \neq \pm c_2$ ) имеет, по крайней мере, один вещественный корень  $\theta = \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi$ ).

Если вместо  $c_1$  и  $c_2$  в качестве параметров взять  $\varphi_0$  и  $\psi_0$ , то для  $\theta_0$  будем иметь уравнение

$$(4.7) \quad 7 \cos^3 \theta_0 - 3 \cos \theta_0 - \varphi_0 \psi_0 / \nu = 0$$

При выполнении условий

$$|\varphi_0 \psi_0| < 2\nu/\sqrt{7}, \quad -\sqrt{7/2} \leq \cos [\arccos(7\varphi_0 \psi_0 + 4l\nu\pi)/6] \leq \\ \leq \sqrt{7/2}, \quad l = 0, 1, 2$$

уравнение (4.7) имеет три различных действительных корня; при условии  $|\varphi_0 \psi_0| = 2\nu/\sqrt{7}$  — три действительных корня  $\cos \theta_{01} = 2M^{1/3}$ ,  $\cos \theta_{02} = \cos \theta_{03} = M^{1/3}$ , два из которых совпадают; а при условиях  $|\varphi_0 \psi_0| > 2\nu/\sqrt{7}$  и  $-1 \leq \alpha^+ + \alpha^- \leq 1$  — один действительный корень  $\cos \theta_0 = \alpha^+ + \alpha^-$ .

$$\text{Здесь } \alpha^\pm = (M \pm N)^{1/3}, \quad M = \varphi_0 \psi_0 / (14\nu), \quad N = \sqrt{M^2 - 1/7/7}$$

5. Множества перманентных вращений и регулярных прецессий конуса и цилиндра можно геометрически представить в пространстве переменных  $c_1, c_2, \theta$  ( $\gamma_3$ ) в виде поверхностей, определяемых уравнениями (4.5) и (4.6). Для анализа этих поверхностей запишем уравнения (4.5) и (4.6) в виде

$$(5.1) \quad (1 - \gamma_3)^2 m^2 - (1 + \gamma_3)^2 n^2 = 6k(1 - \gamma_3)^2(1 + \gamma_3)^2(5\gamma_3^2 - 1)$$

$$(5.2) \quad (1 - \gamma_3)^2 m^2 - (1 + \gamma_3)^2 n^2 = 2\nu\gamma_3(1 - \gamma_3)^2(1 + \gamma_3)^2(7\gamma_3^2 - 3) \\ c_1 = (m - n)/\sqrt{2}, \quad c_2 = (m + n)/\sqrt{2}$$

Сечения поверхностей (5.1) и (5.2) плоскостями  $\gamma_3 = \gamma_{30}$  представляют собой гиперболы, главными осями которых служат координатные оси  $m$  и  $n$ , если  $\gamma_{30}$  не обращает в нуль правые части уравнений (5.1) и (5.2); в противном случае в сечении будем иметь пару пересекающихся прямых  $(1 - \gamma_{30})m = \pm(1 + \gamma_{30})n$ . Точки гипербол соответствуют регулярным прецессиям, а точки указанных прямых — перманентным вращениям.

