

УДК 531.384

## О БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА НА ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

Карапетян А. В., Рубановский В. Н.

Изучаются стационарные движения тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости. Определяются перманентные вращения эллипсоида, условия их существования, ветвления и устойчивости. Отмечаются некоторые особенности рассматриваемой задачи: потеря вековой устойчивости быстрого вращения эллипсоида с наименьшим расположением центра масс и стабилизация такого вращения эллипсоида с наивысшим расположением центра масс, увеличение размерности многообразия перманентных вращений эллипсоида в случае выполнения необходимых условий существования дополнительного интеграла в этой задаче и т. п. Уточняются результаты авторов об устойчивости регулярных прецессий волчка на горизонтальной плоскости с трением.

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело на гладкой горизонтальной плоскости, без уменьшения общности полагая, что проекция центра масс тела на опорную плоскость неподвижна. Предположим, что тело ограничено эллипсоидальной поверхностью, главные оси которой совпадают с главными осями центрального эллипсоида инерции.

Уравнения движения тела допускают первые интегралы

$$(1.1) \quad U = mz'^2 + J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 + 2mgz = \text{const}$$

$$(1.2) \quad U_1 = J_1\omega_1\gamma_1 + J_2\omega_2\gamma_2 + J_3\omega_3\gamma_3 = k = \text{const}$$

$$(1.3) \quad U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad z^2 = a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2$$

Здесь  $z$  — высота центра масс тела над опорной плоскостью,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — компоненты векторов угловой скорости тела и единичного вектора восходящей вертикали в главных центральных осях инерции тела,  $m$  — масса,  $J_1, J_2, J_3$  и  $a_1, a_2, a_3$  — главные центральные моменты инерции эллипсоида и полуоси его поверхности,  $g$  — ускорение свободного падения. Ограничиваясь рассмотрением только трехосных эллипсоидов с трехосными эллипсоидами инерции, без уменьшения общности будем полагать, что  $J_1 < J_2 < J_3$ .

Согласно теореме Рауса, стационарным значениям интеграла энергии (1.1) при постоянных значениях интегралов площадей (1.2) и геометрического (1.3) отвечают стационарные движения рассматриваемой системы, задачу отыскания которых сведем к задаче определения стационарных значений функции

$$2W = U - 2\lambda(U_1 - k) + \sigma(U_2 - 1)$$

где  $\lambda$  и  $\sigma$  — неопределенные множители Лагранжа. Функция  $W$ , зависящая от переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda, \sigma$  и параметра  $k$ , является аналогом измененной потенциальной энергии [1].

Условия стационарности функции  $W$  приводят к уравнениям

$$(1.4) \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = k - U_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(U_2 - 1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z'} = mz' = 0$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_1} = J_1(\omega_1 - \lambda\gamma_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \\ = \left( \frac{mg}{z} a_1^2 + \sigma \right) \gamma_1 - \lambda J_1 \omega_1 = 0 \quad (123)$$

Здесь и далее символ (123) означает, что невыписанные соотношения получаются из приведенного круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

В зависимости от соотношений между полуосями поверхности тела последние уравнения допускают от трех до шести (с точностью до знаков  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ) однопараметрических семейств решений вида

$$z^{\cdot} = 0, \quad \omega_1 = \lambda\gamma_1, \quad \gamma_1 = \gamma_1(\lambda) \quad (123); \quad \sigma = \sigma(\lambda), \quad k = \\ = k(\lambda), \quad \lambda = \text{const}$$

соответствующих равномерным вращениям тела вокруг вертикали, проходящей через неподвижный центр масс тела.

2. Пусть  $a_1 < a_2 < a_3$ . Тогда уравнения (1.4) и (1.5) допускают шесть однопараметрических семейств решений (соотношение  $z^{\cdot} = 0$ , общее для всех этих решений, опущено)

$$(2.1) \quad \omega_1 = \lambda\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1^2 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \\ \sigma = J_1\lambda^2 - mga_1, \quad k = J_1\lambda \quad (123)$$

$$(2.2) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \lambda\gamma_2, \quad \omega_3 = \lambda\gamma_3, \quad \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2^2 = \frac{a_3^2(\lambda^4 - \lambda_{12}^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)}, \quad \gamma_3^2 = \frac{a_2^2(\lambda_{13}^4 - \lambda^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)} \\ \sigma = \frac{J_2a_3^2 - J_3a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda^2, \quad k = k_1(\lambda) = J_{23}\lambda \quad (123) \\ \lambda_{12}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_3(J_3 - J_2)}, \quad \lambda_{13}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_2(J_3 - J_2)} \quad (123) \\ J_{23} = \frac{J_2a_3^2 - J_3a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} + \frac{m^2g^2(a_3^2 - a_2^2)}{\lambda^4(J_3 - J_2)} \quad (123)$$

