Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 531.36 : 534

УСРЕДНЕНИЕ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С СИЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТОЙ

Акуленко Л. Д.

Исследуются вопросы применимости асимптотических методов усреднения для одночастотных квазилинейных систем в критическом случае. Считается, что на рассматриваемом асимптотически большом интервале времени частота (производная фазы колебаний или вращений) есть медленно изменяющийся параметр, допускающий аппроксимацию особенности степенной функцией медленного времени или малого параметра. Величина частоты может сильно изменяться, принимать сколь угодно малые значения, в том числе нулевые, и более того, «частота» может изменять знак. Такие ситуации возникают при исследовании колебательных и вращательных систем и особенно часто в задачах управления указанными объектами [1]. В работе приводится оценка погрешности метода усреднения (в классе степенных оценок по малому параметру на асимптотически большом интервале времени) и рассматриваются примеры анализа конкретных механических систем. Исследованию нелинейных колебательных систем методом усреднения в критических случаях («прохождение» сепаратрисы и резонансов) посвящен ряд работ (см. [2—5] и др.).

1. Постановка задачи. Рассматривается класс квазилинейных вращательно-колебательных систем, которые в переменных типа Ван дер Поля могут быть описаны задачей Коши вида [1, 6—8]

$$z^{\cdot} = \varepsilon Z(\tau, z, \varphi),\ z(t_0) = z^\circ,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \tag{1.1}$$

$$\varphi^{\cdot} = \nu(\tau, \varepsilon),\ \varphi(t_0) = \varphi^\circ,\ t \in [t_0, \Theta\varepsilon^{-1}],\ \tau = \varepsilon t$$

Здесь z — вектор произвольной размерности $n \geqslant 1$, $z \in D$, где D — некоторая открытая область; φ — скалярная фаза, $|\varphi| < \infty$, $\tau \in [\tau_0, \Theta]$ — медленное время, $\Theta > 0$ — постоянная, не зависящая от малого параметра $\varepsilon > 0$. Функция Z предполагается 2π-периодической (или квазипериодической или равномерно почти периодической [9], см. п. 4) функцией фазы φ, достаточно гладкой по z, τ в рассматриваемой области. Параметры задачи t_0, z°, φ° — известные начальные данные, не зависящие от ε.

При условиях отделимости частоты ν от нуля ($|\nu(\tau, \varepsilon)| \geqslant \nu_0 > 0$) и гладкости функции Z метод усреднения позволяет поставить в соответствие задаче Коши (1.1) задачу, усредненную по φ, решение которой ε-близко точному [1, 6—8]. Исследование усредненной системы аналитическими или численными методами бывает, как правило, существенно проще. На основе этого приближенного решения могут быть построены конструктивные процедуры разделения переменных z, τ, и φ с произвольной заданной степенью точности по ε для $t \in [t_0, \Theta\varepsilon^{-1}]$, см. [1, 6—8], а также схемы последовательных приближений (метод Пикара) [10]. Для приложений представляет интерес исследование критических случаев, когда частота $\nu(\tau, \varepsilon)$ может сильно изменяться и проходить асимптотически малые значения.

Далее считается, что величина частоты $\nu = \nu(\tau, \varepsilon)$ на рассматриваемом промежутке времени становится асимптотически малой по ε или может достигать нулевого значения, проходить эти значения и даже изменять знак. Для определенности предполагается, что функция $\nu(\tau, \varepsilon)$ аппроксимируется одним из выражений вида

$$(1.2) \qquad \nu = \nu(\tau, \varepsilon) = \gamma(\tau)\left|\frac{\tau_* - \tau}{\Theta - \tau_0}\right|^{\alpha} + \varepsilon^{\beta}\omega(\tau, \varepsilon)$$

$$(1.3) \qquad \nu = \nu(\tau, \varepsilon) = \gamma(\tau)\left|\frac{\tau_* - \tau}{\Theta - \tau_0}\right|^{\alpha}\operatorname{sign}(\tau_* - \tau) + \varepsilon^{\beta}\omega(\tau, \varepsilon)$$

Введенные в представлениях (1.2), (1.3) функции $\gamma(\tau)$, $\omega(\tau, \varepsilon)$ и параметры τ_*, α, β удовлетворяют условиям

$$(1.4) \qquad \gamma(\tau) \geqslant \gamma_0 > 0, \quad |\omega(\tau, \varepsilon)| \geqslant \omega_0 > 0$$
$$\tau_* \in [\tau_0, \Theta], \quad 0 \leqslant \alpha < \infty, \quad 0 < \beta \leqslant 1$$