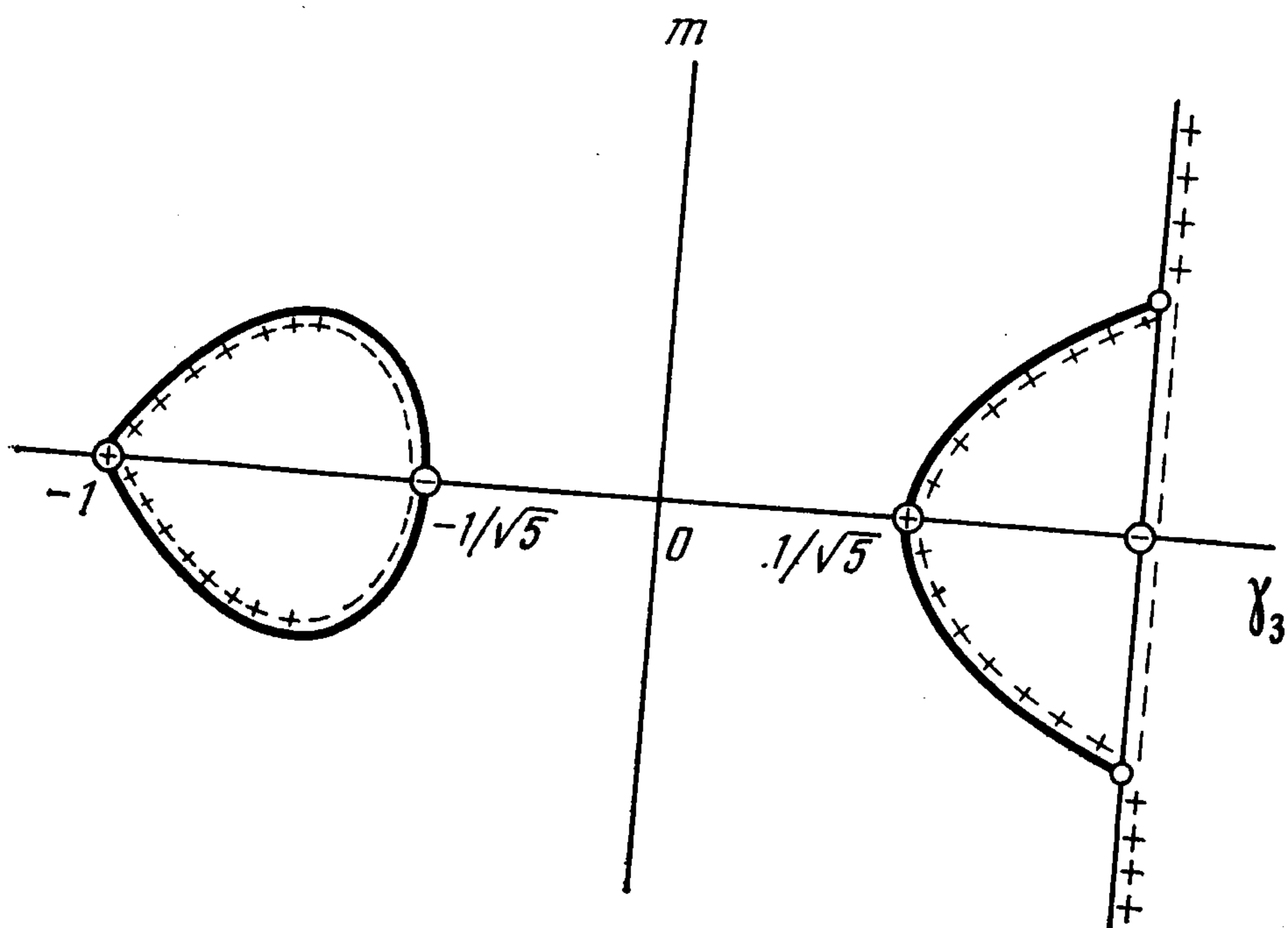
На фиг. 1—4 указаны сечения поверхностей (5.1) плоскостями  $n = 0$  (фиг. 1),  $m = 0$  (фиг. 2),  $n = \pm \delta_1 m$  (фиг. 3),  $n = \pm \delta_2 m$  (фиг. 4) ( $\delta_1 = \delta_2^{-1} = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)^{-1}$ ). На всех фиг. 1—4 точки оси  $\gamma_3$ , для которых  $\gamma_3 = \pm 1, \pm 1/\sqrt{5}$  отвечают положениям равновесия конуса. Его перманентным вращениям отвечают прямые  $\gamma_3 = 1$  (фиг. 1),  $\gamma_3 = -1$  (фиг. 2),  $\gamma_3 = 1/\sqrt{5}$  (фиг. 3),  $\gamma_3 = -1/\sqrt{5}$  (фиг. 4).

На фиг. 5—9 изображены сечения поверхности (5.2) плоскостями  $n = 0$  (фиг. 5),  $m = 0$  (фиг. 6),  $n = \pm m$  (фиг. 7),  $n = \pm \delta_3 m$  (фиг. 8) и  $n = \pm \delta_4 m$  (фиг. 9) ( $\delta_3 = \delta_4^{-1} = (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})^{-1}$ ).