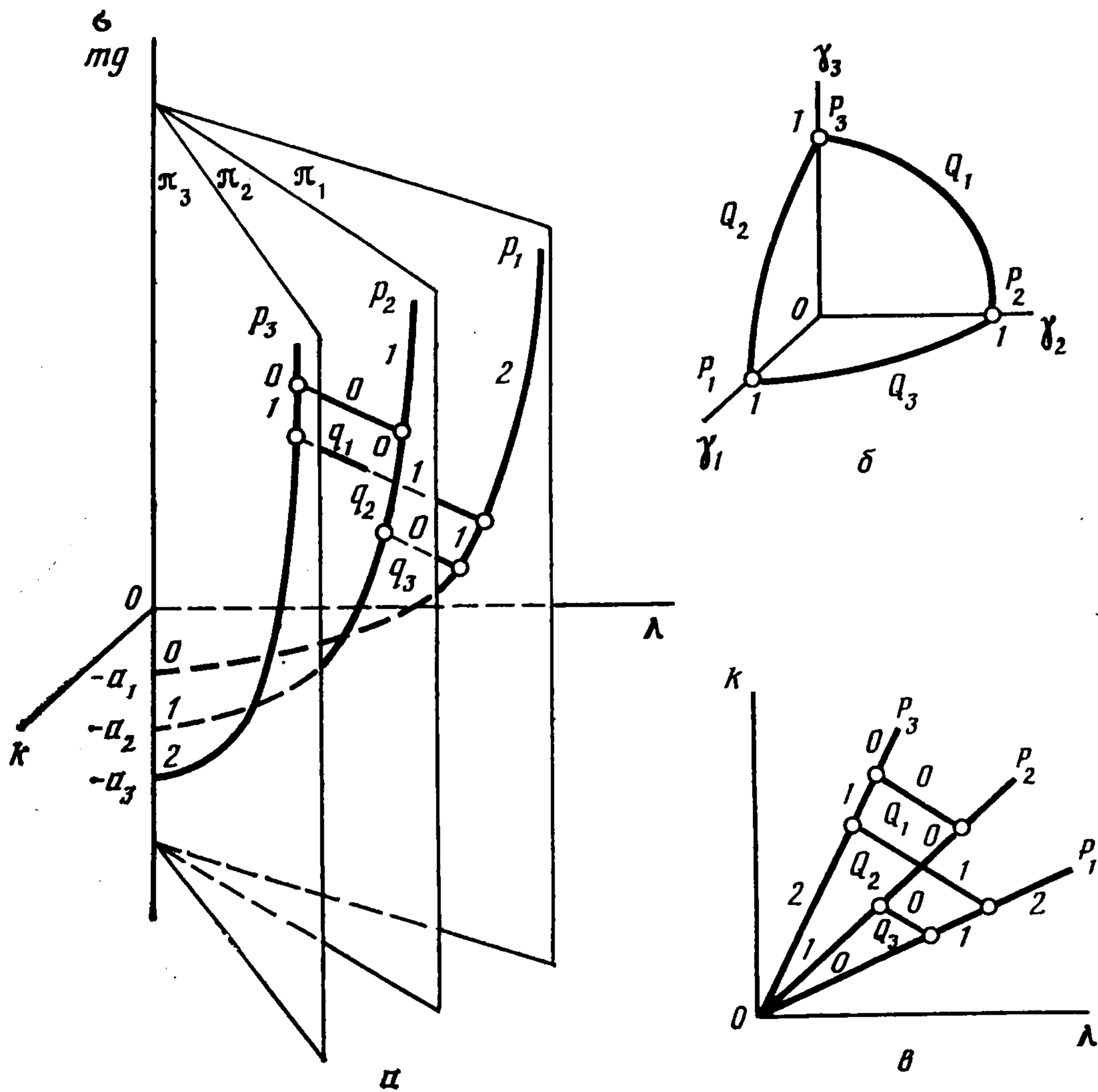
Решения (2.1) и (2.2) описывают равномерные вращения тела с угловой скоростью  $\lambda$  вокруг соответственно главных центральных осей инерции и осей, лежащих в главных плоскостях центрального эллипсоида инерции. Отметим, что решения (2.1) существуют при любых значениях угловой скорости  $\lambda$ , а решения (2.2) — соответственно при

$$(2.3) \quad \lambda_{12}^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda_{13}^2 \quad (1); \quad \lambda_{23}^2 \geq \lambda^2 \geq \lambda_{21}^2 \quad (2); \quad \lambda_{31}^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda_{32}^2 \quad (3)$$

Решения (2.1) и (2.2) можно представить геометрически в девятимерном пространстве  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda, \sigma, k)$  точками одномерной кривой, шесть ветвей которой  $P_1, P_2, P_3$  и  $Q_1, Q_2, Q_3$  определяются соответственно уравнениями (2.1) и (2.2).

Ветви  $P_1, P_2$  и  $P_3$ , определяемые соотношениями (2.1), отвечают равномерным вращениям тела вокруг главных осей инерции и в подпространстве  $(\lambda, \sigma, k)$  представляют собой параболы  $p_1, p_2, p_3$  с общей осью симметрии, расположенные соответственно в плоскостях  $\pi_1 (k = J_1\lambda)$ ,  $\pi_2 (k = J_2\lambda)$ ,  $\pi_3 (k = J_3\lambda)$ ; вершинам парабол соответствуют положения равновесия тела.

Ветви  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$ , определяемые соотношениями (2.2), отвечают равномерным вращениям тела вокруг осей, расположенных в главных плоскостях инерции, и в подпространстве  $(\lambda, \sigma, k)$  представляют собой отрезки кривых  $q_1, q_2, q_3$ , расположенные между плоскостями  $\pi_2$  и  $\pi_3$ ,  $\pi_3$  и  $\pi_1$ ,  $\pi_1$  и  $\pi_2$  соответственно; концы этих отрезков лежат соответственно на параболах  $p_2$  и  $p_3$ ,  $p_3$  и  $p_1$ ,  $p_1$  и  $p_2$ .



Фиг. 1

В подпространстве  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  ветвям  $P_1, P_2, P_3$  отвечают точки  $\gamma_1^2 = 1, \gamma_2^2 = 1, \gamma_3^2 = 1$  пересечения единичной сферы (1.3) с осями координат, а ветвям  $Q_1, Q_2, Q_3$  — большие окружности, проходящие через точки  $\gamma_2^2 = 1$  и  $\gamma_3^2 = 1, \gamma_3^2 = 1$  и  $\gamma_1^2 = 1, \gamma_1^2 = 1$  и  $\gamma_2^2 = 1$  соответственно.

Примерный вид ветвей  $P_1, P_2, P_3$  и  $Q_1, Q_2, Q_3$  указан на фиг. 1 (а — в подпространстве  $(\lambda, \sigma, k)$  для  $\lambda > 0, k > 0$ ; б — в подпространстве  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  для  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0$ ; в — на плоскости  $(\lambda, k)$  для  $\lambda > 0, k > 0$ ).