Здесь параметры α, β, τ_* — постоянные, не зависящие от ε. Следует отметить, что случай $\beta \geqslant 1$ эквивалентен системе (1.1)—(1.3) с $\omega \equiv 0$; это достигается введением дополнительной медленной переменной z_{n+1}, $\dot{z}_{n+1} = \varepsilon^{\beta}\omega$ и соответствующей фазы $\psi = \varphi - z_{n+1}$. Далее, введением безразмерного времени

$$(1.5) \qquad t' = \frac{t - t_0}{\Theta - \tau_0}, \quad t' \in [0, \varepsilon^{-1}], \quad \tau' = \varepsilon t' = \frac{\tau - \tau_0}{\Theta - \tau_0}, \quad \tau' \in [0, 1]$$
$$\tau_*' = \frac{\tau_* - \tau_0}{\Theta - \tau_0}, \quad \tau_*' \in [0, 1], \quad |\tau_*' - \tau'| \in [0, 1]$$

задача Коши (1.1) и выражения (1.2)—(1.4) приводятся к более удобному виду (штрихи затем опускаются для сокращения записи).

Для задачи Коши (1.1)—(1.4) (с учетом замен (1.5)) требуется построить схему приближенного решения и обоснования оценки метода усреднения в классе степенных оценок по ε на асимптотически большом интервале времени.

Случаи, когда величина частоты $\nu(\tau, \varepsilon)$ (1.2) или (1.3) асимптотически мала по ε или становится сколь угодно малой в процессе эволюции системы, существенно осложняют применение различных схем усреднения [1, 4—8]. Трудности могут быть обусловлены особенностями правых частей уравнений стандартного вида (см. п. 3), а также невыполнением основного требования метода усреднения относительно существования их равномерного среднего по t [6—8]. Обоснование схем усреднения, связанное с соответствующими заменами медленных переменных, и оценка погрешности метода становятся несостоятельными, поскольку выражения в формулах замены содержат частоту ν в знаменателе [1, 6—8]. Анализ элементарных примеров [5] показывает, что в случае асимптотически малой частоты ($\nu \sim \varepsilon$) близость решений формально усредненной по фазе и исходной систем для $t \sim \varepsilon^{-1}$, как правило, не имеет места. Таким образом, возможны ситуации, когда метод усреднения по существу оказывается непригодным для приближенного исследования систем типа (1.1)—(1.4) (φ — «медленная» или «невращающаяся» фаза). В таких случаях следует применять иные асимптотические или численно-аналитические методы. Для рассматриваемого класса систем (1.1)—(1.4) (имеется ряд других достаточно широких классов вращательно-колебательных систем) метод усреднения оказывается неприменимым формально, поэтому требуются более точные оценки погрешности, которые могут быть удовлетворительными при решении прикладных задач.

2. Построение оценок метода усреднения. Далее рассматриваются частные случаи выражений (1.2)—(1.4) для частоты $\nu(\tau, \varepsilon)$. Затем на основе полученных строятся оценки погрешности в более общих случаях.

Сперва рассмотрим частный случай выражений (1.2)—(1.4) при $\beta = 1$, что, как указывалось выше, эквивалентно случаю $\omega \equiv 0$. Итак, пусть для определенности далее рассматривается функция ν вида (1.2) при $\omega \equiv 0$, т. е. в безразмерных переменных (1.5)

$$(2.1) \qquad \nu = \nu(\tau) = \gamma(\tau)\,|\tau_* - \tau|^{\alpha}, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \tau, \tau_* \in [0, 1]$$

Тогда без ограничений общности в (1.1), (2.1) можно положить $\gamma(\tau) \equiv \gamma_* = \mathrm{const}$, что достигается заменой аргумента τ на ϑ по формулам

$$\gamma_* |\vartheta_* - \vartheta|^\alpha d\vartheta/d\tau = \gamma(\tau) |\tau_* - \tau|^\alpha$$

$$\vartheta = \vartheta(\tau, \tau_*), \quad \vartheta(0, \tau_*) = 0, \quad \vartheta_* = \vartheta(\tau_*, \tau_*)$$

$$|\vartheta_* - \vartheta|^{1+\alpha} \operatorname{sign}(\vartheta_* - \vartheta) = \frac{1+\alpha}{\gamma_*} \int_{\tau_*}^{\tau} \gamma(\lambda) |\tau_* - \lambda|^\alpha d\lambda$$

$$\vartheta_* = \left[\frac{1+\alpha}{\gamma_*} \int_0^{\tau_*} \gamma(\tau) |\tau_* - \tau|^\alpha d\tau\right]^{1/(1+\alpha)}$$