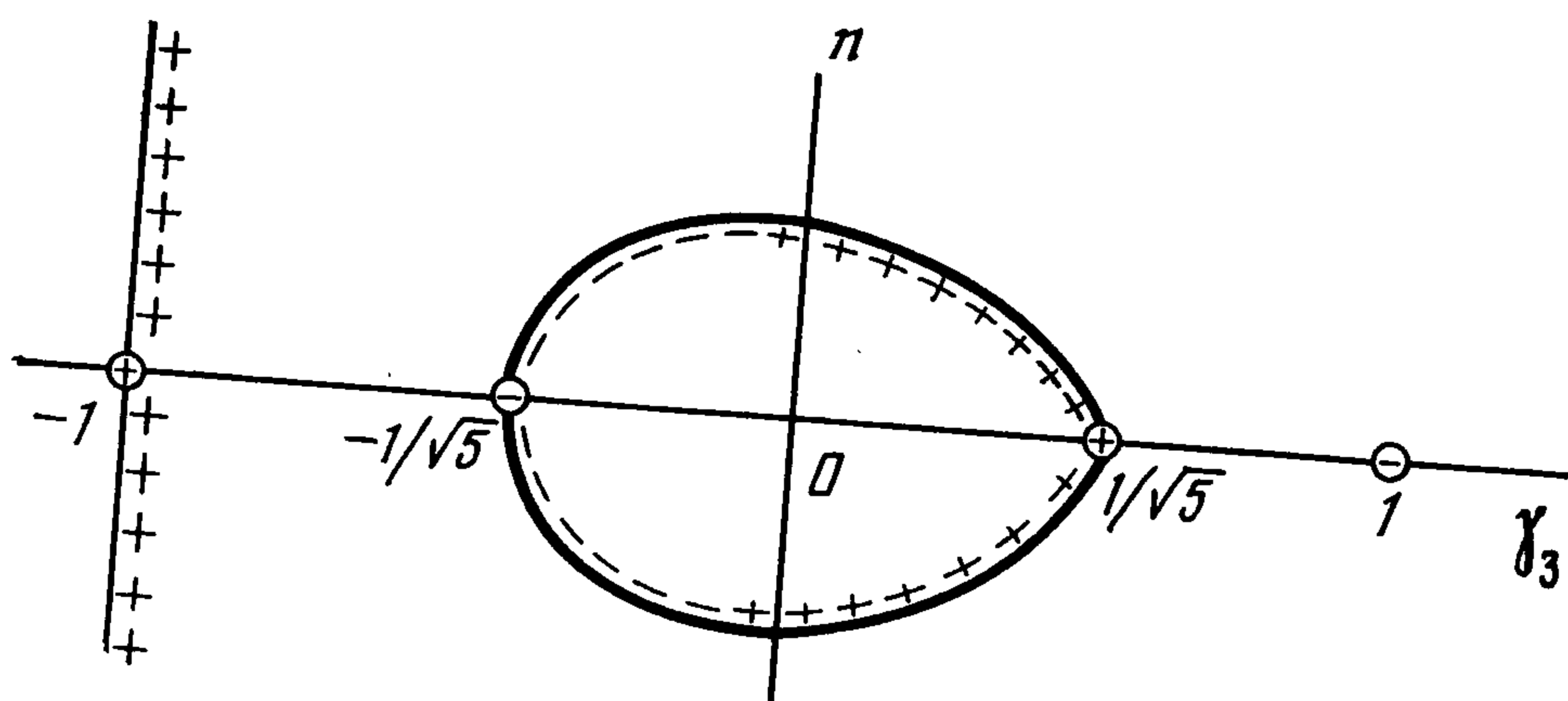
На всех фиг. 5—9 точки оси  $\gamma_3$ , для которых  $\gamma_3 = 0, \pm 1, \pm \sqrt{3/7}$  отвечают положениям равновесия цилиндра. Его перманентным вращениям отвечают прямые  $\gamma_3 = 1$  (фиг. 5),  $\gamma_3 = -1$  (фиг. 6),  $\gamma_3 = 0$  (фиг. 7),  $\gamma_3 = \sqrt{3/7}$  (фиг. 8),  $\gamma_3 = -\sqrt{3/7}$  (фиг. 9).

Остальные ветви на фиг. 1—9 отвечают регулярным прецессиям конуса и цилиндра.

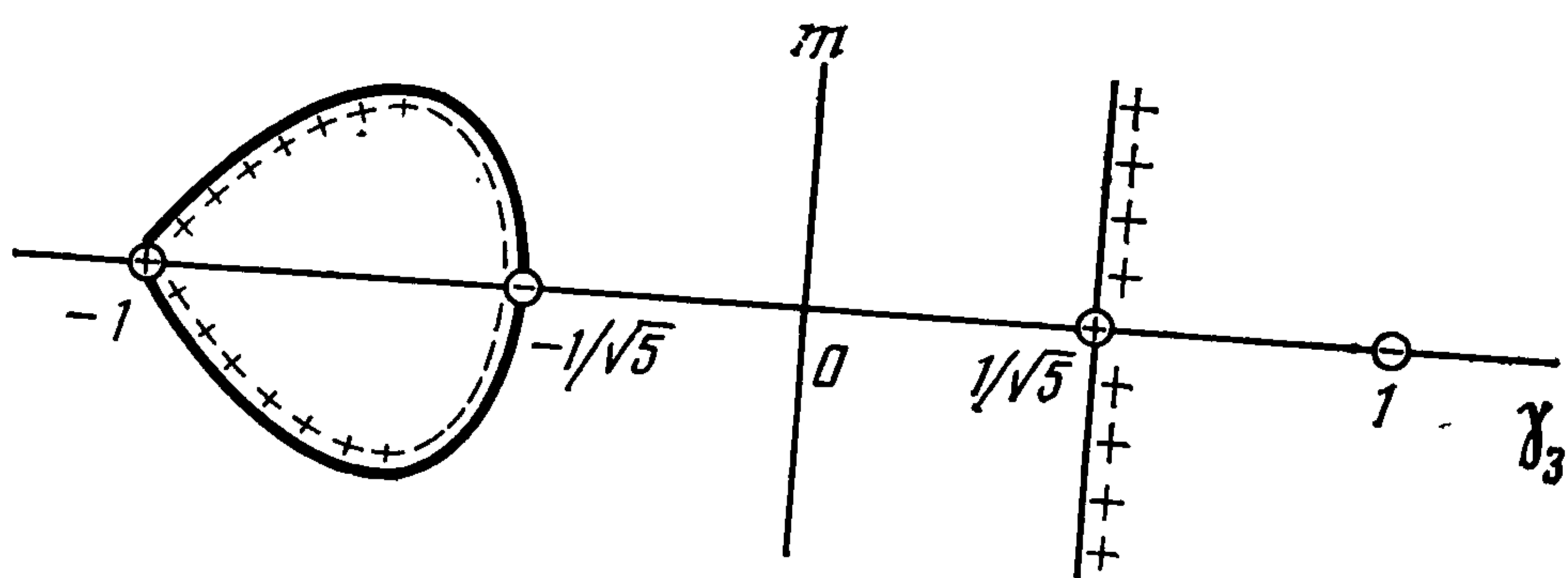
Исследуем устойчивость перманентных вращений и регулярных прецессий конуса и цилиндра. Для определенности рассмотрим фиг. 1. На