3. Устойчивость перманентных вращений тела по отношению к величинам  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  исследуем на основе теоремы Рауса и ее обращений [1]. Вариации переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  обозначим соответственно  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  и  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ . Тогда для решений (2.1) вторая вариация  $\delta^2 W$  функции  $W$  при условиях  $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$  примет вид

$$(3.1) \quad \delta^2 W = m z^2 + J_2 (\xi_2 - \lambda \eta_2)^2 + J_3 (\xi_3 - \lambda \eta_3)^2 + [(J_1 - J_2) \lambda^2 + m g a_1^{-1} (a_2^2 - a_1^2)] \eta_2^2 + [(J_1 - J_3) \lambda^2 + m g a_1^{-1} (a_3^2 - a_1^2)] \eta_3^2 \quad (123)$$

Отсюда следует, что вращения тела вокруг оси  $x_1$ , отвечающей наименьшему моменту инерции  $J_1$ , устойчивы (степень неустойчивости  $\chi = 0$ ), если  $0 \leq \lambda^2 < \lambda_{32}^2$ , неустойчивы ( $\chi = 1$ ), если  $\lambda_{32}^2 < \lambda^2 < \lambda_{23}^2$ , и для них степень неустойчивости  $\chi = 2$ , если  $\lambda^2 > \lambda_{23}^2$ .

Вращения тела вокруг оси  $x_2$ , отвечающей среднему моменту инерции  $J_2$ , неустойчивы ( $\chi = 1$ ), если  $0 \leq \lambda^2 < \lambda_{31}^2$  или  $\lambda^2 > \lambda_{13}^2$ , и устойчивы ( $\chi = 0$ ), если  $\lambda_{31}^2 < \lambda^2 < \lambda_{13}^2$ .

Вращения тела вокруг оси  $x_3$ , отвечающей наибольшему моменту инерции  $J_3$ , имеют степень неустойчивости  $\chi = 2$ , если  $0 \leq \lambda^2 < \lambda_{21}^2$ , неустойчивы ( $\chi = 1$ ), если  $\lambda_{21}^2 < \lambda^2 < \lambda_{12}^2$ , и устойчивы ( $\chi = 0$ ), если  $\lambda^2 > \lambda_{12}^2$ .

Значениям  $\lambda^2 = \lambda_{ij}^2$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ) отвечают точки бифуркации; в этих точках от ветвей  $P_1, P_2, P_3$  ответвляются ветви  $Q_1, Q_2, Q_3$ , соответствующие перманентным вращениям (2.2).

Для решений (2.2) вторая вариация функции  $W$  при условиях  $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$  принимает вид

$$(3.2) \quad \delta^2 W = m z^2 + J_1 (\xi_1 - \lambda \eta_1)^2 + \frac{J_2 J_{23}}{J_3 \gamma_3^2} \left[ \xi_2 - \lambda \eta_2 - \frac{2\lambda (J_3 - J_2) \gamma_2^2}{J_{23}} \eta_2 \right]^2 + \kappa \frac{\lambda^4}{a_3^2 - a_2^2} \eta_1^2 - \frac{(J_3 - J_2)^3 \lambda^6 \gamma_2^2}{m^2 g^2 J_{23} (a_3^2 - a_2^2)} \frac{dk_1}{d\lambda} \eta_2^2 \quad (123)$$

$$\kappa = (J_3 - J_2) a_1^2 + (J_1 - J_3) a_2^2 + (J_2 - J_1) a_3^2$$

Анализ функций  $k_i(\lambda)$  (всюду далее  $i = 1, 2, 3$ ) дает:]

1°.  $dk_i/d\lambda < 0$  для всех  $\lambda$  из соответствующего интервала (2.3), если

$$(3.3) \quad \delta_i < 4\varepsilon_i (1 + 3\varepsilon_i)^{-1}$$

а также для  $\lambda^2 < \lambda_i^2$ , если

$$(3.4) \quad 4\varepsilon_i (1 + 3\varepsilon_i)^{-1} \leq \delta_i \leq (3 + \varepsilon_i)/4$$

2°.  $dk_i/d\lambda > 0$  для всех  $\lambda$ , если

$$(3.5) \quad \delta_i > (3 + \varepsilon_i)/4$$

а также для  $\lambda^2 > \lambda_i^2$ , если  $\delta_i$  и  $\varepsilon_i$  удовлетворяют соотношению (3.4).

Здесь

$$\lambda_1^4 = \frac{3m^2 g^2 (a_3^2 - a_2^2)^2}{(J_3 - J_2) (J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2)} \quad (123)$$

$$\delta_1 = \frac{J_2}{J_3}, \quad \delta_2^{-1} = \frac{J_3}{J_1}, \quad \delta_3 = \frac{J_1}{J_2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{a_2^2}{a_3^2}, \quad \varepsilon_2^{-1} = \frac{a_3^2}{a_1^2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

Пусть  $\kappa > 0$ . Тогда вращения тела вокруг осей, перпендикулярных оси  $x_1$ , устойчивы ( $\chi = 0$ ) при условии (3.3),  $i = 1$ , а также при условии (3.4),  $i = 1$ , если  $\lambda^2 < \lambda_1^2$ , и неустойчивы ( $\chi = 1$ ) при условии (3.5),  $i = 1$ , а также при условии (3.4),  $i = 1$ , если  $\lambda^2 > \lambda_1^2$ .