Пусть затем известна функция $\zeta = \zeta(\tau, z^\circ)$ — решение формально усредненной по φ системы (1.1) для z:

$$\zeta' = Z_0(\tau, \zeta), \quad \zeta(0) = z^\circ, \quad (') \equiv (d/d\tau) \tag{2.2}$$

$$Z_0(\tau, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\tau, \zeta, \varphi) d\varphi, \quad \tau \in [0, 1], \quad \zeta \in D$$

Тогда оценка погрешности $(z - \zeta)$ находится, как обычно [6—8], при помощи леммы Гронуолла. Посредством подстановки

$$z = \zeta + v + \delta, \quad \varphi(t, \varepsilon) \equiv \varphi^\circ + \int_0^t \nu(\varepsilon s) ds \tag{2.3}$$

$$v = v(t, \tau, \zeta, \varepsilon) \equiv \varepsilon \int_0^t [Z(\tau, \zeta, \varphi(s, \varepsilon)) - Z_0(\tau, \zeta)] ds$$

в которой переменные τ, ζ при интегрировании по s считаются параметрами, для неизвестной δ стандартным образом [6] получается оценка

$$|\delta| \leqslant e^L \max_t \varepsilon \int_0^t \left(L|v| + M\left\|\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right\| + \left|\frac{\partial v}{\partial \tau}\right|\right) ds \leqslant \tag{2.4}$$

$$\leqslant K e^L \max_t \left(|v| + \left\|\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right\| + \left|\frac{\partial v}{\partial \tau}\right|\right), \quad t \in [0, \varepsilon^{-1}]$$

Здесь L — постоянная Липшица функции Z по $z \in D$, M — максимум Z_0 по τ, $\tau \in [0, 1]$, K — некоторая постоянная, определяемая через L, M. Таким образом, согласно (2.3), (2.4) погрешность метода усреднения $(z - \zeta)$ определяется оценками величины $|v|$, $|\partial v / \partial \tau|$ и $\|\partial v / \partial \zeta\|$, которые имеют одинаковый порядок малости по ε для $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$. Ниже излагается способ получения таких оценок для рассматриваемой системы (1.1), (2.1).

Итак, пусть требуется оценить по параметру ε величину

$$w = \max_t \varepsilon \left|\int_0^t f(\varphi(s, \varepsilon)) ds\right|, \quad t \in [0, \varepsilon^{-1}] \tag{2.5}$$

Здесь $f(\varphi)$ — периодическая (возможно, квазипериодическая, см. п. 4) функция φ, имеющая нулевое среднее согласно (2.3). Дифференциальную связь между t и φ можно привести к выражению вида (для сокращения записи полагается $\varphi(0) = 0$)

$$\varphi^\cdot \equiv d\varphi/dt = \nu(\tau) \equiv \gamma_* |\tau_* - \tau|^\alpha = \tag{2.6}$$

$$= \gamma_* |\tau_*^{1+\alpha} - (1+\alpha)\gamma_*^{-1}\sigma|^{\alpha\rho} \equiv \lambda(\sigma), \quad \rho = (1+\alpha)^{-1}, \quad \sigma = \varepsilon\varphi$$

Тогда с учетом (2.6) выражение для w (2.5) можно переписать следующим образом:

$$(2.7)\qquad w=\frac{1}{\gamma_*}\max\nolimits_\varphi \varepsilon\left|\int\limits_0^\varphi f(\psi)\left|\tau_*^{1+\alpha}-\frac{1+\alpha}{\gamma_*}\varepsilon\psi\right|^{-\alpha\rho}d\psi\right|$$

$$\varphi\in[0,\Gamma\varepsilon^{-1}],\quad \Gamma=\frac{\gamma_*}{1+\alpha}\left|\tau_*^{1+\alpha}-|\tau_*-1|^{1+\alpha}\right|$$

Величина новой медленной переменной $\sigma=\sigma_*\equiv\gamma_*(1+\alpha)^{-1}\tau_*{}^{1+\alpha}$, для которой согласно (2.6) частота $\lambda(\sigma_*)=\nu(\tau_*)=0$, удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\sigma_*\leqslant\Gamma$, поскольку $0\leqslant\tau_*\leqslant 1$. Далее элементарными преобразованиями и подстановками для искомой оценки w (2.7) можно получить выражение

$$(2.8)\qquad w\leqslant O\varepsilon^\rho,\ 0<\rho\leqslant 1,\ O=\mathrm{const}$$

$$O=\gamma_*^{-\rho}\rho^{\alpha\rho}\left[|F(\sigma_*/\varepsilon)|+\max_{\sigma\in[\sigma_*,\Gamma]}|F((\sigma-\sigma_*)/\varepsilon)|\right]$$

$$F(\varkappa/\varepsilon)=\int\limits_0^{\varkappa/\varepsilon}\frac{f(\sigma_*/\varepsilon-y)}{y^{\alpha\rho}}dy$$

Поскольку $f(\sigma_*/\varepsilon-y)$ — 2π-периодическая (или квазипериодическая) функция y, имеющая по отношению к ε равномерное нулевое среднее, а показатель $\alpha\rho$ удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\alpha\rho<1$, то для интегралов в (2.8) можно получить равномерные оценки.