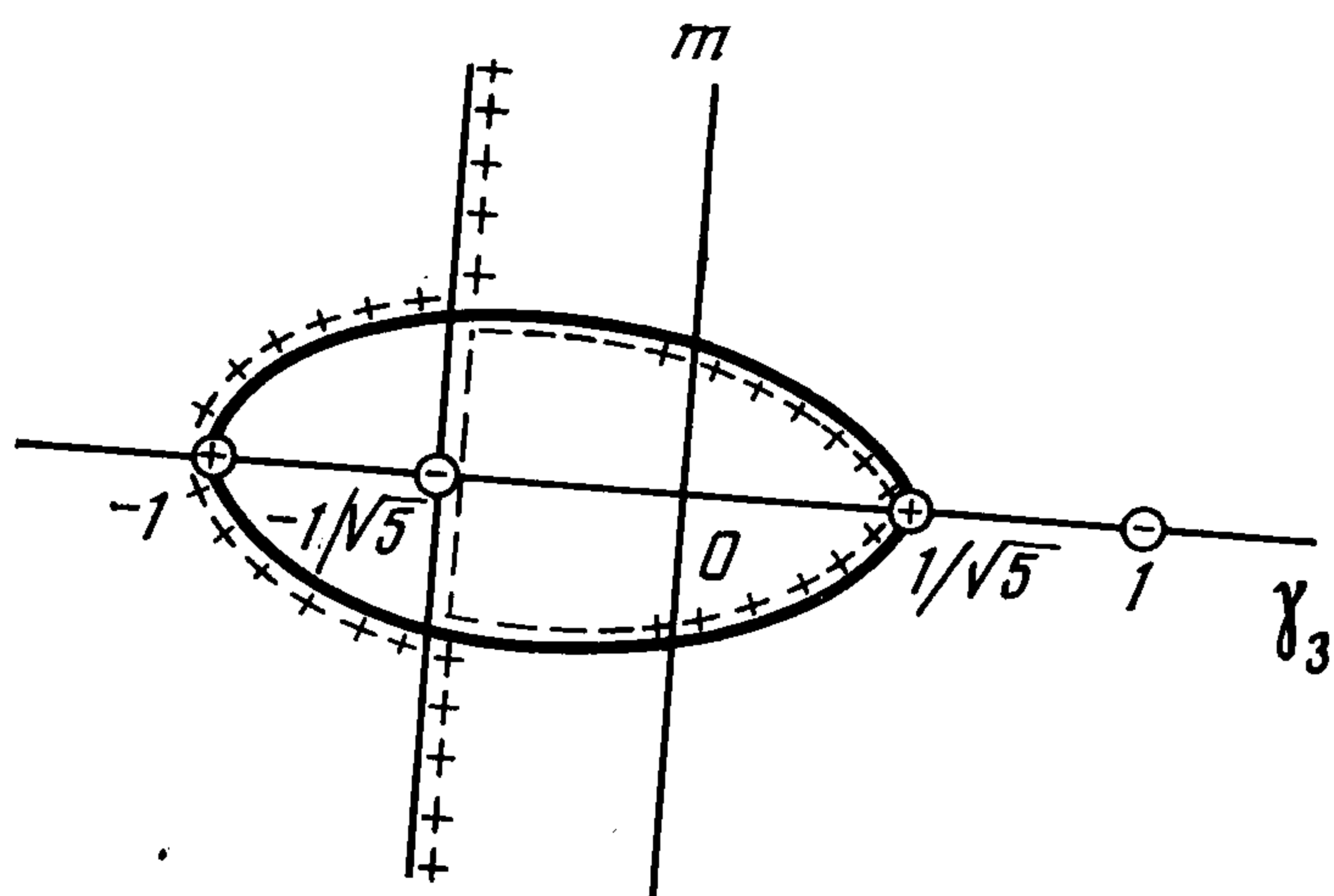
Фиг. 1



Фиг. 2

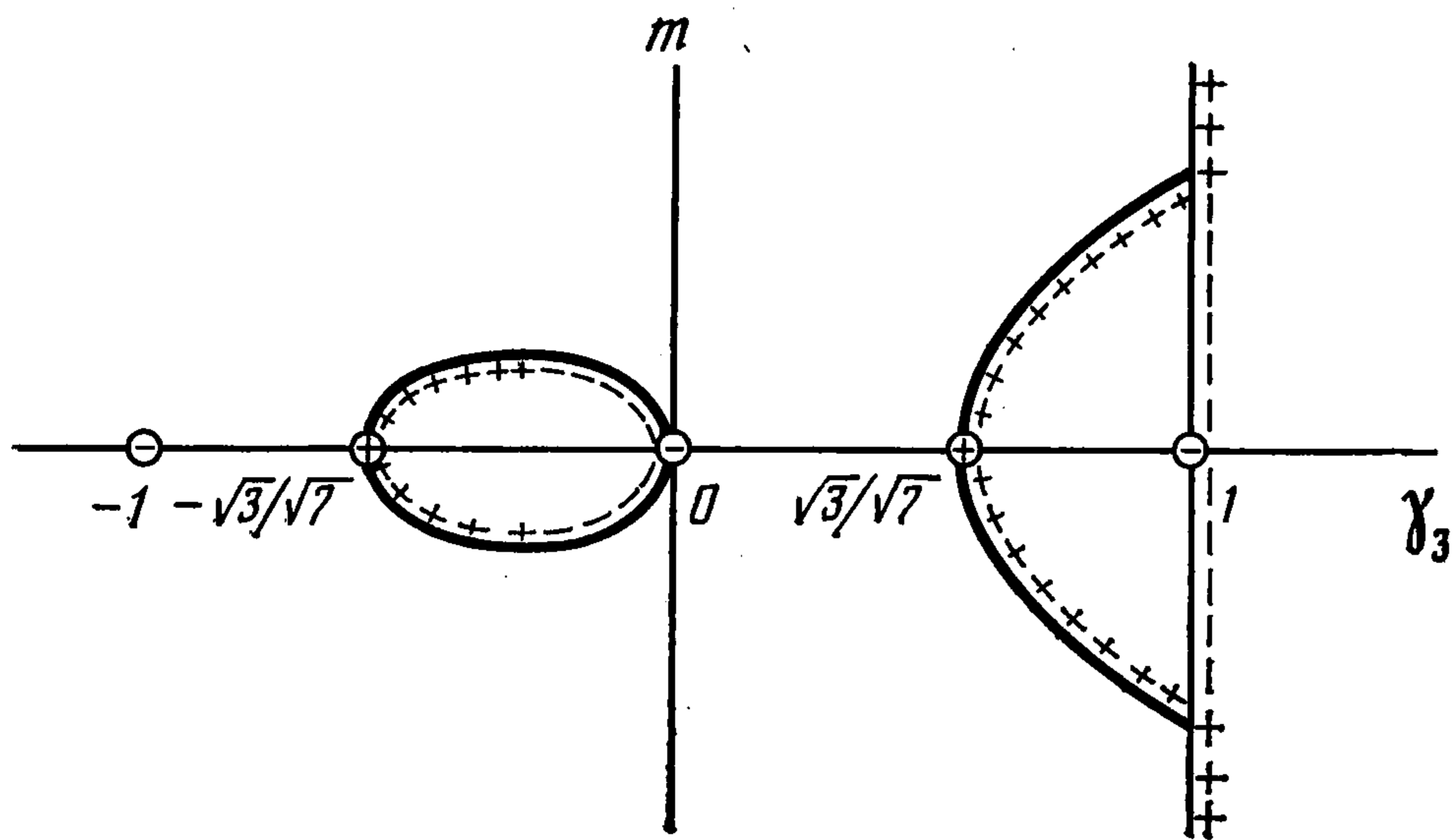


Фиг. 3

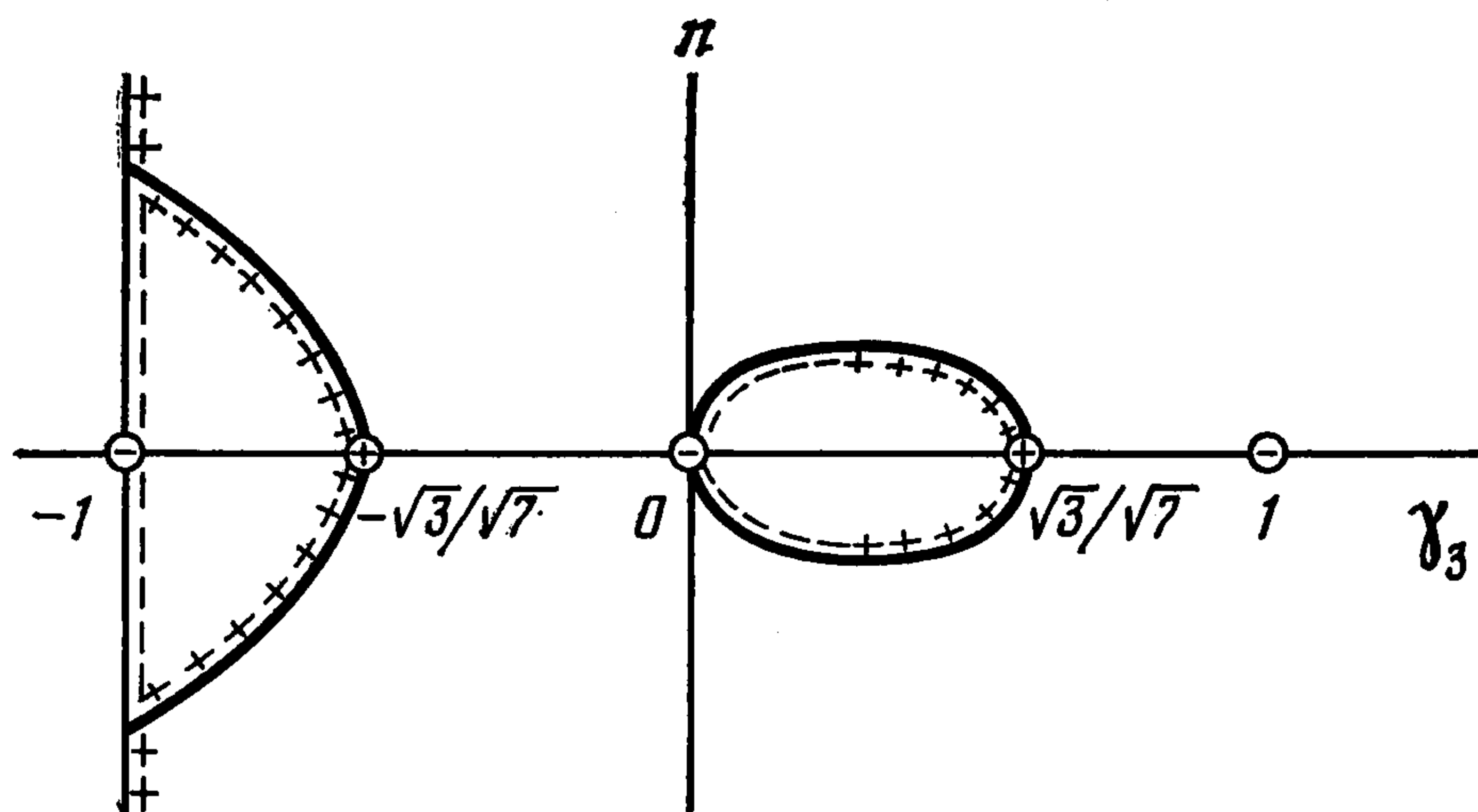


Фиг. 4

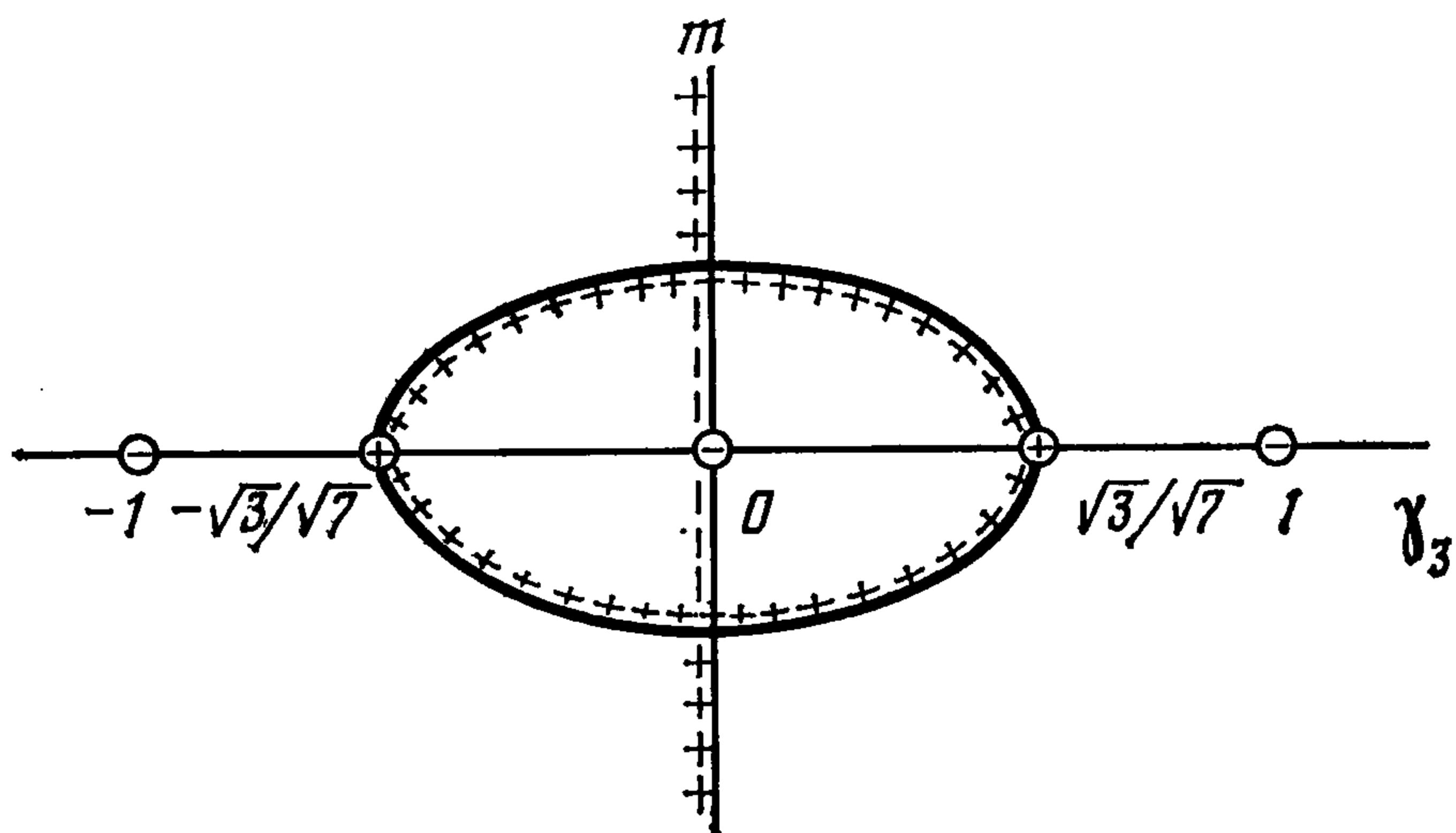
ней точки ( $\gamma_3 = 1, m = 0$ ) и ( $\gamma_3 = -1/\sqrt{5}, m = 0$ ), как было показано в п. 3, отвечают неустойчивым положениям равновесия конуса, а точки ( $\gamma_3 = 1/\sqrt{5}, m = 0$ ) и ( $\gamma_3 = -1, m = 0$ ) — устойчивым равновесиям. На основе теории бифуркации [1] заключаем, что ветви, отмеченные на фиг. 1 знаками плюс и минус, отвечают устойчивым и неустойчивым положениям