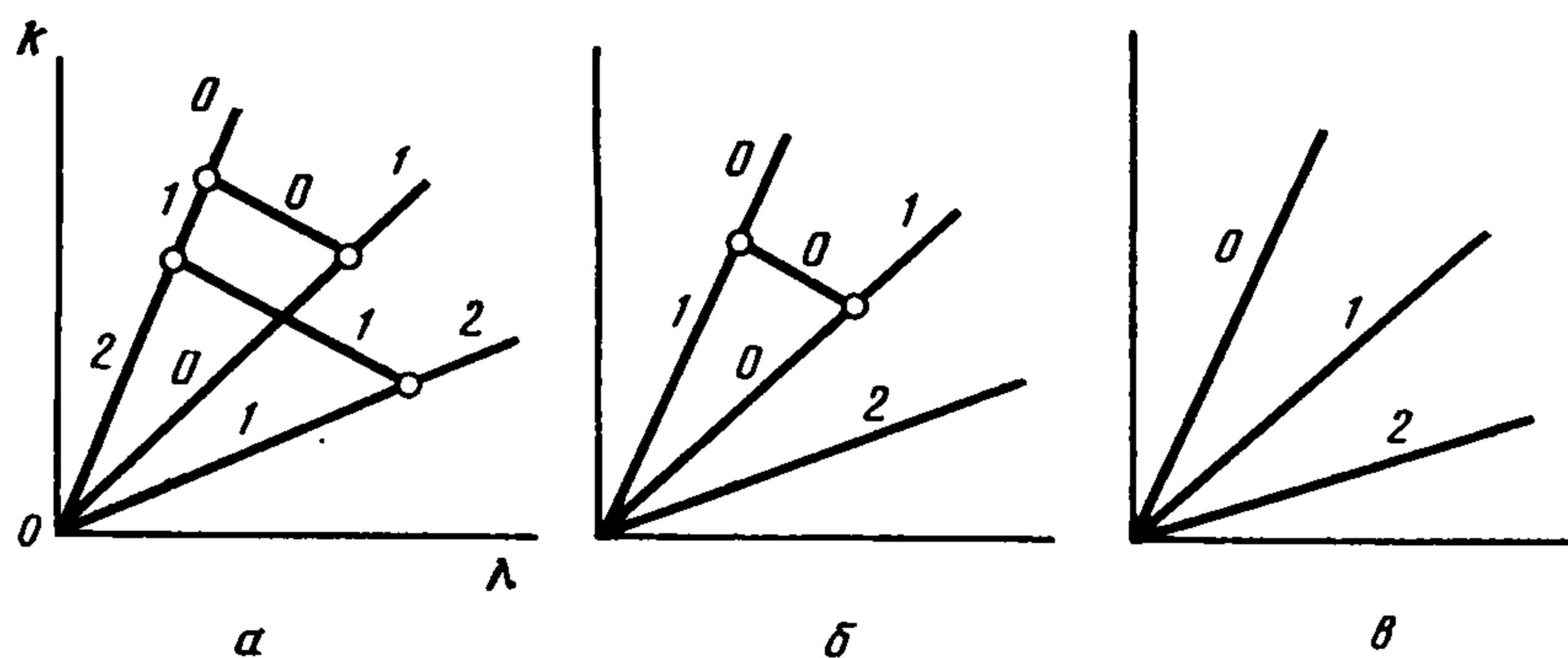
Вращения тела вокруг осей, перпендикулярных оси  $x_2$ , неустойчивы ( $\chi = 1$ ) при условии (3.3),  $i = 2$ , а также при условии (3.4),  $i = 2$ , если  $\lambda^2 < \lambda_2^2$ , и их степень неустойчивости  $\chi = 2$  при условии (3.5),  $i = 2$ , а также при условии (3.4),  $i = 2$ , если  $\lambda^2 > \lambda_2^2$ .

Вращения тела вокруг осей, перпендикулярных оси  $x_3$ , устойчивы ( $\chi = 0$ ) при условии (3.3),  $i = 3$ , а также при условии (3.4),  $i = 3$ , если  $\lambda^2 < \lambda_3^2$ , и неустойчивы ( $\chi = 1$ ) при условии (3.5),  $i = 3$ , а также при условии (3.4),  $i = 3$ , если  $\lambda^2 > \lambda_3^2$ .

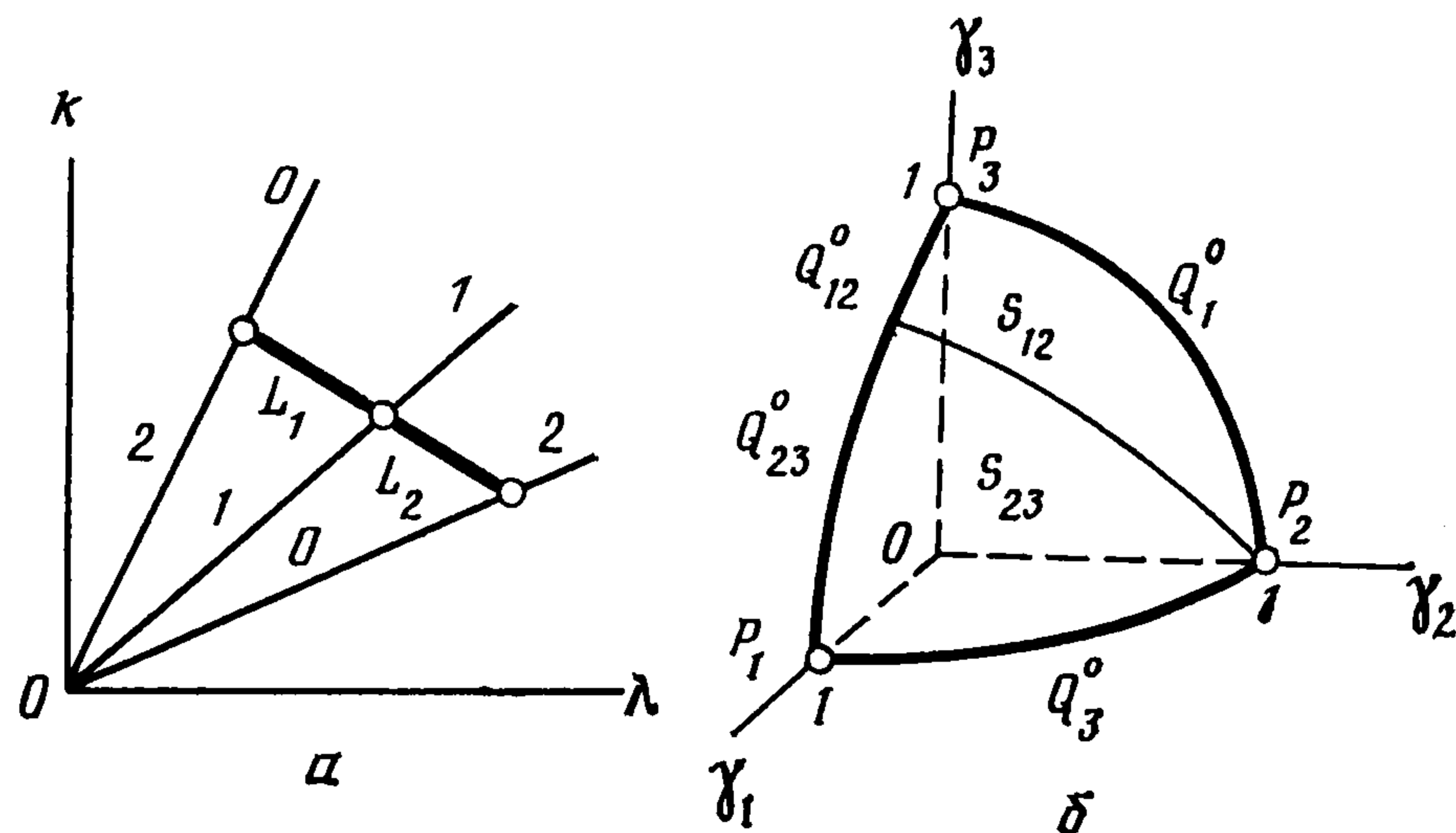
Значениям  $\lambda^2 = \lambda_i^2$  при выполнении условий (3.4) отвечают точки бифуркации; в этих точках ветви  $Q_i$  касаются плоскостей  $k = k_i$  и расположены по одну сторону от них, причем