Согласно (2.8), требуется оценить несобственный интеграл $F(\varkappa/\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varkappa\in[0,\Gamma]$. Подынтегральная функция имеет особенность при $y=0$, а верхний предел интеграла $\varkappa/\varepsilon\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Для оценки этого интеграла он разбивается на два

$$(2.9)\qquad F(\varkappa/\varepsilon)=F(h)+(F(\varkappa/\varepsilon)-F(h))\equiv F_1+F_2$$

$$|F|\leqslant|F_1|+|F_2|,\quad 0\leqslant h<\varkappa/\varepsilon$$

$$|F_1|\leqslant ah^\rho,\quad a=(1+\alpha)\max_{|y|<\infty}|f|$$

$$|F_2|\leqslant b(\varepsilon)\left[h^{-\alpha\rho}+2(\varepsilon/\varkappa)^{\alpha\rho}\right]$$

$$b(\varepsilon)=\max_{0\leqslant h\leqslant H\leqslant\varkappa/\varepsilon}\left|\int\limits_h^H f\,dy\right|$$

Минимум по h $(0\leqslant h\leqslant\varkappa/\varepsilon)$ оценки для F (2.9) достигается при $h=\alpha b/a$; в результате можно получить следующую равномерную по ε оценку:

$$(2.10)\qquad |F(\varkappa/\varepsilon)|\leqslant a^{\alpha\rho}\alpha^{-\alpha\rho}b^\rho/\rho+2b(\varepsilon)(\varepsilon/\varkappa)^{\alpha\rho}$$

Таким образом, искомая оценка погрешности метода усреднения для системы (1.1), (2.1), усредненной по φ, на основании выражений (2.3), (2.4), (2.10) приводится к виду

$$(2.11)\qquad |z-\zeta|\leqslant Ce^{L}\varepsilon^\rho,\ t\in[0,\varepsilon^{-1}]$$

$$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\quad 0<\rho\leqslant 1\quad(0\leqslant\alpha<\infty)$$

Здесь C — постоянная, определяемая конструктивно на основе введенных выше параметров K, γ_*, α и постоянных a, b, характеризующих согласно (2.3), (2.5), (2.8)—(2.10) оценки величин $|v|$, $|\partial v/\partial\tau|$, $\|\partial v/\partial\zeta\|$. При сделанных в п. 1 предположениях относительно свойств гладкости вектор-функции Z (в частности, непрерывной дифференцируемости по z, τ и непрерывности по φ) функция f, отвечающая соответственно v, $\partial v/\partial\tau$, $\partial v/\partial\zeta$ в оценке (2.4), будет равномерно ограниченной для всех рассматриваемых значений фазы φ, что приводит к ограниченности соответствующего коэффициента $a(\alpha)$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ в оценке (2.9) для F_1. Среднее значение периодической или квазипериодической, т. е. имеющей конечномерный частотный базис (см. [11]), функции f по построению равно нулю. Поэтому интеграл в соответствующем выражении $b(\varepsilon)$ оценки (2.9) для F_2 также ограничен. Это непосредственно следует из представления Фурье [5—8, 11]. В случае равномерной почти периодической функции $f(\varphi)$ $(|\varphi| < \infty)$ требуется условие отделимости от нуля множества частот λ_k ее представления Фурье [9], т. е.

$$\lambda_k \geqslant \lambda^* > 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k^c \cos \lambda_k \varphi + f_k^s \sin \lambda_k \varphi)$$

В противном случае, когда $\lambda_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$, предполагается достаточно быстрое убывание коэффициентов f_k^c, f_k^s. Например, к указанному виду функций f приводит случай линейной по z системы (1.1) с равномерно почти периодической матрицей коэффициентов и вектором неоднородности [9].