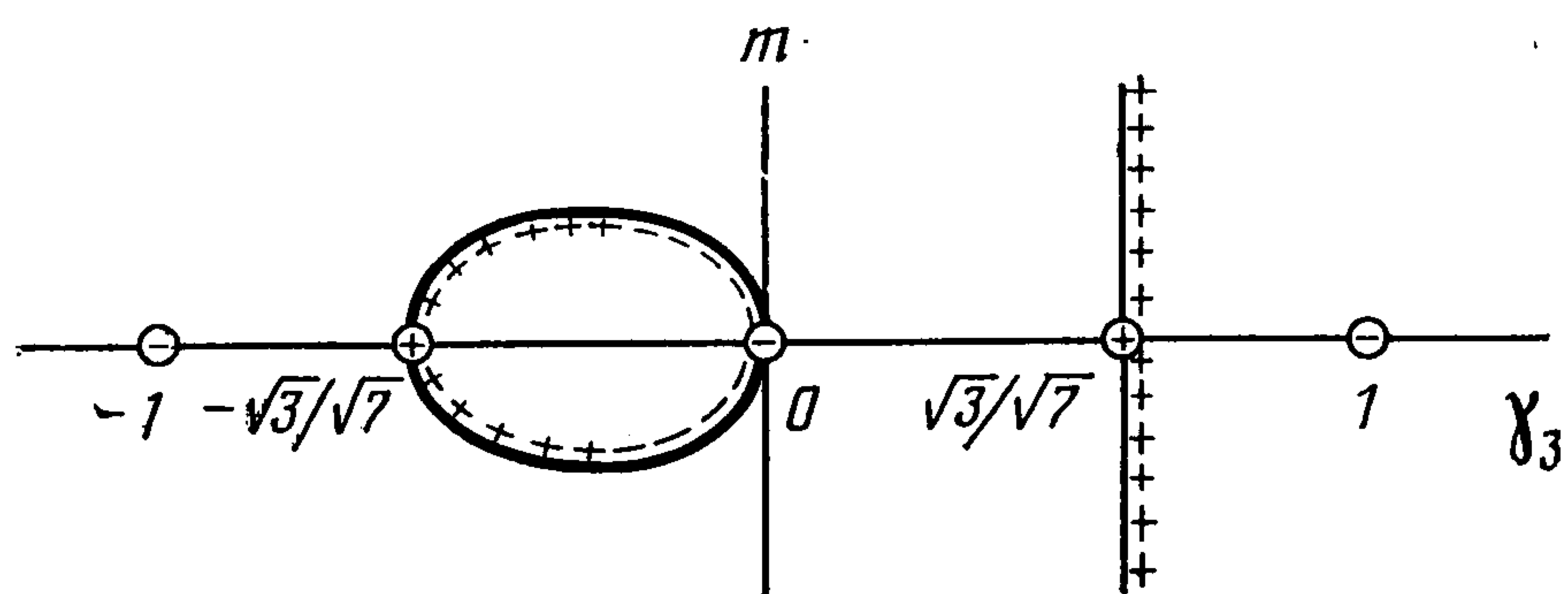
Фиг. 5



Фиг. 6



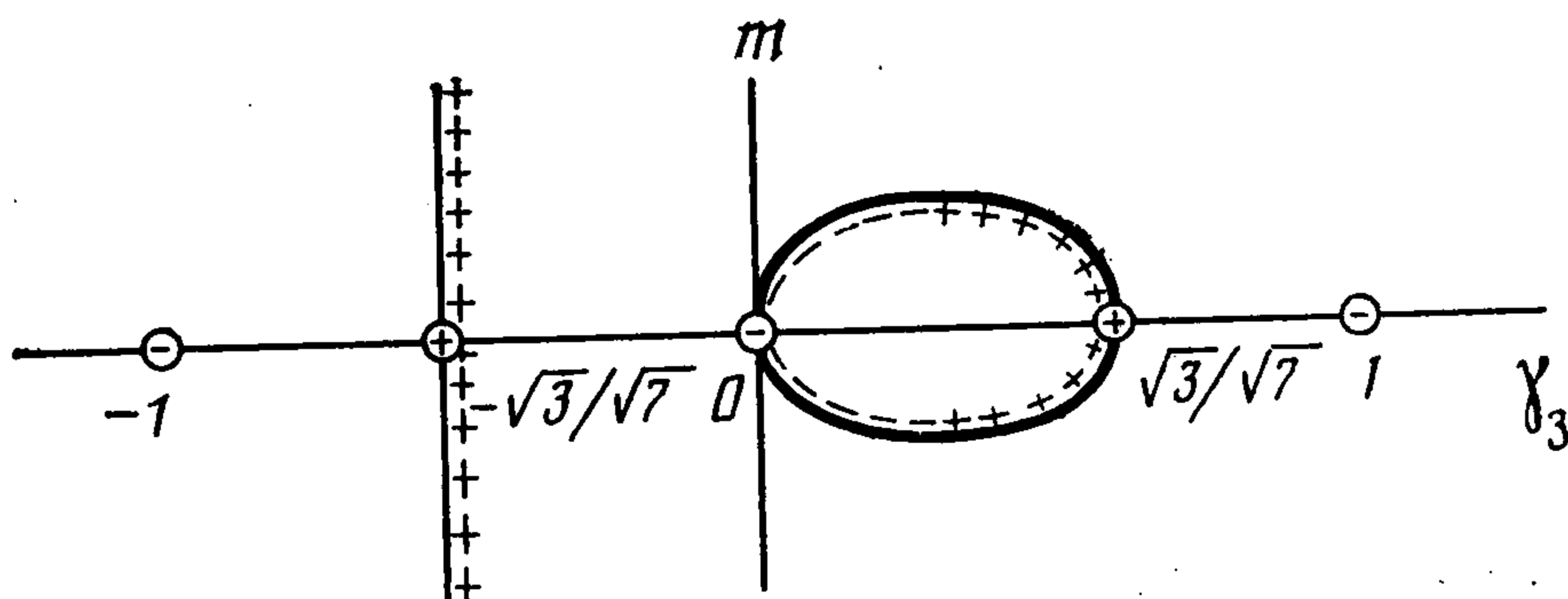
Фиг. 7



Фиг. 8

ным вращениям и регулярным прецессиям конуса. Смена устойчивости происходит в точках бифуркации.

Аналогичные заключения могут быть сделаны об устойчивости перманентных вращений и регулярных прецессий и для других возможных случаев. Результаты анализа устойчивости и неустойчивости представлены на фиг. 1—9.



Фиг. 9

Отметим, что перманентные вращения конуса и цилиндра, отвечающие неустойчивым равновесным ориентациям, при достаточно малой угловой скорости также неустойчивы, а при достаточно большой угловой скорости — устойчивы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 585 с.

Москва

Поступила в редакцию  
21.XI.1985