$$k_1 = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda_1 + \frac{m^2 g^2 (a_3^2 - a_2^2)}{(J_3 - J_2) \lambda_1^3} \quad (123)$$

Если  $\kappa < 0$ , то степень неустойчивости вращений тела вокруг осей, перпендикулярных осям наименьшего и наибольшего (среднего) моментов инерции, увеличивается (уменьшается) на единицу; случай  $\kappa = 0$  требует особого обсуждения и будет рассмотрен ниже.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 1, а указаны кривая перманентных вращений тела и распределение степени неустойчивости на ее ветвях для  $k > 0$  в случае, когда  $\kappa > 0$  и выполнены все условия (3.3).

*Замечание.* Ветви  $P_i$  вращений тела вокруг главных осей инерции существуют при любых соотношениях между полуосями поверхности тела, тогда как при невыполнении  $a_1 < a_2 < a_3$  некоторые или все ветви  $Q_i$  вращений тела вокруг осей, расположенных в его главных плоскостях инерции, исчезают (становятся мнимыми). При этом уменьшается число точек бифуркации на ветвях  $P_i$  и изменяется характер устойчивости отдельных частей этих ветвей.

Так, при условии  $a_2 < a_1 < a_3$  (при этом  $\kappa > 0$ ) исчезает ветвь  $Q_3$ , а при условии  $a_1 < a_3 < a_2$  ( $\kappa < 0$ ) — ветвь  $Q_1$ ; при условии  $a_2 < a_3 < a_1$  ( $\kappa > 0$ ) исчезают ветви  $Q_2$  и  $Q_3$ , а при условии  $a_3 < a_1 < a_2$  ( $\kappa < 0$ ) — ветви  $Q_1$  и  $Q_2$ ; наконец, при условии  $a_3 < a_2 < a_1$ , которое заведомо выполнено для однородного эллипсоида (напомним, что, по предположению,  $J_1 < J_2 < J_3$ ), исчезают все ветви  $Q_i$ .

На фиг. 2 (обозначения см. на фиг. 1) указаны проекции кривых перманентных вращений тела на плоскость  $(k, \lambda)$  и распределение степени неустойчивости на ее ветвях для  $k > 0$  в случаях а)  $a_2 < a_1 < a_3$ , б)  $a_2 < a_3 < a_1$ , в)  $a_3 < a_2 < a_1$  соответственно (при выполнении условий 3.3).

Отметим, что перманентные вращения тела, степень неустойчивости которых равна двум, могут быть устойчивы по Ляпунову (при этом имеет место гироскопическая стабилизация, которая, однако, разрушается под действием сил с полной относительно скоростей позиционных координат диссипацией). Строгое исследование устойчивости таких вращений требует применения методов Колмогорова — Арнольда — Мозера (заметим, что приведенная по Раусу система в данной задаче имеет две степени свободы) и здесь не обсуждается.

4. Обратимся к исследованию случая  $\kappa = 0$ . Прежде всего заметим, что этот случай возможен только при  $a_1 < a_2 < a_3$  и для него выражения

$$\frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2}, \quad \frac{J_3 - J_2}{a_3^2 - a_2^2} \quad (123)$$

инвариантны относительно циклической перестановки индексов 1, 2, 3 (будем обозначать их соответственно  $J$  и  $\mu$ ; очевидно,  $\mu > 0$  и  $J + \mu z^2 = J_1 \gamma_1^2 + J_2 \gamma_2^2 + J_3 \gamma_3^2 > 0$ ). При этом уравнения (1.4), (1.5) допускают

все шесть однопараметрических семейств решений (2.1), (2.2) и, кроме того, двухпараметрическое семейство

$$(4.1) \quad \omega_1 = \lambda\gamma_1 (123), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2 = z^2, \quad z = mg/(\mu\lambda^2), \quad \sigma = J\lambda^2, \quad k = J\lambda + m^2g^2/(\mu\lambda^3)$$

(свободные параметры, например  $\lambda$  и  $\gamma_2$ ).