Из (2.11) следует оценка $|z - \zeta| = O(\varepsilon)$ при $\alpha = 0$, что отвечает равенству $\nu = \gamma$, т. е. некритическому случаю [6—8]. В пределе при $\alpha \to \infty$ получаем $F \to \infty$; однако вследствие выражения (2.8) для коэффициента O коэффициент C в (2.11) будет ограниченным, т. е. справедлива оценка $|z - \zeta| = O(1)$ соответствующая случаю $\nu = O(\varepsilon)$, в частности $\nu \equiv 0$ [5]. Заметим, что оценка (2.11) остается справедливой в более общих случаях, когда функция γ зависит непрерывно от ε $(\gamma = \gamma(\tau, \varepsilon))$, а правая часть системы (1.1) для z также зависит от ε, причем допускается зависимость вида

$$Z = Z^\circ(\tau, z, \varphi) + \varepsilon^\rho Z^*(\tau, z, \varphi, \varepsilon), \quad |Z^*| \leqslant M$$

$$z \in D, \quad \tau \in [0, 1], \quad |\varphi| < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

Посредством соотношений типа (2.3)—(2.10) с учетом неоднозначной зависимости $t(\varphi)$ или $\tau(\sigma)$ (см. (2.5)—(2.8)) устанавливается оценка (2.11) в случае знакопеременной частоты ν (1.3) при $\omega \equiv 0$. Аналогичные оценки справедливы в случаях, когда частота может многократно проходить нулевые значения. Ситуации, когда частота $\nu(\tau, \varepsilon)$ — разрывная функция τ, требуют отдельного изучения.

Пусть рассматривается дополнительный случай, когда на рассматриваемом промежутке времени $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ имеем $\nu = O(\varepsilon^\beta)$, $0 \leqslant \beta < 1$, что отвечает $\gamma(\tau) \equiv 0$ в выражениях (1.2), (1.3). Тогда введением нового малого параметра $\mu = \varepsilon^{1-\beta}$ и аргумента $\theta = \varepsilon^\beta t \in [0, \mu^{-1}]$ система (1.1) — (1.4) при учете (1.5) приводится к стандартному виду. В этой системе применима обычная процедура усреднения по быстрой в «медленном времени» θ фазе φ согласно [6—8]. При выполнении указанных выше требований гладкости к функции Z по медленным переменным схема усреднения первого порядка приводит к погрешности $O(\mu) = O(\varepsilon^{1-\beta})$ для $\theta \sim \mu^{-1}$ или $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Сочетанием изложенных выше приемов можно оценить погрешность метода усреднения для более общей ситуации (см. (1.2)—(1.4), (2.1))

$$\nu = \nu(\tau, \varepsilon) \equiv \varepsilon^\eta \gamma_0(\tau) \left| \frac{\tau_* - \tau}{\theta - \tau_0} \right|^\alpha, \quad 0 \leqslant \eta < 1, \quad 0 \leqslant \alpha < \infty \tag{2.12}$$

$$\nu = \nu(\tau, \varepsilon) \equiv \varepsilon^\eta \gamma_0(\tau) \left| \frac{\tau_* - \tau}{\theta - \tau_0} \right|^\alpha \operatorname{sign}(\tau_* - \tau) \tag{2.13}$$

В этих случаях оценка погрешности метода усреднения на основе выражений (2.11) и оценки для отмеченного выше дополнительного случая записывается следующим образом:

$$|z-\zeta| \leqslant C\mu^\rho = C\varepsilon^\chi, \quad \chi = (1-\eta)(1+\alpha)^{-1} \tag{2.14}$$
$$0 < \chi \leqslant 1, \ t \in [t_0, \Theta\varepsilon^{-1}], \ \theta \in [\theta_0, \Theta\mu^{-1}], \ C = \text{const}$$

Если выражение для частоты $\nu(\tau, \varepsilon)$ имеет общий вид, например (1.2), где $\gamma(\tau)$ и $\omega(\tau, \varepsilon)$ — знакоопределенные функции одного знака, то решение $\zeta(\tau, z^\circ)$ усредненной по φ системы (1.1) для $t - t_0 \sim \varepsilon^{-1}$ отличается от точного $z(t, z^\circ, \varepsilon)$ на величину $O(\varepsilon^\delta)$ $(\delta \geqslant 0)$, причем $\delta = \max(\rho, 1-\beta)$ в случае $\gamma(\tau, \varepsilon) = O(1)$ или $\delta = \max(\chi, 1-\beta)$, если $\gamma(\tau, \varepsilon) = O(\varepsilon^\eta)$, как в (2.12). В общем случае выражения $\nu(\tau, \varepsilon)$ вида (1.3) (и типа (2.13)) требуется более детальное изучение процесса «прохождения» нулевого значения частоты и возможного «застревания» ее в окрестности асимптотически малых значений.

3. Примеры зависимости стандартной системы и частоты от малого параметра для конкретных колебательных систем. *Система, близкая к свободной.* Рассматривается векторная система вида

$$x^{\cdot\cdot} = \varepsilon^2 f(\tau, x, \varepsilon^{-1}x^\cdot, \varphi, \varepsilon), \ x(0) = x^\circ, \ x^\cdot(0) = \varepsilon v^\circ \tag{3.1}$$
$$\varphi^\cdot = \nu(\tau, \varepsilon), \ \varphi(0) = \varphi^\circ; \ \tau = \varepsilon t \in [0, \Theta], \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

Здесь x, $x^\cdot = dx/dt$ — n-векторы, φ — скалярная фаза, $f(\tau, x, u, \varphi, \varepsilon)$ — регулярная вектор-функция. Посредством замены $x^\cdot = \varepsilon y$, $z = (x, y)$ задача Коши для системы (3.1) приводится к стандартной форме (1.1), в которой правая часть $\varepsilon Z = (\varepsilon y, \varepsilon f(\tau, x, y, \varphi, \varepsilon))$. При соответствующих предположениях относительно свойств функций f и ν к ней применимы процедуры метода усреднения для $t \in [0, \Theta\,\varepsilon^{-1}]$, развитые и обоснованные выше. В частности, если $f = f(\tau, x, x^\cdot, \varphi, \varepsilon)$, то замена $x^\cdot = \varepsilon y$ приводит к независимости этой функции от y в первом приближении по ε для $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Квазилинейная скалярная колебательная система вида $x^{\cdot\cdot} + \nu^2 x = \varepsilon\nu f$ с начальными условиями $x(0) = x^\circ$, $x^\cdot(0) = \nu(0, \varepsilon)\, v^\circ$ заменой типа Ван дер Поля приводится к виду (1.1), отвечающему дополнительному случаю, если $\nu = \varepsilon^\beta \omega(\tau, \varepsilon)$.

Возмущенная система с малыми гироскопическими силами. Например, экваториальная составляющая вектора угловой скорости возмущенных вращений динамически симметричного тела описывается задачей Коши вида [1]

$$x^\cdot = \nu y + \varepsilon f(\tau, x, y, \varepsilon), \ x(0) = x^\circ \tag{3.2}$$
$$y^\cdot = -\nu y + \varepsilon g(\tau, x, y, \varepsilon), \ y(0) = y^\circ$$

Заменой типа Ван дер Поля (x, y) на (a, b, φ)

$$x = a\cos\varphi + b\sin\varphi, \ y = -a\sin\varphi + b\cos\varphi, \ \varphi^\cdot = \nu(\tau, \varepsilon)$$

можно из (3.2) получить эквивалентную ей стандартную задачу

$$a^\cdot = \varepsilon(f\cos\varphi - g\sin\varphi), \ a(0) = a^\circ = x^\circ \tag{3.3}$$
$$b^\cdot = \varepsilon(f\sin\varphi + g\cos\varphi), \ b(0) = b^\circ = y^\circ$$

К задаче Коши (3.3) при соответствующих предположениях относительно свойств гладкости функций f, g и структуры функции $\nu(\tau, \varepsilon)$ (см. (1.2), (1.3) и др.) применимы различные схемы метода усреднения. Следует отметить, что зависимость частоты ν от τ может быть обусловлена изменением осевой составляющей вектора угловой скорости твердого тела (см. п. 4). Возможны другие примеры механического характера, приводимые к типу (1.1) квазилинейных вращательно-колебательных систем, исследуемому асимптотическими методами согласно п. 2.

4. Оптимальная стабилизация осевого вращения динамически симметричного аппарата посредством малых управляющих моментов сил. Исследуется задача гашения экваториальной составляющей вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости твердого тела при заданной переменной скорости ω_3 осевого вращения. Уравнения управляемых вращений в связанной с главными (центральными) осями инерции системе координат и соответствующая краевая задача принимают вид [1]

$$(4.1)\qquad I\omega_1^\bullet + (I_3 - I)\,\omega_3\omega_2 = M_1,\ \omega_1(0) = \omega_1^\circ,\ \omega_1(T) = 0$$
$$I\omega_2^\bullet - (I_3 - I)\,\omega_3\omega_1 = M_2,\ \omega_2(0) = \omega_2^\circ,\ \omega_2(T) = 0$$
$$I_3\omega_3^\bullet = M_3,\ \omega_3(0) = \omega_3^\circ,\ \omega_3(T) = \omega_3^T$$