Решения (4.1) описывают равномерные вращения тела вокруг произвольно расположенной вертикальной оси и существуют при  $a_1 \leq z \leq a_3$  т. е. при

$$mg/(\mu a_3) \leq \lambda^2 \leq mg/(\mu a_1)$$

В пространстве  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda, \sigma, k)$  решения (4.1) можно представить в виде двумерной поверхности  $S$ , натянутой на ветви  $Q_i^\circ$ , в которые переходят ветви  $Q_i$  при  $k = 0$ .

В подпространстве  $(\lambda, \sigma, k)$  поверхность  $S$  и ветви  $Q_i^\circ$  сливаются в одну кратную кривую, расположенную между плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_3$  и пересекающую плоскость  $\pi_2$  (на фиг. 3, а показана ее проекция  $(L) = (L_1) \cup \cup (L_2)$  на плоскость  $(k, \lambda)$ ), тогда как в подпространстве  $\gamma_i$  ветви  $Q_i^\circ$  не совпадают и по-прежнему имеют вид, указанный на фиг. 1, б.

На фиг. 3, б указан вид поверхности  $S$  в положительном октанте этого подпространства. Отметим, что ее можно разбить на две части:  $S_{12}$  ( $a_2^2 \leq z^2 \leq a_3^2$ ) и  $S_{23}$  ( $a_1^2 \leq z^2 \leq a_2^2$ ), общая граница которых (сепаратриса) определяется системой уравнений<sup>1</sup>

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2 = a_2^2$$

а точка ее пересечения с ветвью  $Q_2^\circ$  делит последнюю также на две части:  $Q_{12}^\circ$  ( $\lambda^2 \leq \lambda_*^2$ ) и  $Q_{23}^\circ$  ( $\lambda^2 \geq \lambda_*^2$ ), причем  $\lambda_*^2 = mg/(\mu a_2)$ . В области  $S_{12}$  перманентные вращения (4.1) рождаются из перманентных вращений вокруг осей, перпендикулярных оси  $x_1$  ( $Q_1^\circ$ ), и непрерывно переходят в «медленные» ( $\lambda^2 \leq \lambda_*^2$ ) перманентные вращения вокруг осей, перпендикулярных оси  $x_2$  ( $Q_{12}^\circ$ ), а в области  $S_{23}$  перманентные вращения (4.1) рождаются из «быстрых» ( $\lambda^2 \geq \lambda_*^2$ ) перманентных вращений вокруг осей, перпендикулярных оси  $x_2$  ( $Q_{23}^\circ$ ), и непрерывно переходят в перманентные вращения вокруг осей, перпендикулярных оси  $x_3$  ( $Q_3^\circ$ ), так что (см. фиг. 3, а)  $(L_1) = (Q_1^\circ) = (Q_{12}^\circ) = (S_{12})$ ,  $(L_2) = (Q_3^\circ) = (Q_{23}^\circ) = (S_{23})$ .

Скобки указывают, что рассматриваются проекции соответствующих кривых и поверхностей на то или иное подпространство (на фигурах скобки опущены).

5. Таким образом, все точки ветвей  $Q_i^\circ$  являются точками бифуркации (формально это следует также и из (3.2), поскольку при  $k = 0$  вторая вариация функции  $W$  для перманентных вращений (2.2) становится вырожденной). Следовательно, при  $k = 0$  ни перманентные вращения (2.2) (так как все они отвечают точкам бифуркации), ни перманентные вращения (4.1) (так как размерность семейства этих вращений больше числа произвольных постоянных интегралов (1.2) и (1.3)) не могут быть ни при каких условиях устойчивыми по всем переменным.

Кроме того, заметим, что при  $k = 0$  функцию  $W$  можно привести к виду

$$W^\circ = mz^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + 2mgz - \mu\lambda^2z^2$$

$$\Omega_i = \omega_i - \lambda\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Очевидно, функция  $W^\circ$  зависит от комбинаций  $\Omega_i$  и  $z$  переменных  $\omega_i, \gamma_i$ , причем число этих комбинаций меньше числа исходных переменных.

Таким образом, в рассматриваемом случае имеет смысл ставить вопрос об устойчивости равномерных вращений (2.2) и (4.1) по отношению к переменным  $\Omega_i, z$  [2], т. е. по отношению к части переменных.

Обозначим вариацию переменной  $z$  через  $\zeta$ , а для вариаций остальных переменных, входящих в функцию  $W^\circ$ , сохраним прежние обозначения. Тогда для решений (2.2) и (4.1) вторая вариация функции  $W^\circ$  при условиях  $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$  примет вид

$$\delta^2 W^\circ = mz^2 + J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 + J_3 \Omega_3^2 - \frac{\mu \lambda^2}{J + \mu z^2} \frac{dk}{d\lambda} \zeta^2$$

где, как уже отмечалось,  $\mu > 0$  и  $J + \mu z^2 > 0$ , а функция  $k(\lambda)$  определяется последним соотношением в (4.1).

Анализ функции  $k(\lambda)$  дает, что  $dk/d\lambda < 0$  на всех ветвях  $Q_i^\circ$  и всей поверхности  $S$ , если  $J < 3\mu a_1^2$ ; на всей ветви  $Q_1^\circ$ , на части  $Q_{12}^\circ$  ветви  $Q_2^\circ$  и части  $S_{12}$  поверхности  $S$ , а также при условии, что  $\lambda^2 < 3mg/J$ , — на ветви  $Q_3^\circ$ , на части  $Q_{23}^\circ$  ветви  $Q_2^\circ$  и части  $S_{23}$  поверхности  $S$ , если  $3\mu a_1^2 \leq J < 3\mu a_2^2$ , и наконец, при условии, что  $\lambda^2 < 3mg/J$ , — на ветви  $Q_1^\circ$ , на части  $Q_{12}^\circ$  ветви  $Q_2^\circ$  и части  $S_{12}$  поверхности  $S$ , если  $3\mu a_2^2 \leq J < 3\mu a_3^2$  (в противных случаях  $dk/d\lambda > 0$ ).