В рассматриваемой системе тензор инерции $J = \mathrm{diag}\,(I_1, I_2, I_3)$ удовлетворяет условию $I_1 = I_2 = I \neq I_3$ (см. (4.1)). Далее для удобства вводятся безразмерные переменные: время t', фазовые координаты $l_{1,2}$ и ν, управления $u_{1,2}$, v, малый параметр ε и соответствующим образом пересчитываются начальные и конечные значения

$$(4.2)\qquad t' = \omega^\circ t,\ l_{1,2} = I\omega_{1,2} / L^\circ,\ \nu = (I_3\omega_3 / L^\circ)\,N$$
$$\varepsilon\alpha_{1,2}u_{1,2} = M_{1,2} / (L^\circ\omega^\circ),\ \varepsilon v = (M_3 / (L^\circ\omega^0))\,N,\ T' = \omega^\circ T$$
$$l_{1,2}(0) = I\,\omega_{1,2}^\circ / L^\circ = l_{1,2}^\circ,\ l_{1,2}(T') = 0$$
$$\nu\,|_{t'=0,T'} = (I_3\omega_3^{\circ,T} / L^\circ)\,N = \nu^{\circ,T},\quad N = (I_3 - I)\,L^\circ/(II_3\omega^\circ)$$

Здесь $\varepsilon\alpha_{1,2}$ ($\varepsilon \ll 1$) — малые величины, характеризующие эффективность управлений, ω°, L° — начальные значения величин вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и кинетического момента $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$ соответственно; штрихи у t' и T' далее опускаются. На основании соотношений (4.2) краевая задача (4.1) приводится к виду (см. (3.2))

$$(4.3)\qquad \dot{l}_{1,2} \pm \nu l_{2,1} = \varepsilon\alpha_{1,2}u_{1,2},\quad l_{1,2}(0) = \mathring{l}_{1,2},\quad l_{1,2}(T) = 0$$
$$\nu^\bullet = \varepsilon v,\ \nu(0) = \nu^\circ,\ \nu(T) = \nu^T$$

Предполагается далее, что момент времени $t = T$ окончания процесса управления определяется операцией изменения величины $\nu(t)$, характеризующей угловую скорость ω_3 осевой закрутки аппарата. Это может быть обусловлено ограничениями на управление v, $|v| \leqslant v_0$ (т. е. осевой момент сил M_3) и существенной величиной $|\nu^T - \nu^\circ|$ (т. е. разностью $(\omega_3^T - \omega_3^\circ)$). Итак, управление $v = v^*(t)$, переменная $\nu = \nu(\tau)$ и время T таковы:

$$(4.4)\qquad v = v^*(t) = v_0\,\mathrm{sign}\,(\nu^T - \nu^\circ),\ \nu = \nu(\tau) = \nu^\circ + v^*\tau$$
$$\tau = \varepsilon t \in [0, \Theta],\ \Theta = \varepsilon T = |\nu^T - \nu^\circ| / v_0\quad (v^* \equiv 0,\ t > T)$$

По сравнению с результатами [1] рассматривается более общий случай, когда осевая составляющая угловой скорости может изменять знак, т. е. существует такое $\tau = \tau_* \in (0, \Theta)$, что $\nu(\tau_*) = 0$. Ставится задача об оптимальном по расходуемой энергии управлении переменными $l_{1,2}$ с фиксированным согласно (4.4) моментом T окончания процесса.

Согласно п. 3, вводятся оскулирующие переменные $a_{1,2}$ заменой $l_1 = a_1\cos\varphi - a_2\sin\varphi$, $l_2 = a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi$, $\varphi^\bullet = \nu$, где фаза φ — известная функция времени. В результате преобразований исследуемая задача оптимального управления приводится к стандартному виду [1

$$(4.5)\qquad a_1^\bullet = \varepsilon\,(\alpha_1u_1\cos\varphi + \alpha_2u_2\sin\varphi),\ a_1(0) = l_1^\circ,\ a_1(T) = 0$$
$$a_2^\bullet = \varepsilon\,(-\alpha_1u_1\sin\varphi + \alpha_2u_2\cos\varphi),\ a_2(0) = l_2^\circ,\ a_2(T) = 0$$
$$\varphi^\bullet = \nu(\tau) \equiv \nu^\circ + v^*\tau,\ \varphi(0) = 0$$
$$\Phi[u_1, u_2] = \frac{1}{2}\int_0^\Theta (u_1^2 + u_2^2)\,d\tau \to \min_{u_1,\,u_2}$$