Таким образом, перманентные вращения тела вокруг осей, направляющие косинусы которых принадлежат области  $S_{12} \cup Q_1^\circ \cup Q_{12}^\circ$  единичной сферы (1.3), всегда устойчивы при  $J < 3\mu a_2^2$ , а также, если  $\lambda^2 < 3mg/J$ , при  $3\mu a_2^2 \leq J < 3\mu a_3^2$ . Перманентные вращения тела вокруг осей, направляющие косинусы которых принадлежат области  $S_{23} \cup Q_{23}^\circ \cup Q_3^\circ$ , всегда устойчивы при  $J < 3\mu a_1^2$ , а также, если  $\lambda^2 < 3mg/J$ , при  $3\mu a_1^2 \leq J < 3\mu a_2^2$ .

Наконец, заметим, что при  $\kappa = 0$  каждая пара точек бифуркации на ветвях  $P_1, P_2, P_3$  сливается в одну двойную точку. При этом равномерные вращения тела вокруг оси наименьшего (наибольшего) момента инерции либо устойчивы, если  $\lambda^2 < mg/\mu a_1$  ( $\lambda^2 > mg/(\mu a_3)$ ), либо их степень неустойчивости равна двум, если  $\lambda^2 > mg/(\mu a_1)$  ( $\lambda^2 < mg/(\mu a_3)$ ), а равномерные вращения тела вокруг оси среднего момента инерции почти всегда неустойчивы ( $\chi = 1$  при  $\lambda^2 \neq mg/(\mu a_2)$ ).

На фиг. 3, а указана проекция многообразия перманентных вращений тела на плоскости  $(k, \lambda)$  и распределение степени неустойчивости на ее ветвях для  $k > 0$  (при условии  $J < 3\mu a_1^2$ ).

Заметим, что перманентные вращения (2.2) и (4.1), для которых  $dk/d\lambda > 0$ , также могут быть устойчивыми по Ляпунову (по отношению к части переменных).

6. Отметим некоторые особенности рассмотренной задачи. Во-первых, трехосный эллипсоид на гладкой плоскости может вести себя аналогично волчку «тип-топ» (например, при  $J_1 < J_2 < J_3, a_1 < a_2 < a_3$ ). Если такой эллипсоид поставить в положение с наинизшим расположением центра масс и быстро закрутить вокруг вертикали, то эллипсоид перекатится в положение с наивысшим расположением центра масс и будет вращаться вокруг вертикали с угловой скоростью, меньшей исходной (фиг. 1, а, в). Заметим, что обоснование такого поведения трехосного эллипсоида не требует, в отличие от обоснования переверота волчка (симметричного тела), учета трения скольжения.

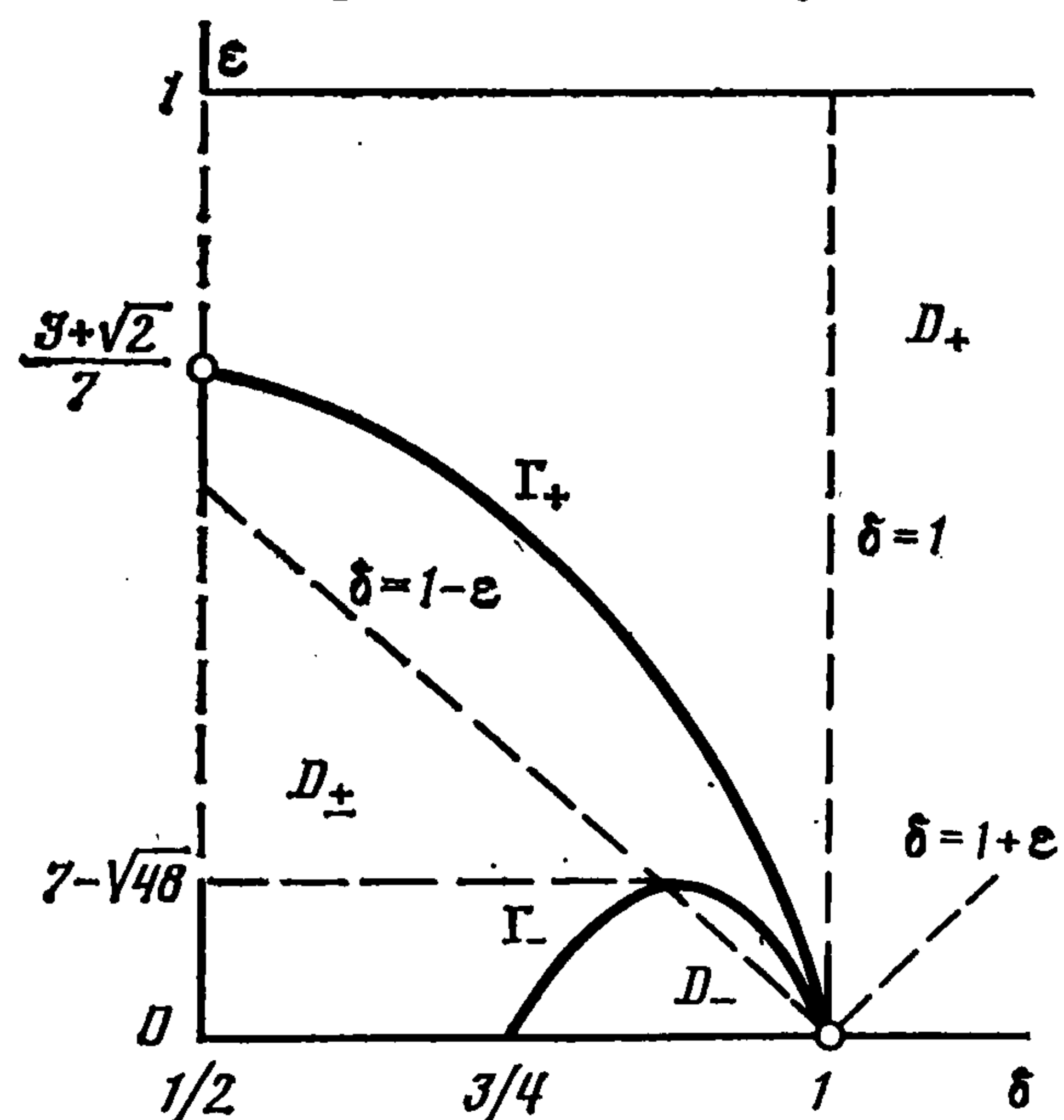
Во-вторых, если параметры эллипсоида удовлетворяют условию  $\kappa = 0$ , то размерность многообразия его стационарных движений больше числа известных интегралов рассматриваемой задачи, отличных от интеграла энергии и тривиального. Интересно отметить, что условие  $\kappa = 0$  совпадает с необходимым условием существования дополнительного интеграла в этой задаче [3].