Здесь величина Θ считается достаточно большой (см. выше); поэтому возможные ограничения на управления u_1, u_2 не достигаются [1] и не приводятся в постановке задачи (4.5). На основании принципа максимума Л. С. Понтрягина можно установить, что переменные p_1, p_2 (импульсы), сопряженные фазовым переменным a_1, a_2, сохраняются, т. е. $p_{1,2} = \mathrm{const}$, а оптимальное управление равно

$$u_1 = \alpha_1 (p_1 \cos \varphi - p_2 \sin \varphi), \quad u_2 = \alpha_2 (p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi) \tag{4.6}$$

Подстановка выражений u_1, u_2 (4.6) в уравнения (4.5) приводит с учетом начальных условий к частному случаю задачи Коши вида (1.1), (1.3), поскольку ее правые части — известные 2π-периодические функции фазы φ. Решение краевой задачи находится также элементарно и приводит к весьма громоздким выражениям. Усреднение по φ согласно п. 2 позволяет получить простые приближенные выражения для фазовых переменных и импульсов

$$\begin{aligned} \xi_{1,2} &= \overset{\circ}{l}_{1,2} + {}^1/_2\eta_{1,2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \overset{\circ}{l}_{1,2} (1 - \tau\Theta^{-1}) \\ \eta_{1,2} &= -2\overset{\circ}{l}_{1,2} / [\Theta (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)] \end{aligned} \tag{4.7}$$

Величины постоянных $\eta_{1,2}$ в (4.7) задаются конечными нулевыми условиями для $\xi_{1,2}$ и элементарно определяются. Подстановка $\eta_{1,2}$ в управления $u_{1,2}$ (4.6) вместо $p_{1,2}$ дает искомое приближенно оптимальное программное управление (и его синтез)

$$\begin{aligned} u_1^* &= -2\alpha_1 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-1}\Theta^{-1} (l_1^\circ \cos \varphi - l_2^\circ \sin \varphi) \\ u_2^* &= -2\alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-1}\Theta^{-1} (l_1^\circ \sin \varphi + l_2^\circ \cos \varphi) \\ &(\overset{\circ}{l}_{1,2} \to l_{1,2}, \ \Theta \to \Theta - \tau) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Управление $u_{1,2}^* (\varphi, l_1^\circ, l_2^\circ)$ (4.8) приближенно оптимально в следующем смысле. Решение соответствующей задачи Коши (4.5) приводит к функциям $a_{1,2}^* (t, l_1^\circ, l_2^\circ, \varepsilon)$, значения которых при $t = T$ находятся в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности нуля. Значение функционала Φ (4.5) для $u_{1,2}^*$ (4.8) на величину $O (\sqrt{\varepsilon})$ отличается от точного минимального значения, что устанавливается непосредственным решением исходной задачи оптимального управления (4.5).

Следует отметить, что приведенное приближенное решение (4.4), (4.7), (4.8) задачи оптимального гашения экваториальной составляющей вектора угловой скорости тела и приведения его осевой составляющей в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестность заданного значения, т. е.

$$| \nu (\Theta) - \nu^T | \leqslant C \sqrt{\varepsilon}, \ [l_1^2 (\Theta) + l_2^2 (\Theta)]^{1/2} = [a_1^2 (\Theta) + a_2^2 (\Theta)]^{1/2} \leqslant C \sqrt{\varepsilon}$$

справедливо и в случае, когда рассматриваемое тело не является строго динамически симметричным, а справедливы оценки: $| I_1 - I_2 | = O (\varepsilon)$, $| I_{1,2} - I_3 | = O (1)$. Изложенный подход применим также для более широкого класса действующих на систему (4.1) возмущений, зависящих от вектора $\boldsymbol{\omega}$ и медленного времени τ (см. (3.2), (3.3)).

Для приложений представляется важным развитие и распространение аналогичного подхода метода усреднения на многочастотные системы при условиях «прохождения и застревания» на резонансах.

Большой интерес для практики и значительные теоретические трудности представляет анализ асимптотическими методами существенно нелинейных систем — однофазных типа (1.1) и многофазных, для которых частоты $\nu_j = \nu_j (z)$ в процессе эволюции могут достигать и «проходить» нулевые или резонансные значения [2—5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. *Арнольд В. И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 1, с. 9—12.
3. *Нейштадт А. И.* О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче.— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 2, с. 301—304.
4. *Нейштадт А. И.* Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4 с. 621—632.
5. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
7. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
8. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
9. *Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М.* Элементы теории функций. М.: Физматгиз, 1963. 244 с.
10. *Акуленко Л. Д.* Применение методов усреднения и последовательных приближений для исследования нелинейных колебаний.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 771—777.
11. *Акуленко Л. Д.* Асимптотическое решение двухточечных краевых задач.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 632—639.

Москва

Поступила в редакцию
7.V.1986