Наконец, при  $\kappa = 0$  степень неустойчивости перманентных вращений тела вокруг главных осей инерции меняется при переходе через точки бифуркации на четное число

(фиг. 3, а). Такая смена устойчивости вызвана кратностью этих точек, каждая из которых получена слиянием пары простых при  $\kappa \neq 0$  точек бифуркации (при  $\kappa = 0$  в точках бифуркации оба коэффициента устойчивости Пуанкаре обращаются в нуль одновременно).

7. В работе [4] в условиях устойчивости (неустойчивости) (3.5) ((3.6)) регулярной прецессии волчка пропущен множитель  $dk/d\lambda$ , где  $k$  определяется соотношением (2.7') [4]. Точное условие устойчивости (неустойчивости) имеет вид  $(J_1 - J_3) dk/d\lambda > 0$  ( $< 0$ ). При  $J_1 > J_3$  множитель  $dk/d\lambda$  больше нуля и регулярные прецессии волчка устойчивы. Если же  $J_1 < J_3$ , то  $dk/d\lambda$  может принимать как положительные (и тогда прецессии неустойчивы), так и отрицательные значения (и тогда прецессии устойчивы).

На плоскости параметров  $\varepsilon = a/\rho$ ,  $\delta = J_1/J_3$  задачи (обозначения см. в [4]) можно выделить три области (фиг. 4): область  $D_+$  (ограничена лучами  $\varepsilon = 0$ ,  $\delta > 1$  и  $\delta = 1/2$ ,  $\varepsilon > (3 + \sqrt{2})/7$  и кривой  $\Gamma_+$ ), в которой при любом фиксированном значении  $k$  интеграла (2.2) [4] существует не более одной регулярной прецессии, и эта прецессия всегда устойчива; область  $D_-$  (ограничена отрезком прямой  $\varepsilon = 0$ ,  $3/4 < \delta < 1$  и кривой  $\Gamma_-$ ), в которой при любом значении  $k$  существует также не более одной регулярной прецессии, но эта прецессия всегда неустойчива; область  $D_{\pm}$  (ограничена отрезками прямых



Фиг. 4

$\varepsilon = 0$ ,  $1/2 < \delta < 3/4$  и  $\delta = 1/2$ ,  $0 < \varepsilon < (3 + \sqrt{2})/7$  и кривыми  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ ), в которой могут существовать две регулярные прецессии и тогда одна из них («медленная»:  $\lambda^2 < \lambda_3^2$ ) устойчива, а другая («быстрая»:  $\lambda^2 > \lambda_3^2$ ) — неустойчива. Здесь  $\lambda_3$  — действительный корень уравнения  $dk/d\lambda = 0$  ( $\lambda_3^4 = 3m^2g^2a^2 [J_1J_3 (1 - \varepsilon^2) - J_1^2]^{-1}$ ), а кривые  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  задаются соответственно уравнениями

$$\Gamma_+ : 4\delta^2 - \delta(1 - \varepsilon)(7 + \varepsilon) + 3(1 - \varepsilon)^2 = 0$$

$$\Gamma_- : 4\delta^2 - \delta(1 + \varepsilon)(7 - \varepsilon) + 3(1 + \varepsilon)^2 = 0$$

Отметим, что указанные в [4] на фигуре, а —  $\varepsilon$  диаграммы отвечают значениям параметров, лежащим соответственно в области  $D_-$  левее прямой  $\delta = 1 - \varepsilon$  (а); в области  $D_-$  правее прямой  $\delta = 1 - \varepsilon$  (б); в области  $D_+$  правее прямой  $\delta = 1$  и левее прямой  $\delta = 1 + \varepsilon$  (в); в области  $D_+$  правее прямой  $\delta = 1 + \varepsilon$  (г). Для параметров, лежащих в области  $D_+$  левее прямой  $\delta = 1$ , диаграмма аналогична указанной на фигуре, б [4], только всю криволинейную ветвь следует пометить знаком плюс; для параметров, лежащих в области  $D_{\pm}$  выше (ниже) прямой  $\delta = 1 - \varepsilon$ , диаграмма аналогична указанной на фигуре б (а) [4], только часть криволинейной ветви этой диаграммы, примыкающую при  $\lambda^2 < \lambda_3^2$  к прямой  $\gamma_3 = +1$ , следует также пометить знаком плюс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений. — Теор. и прикл. мех., 1974, т. 5, № 1, с. 67—79.
2. Карапетян А. В., Рубановский В. Н. О теореме Рауса для систем с известными первыми интегралами — Сб. научно-метод. статей по теоретической механике, 1986, вып. 16, с. 62—69.
3. Буров А. А., Карапетян А. В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости. — ПММ, 1985, т. 49, № 3, с. 501—503.
4. Карапетян А. В., Рубановский В. Н. Об устойчивости стационарных движений неконсервативных механических систем. — ПММ, 1986, т. 50, № 1, с. 43—49.