Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 531.36

ОБ УРАВНЕНИИ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Булатович Р. М.

Рассматривается уравнение Гамильтона — Якоби в окрестности положения равновесия, которое не является локальным минимумом потенциальной энергии. Если потенциал имеет локальный максимум, то уравнение Гамильтона — Якоби имеет гладкое или аналитическое решение в окрестности положения равновесия [1, 2]. В случае седловой точки предлагается искать решение в комплексной форме. В качестве следствия получена известная теорема Боля [3] об асимптотических движениях натуральной механической системы в окрестности положения равновесия. Изучается вопрос о наличии гладких решений уравнения Гамильтона — Якоби в случаях вырождения.

1. Комплексные решения уравнения Гамильтона — Якоби. Рассмотрим голономную механическую систему с n степенями свободы (x — ее обобщенные координаты, y — обобщенные импульсы), движение которой описывается каноническими уравнениями

$$x^{\cdot} = \partial H/\partial y,\ y^{\cdot} = -\partial H/\partial x;\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \tag{1.1}$$

где $H(x, y)$ — функция Гамильтона. Тогда соответствующее укороченное уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$H(x, \partial S/\partial x) = h \tag{1.2}$$

где h — произвольная постоянная (постоянная энергии).

Пусть найдена функция $S = S_1 + iS_2$; S_1, S_2: $R^n\{x\} \to R$, $i = \sqrt{-1}$, которая удовлетворяет уравнению (1.2). В фазовом пространстве $R^{2n}\{x, y\}$ введем многообразие $K = \{y = \partial S_1/\partial x,\ \partial S_2/\partial x = 0\}$.

Теорема 1. Если точка $(x^\circ, y^\circ) \in K$, то решение канонической системы с начальным условием (x°, y°) целиком лежит на K.

Доказательство. Заметим, что в силу уравнений (1.1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S_2}{\partial x_i} = \Sigma_2,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_i} - y_i\right) = \Sigma_1 + \frac{\partial H}{\partial x_i}\quad \Sigma_\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_j},$$
$$\alpha = 1, 2;$$

Дифференцируя (1.2) по x_i, получим $\Sigma_2|_K = 0$, $(\Sigma_1 + \partial H/\partial x_i)_K = 0$, что доказывает теорему.

Отметим, что если $S_2 \equiv 0$, то многообразие K лагранжево.

2. Решения в окрестности невырожденных положений равновесия натуральных систем и многообразия асимптотических движений. Рассмотрим натуральную механическую систему с аналитическим гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\, y_i y_j + \Pi(x)$$

где (a^{ij}) — положительно-определенная матрица кинетической энергии, а $\Pi(x)$ — потенциальная энергия системы. Уравнение Гамильтона — Якоби на нулевом уровне энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j} + \Pi(x) = 0 \tag{2.1}$$

Допустим, что $x = 0$ — положение равновесия ($d\Pi(0) = 0$) и $\Pi(0) = 0$. Не уменьшая общности, предположим, что в окрестности положения равновесия

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\Pi_k, \qquad a^{ij} = \delta^{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{ij}$$

$$\Pi_k = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} p_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

$$A_k^{ij} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} a^{ij}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

(Π_k, A_k^{ij} — формы степени k, а $\| \delta^{ij} \|$ — единичная матрица).

При условии, что потенциальная энергия в положении равновесия имеет невырожденный максимум, уравнение (2.1) исследовалось в работе [1]. Далее рассмотрим общий случай, когда в положении равновесия потенциальная энергия необязательно имеет максимум.

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде ряда

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i x_i^2 + \sum_{k=3}^{\infty} S_k, \qquad S_k = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} \tag{2.2}$$

Подставляя его в уравнение (2.1), получим $\Lambda_i = \pm\sqrt{-\lambda_i}$ ($i = 1, \ldots, n$). Возьмем $\Lambda_i = -\sqrt{-\lambda_i}$. Тогда коэффициенты формы S_k ($k = 3, 4, \ldots$) определяются из рекуррентного соотношения

$$\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k}\left(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i\alpha_i\right) a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} = -\Pi_k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=3}^{k-1}\frac{\partial S_l}{\partial x_i}\times$$
$$\times\frac{\partial S_{k+2-l}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{m=1}^{k-2} A_m^{ij}\sum_{l=2}^{k-m}\frac{\partial S_l}{\partial x_i}\frac{\partial S_{k+2-m-l}}{\partial x_j}$$

Так как Λ_i — либо действительные, либо мнимые числа, то если $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$ (положение равновесия невырождено), выражение $\alpha_1\Lambda_1 + \ldots + \alpha_n\Lambda_n$ никогда не обращается в нуль при целых неотрицательных α_i, таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$ ($k = 3, 4, \ldots$). Следовательно, формы S_k определяются однозначно. Сходимость полученного степенного ряда можно доказать методом работы [1].

Итак, справедлива

Теорема 2. В окрестности невырожденного положения равновесия существует решение уравнения (2.1), представимое в виде сходящегося ряда (2.2).

Отметим, что если $S(x)$ — решение, то $-S(x)$ — также решение. Пусть $\lambda_i < 0$ для $i = 1, \ldots, m$ и $\lambda_i > 0$ для $i = m + 1, \ldots, n$ ($0 \leqslant m \leqslant n$). Тогда имеем решение вида $S = S_1 + iS_2$, где

$$S_1 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{-\lambda_i}\,x_i^2 + \bar{S}_1(x), \qquad d^2\bar{S}_1(0) = 0$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\,x_i^2 + \bar{S}_2(x), \qquad d^2\bar{S}_2(0) = 0$$

Теорема 3. а) Если $m = 0$ ($x = 0$ — точка минимума потенциальной энергии), то инвариантное многообразие из теоремы 1 вырождается в состояние равновесия.

в) Если $m > 0$, то m-мерные многообразия

$$K_{\pm}{}^m = \{y = \pm \partial S_1/\partial x,\ 0 = \partial S_2/\partial z\},\ z = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

сплошь заполнены траекториями, асимптотически приближающимися к состоянию равновесия при $t \to \pm\infty$.

Доказательство. Случай а) тривиален. Случай $m = n$ рассмотрен в работе [1] (системы с гладким потенциалом были рассмотрены ранее в работе [2]). Пусть $0 < m < n$. Из (2.1) следует, что вещественная и мнимая части решения удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial S_1}{\partial x_i} \frac{\partial S_2}{\partial x_j} = 0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial S_2}{\partial x_j} = -\sqrt{\lambda_i}x_j + \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, \ldots, n \tag{2.4}$$

Так как якобиан

$$\left.\frac{D\,(\partial S_2/\partial x_{m+1}, \ldots, \partial S_2/\partial x_n)}{D\,(x_{m+1}, \ldots, x_n)}\right|_0 = (-1)^{n-m}\sqrt{\lambda_{m+1}} \ldots \sqrt{\lambda_n} \neq 0$$

то в окрестности начала координат систему уравнений (2.4) можно разрешить. В результате получим функции

$$x_{m+l} = f_l\,(x_1, \ldots, x_m)\ (f_l\,(0) = 0),\ l = 1, \ldots, n - m$$

Продифференцируем функцию $S_{2*} = S_2\,(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_{n-m}\,(x_1, \ldots, x_m))$ в силу системы

$$y_i = \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_i}\right)_* = -\sqrt{-\lambda_i}x_i + \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial x_i}\right)_*, \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.5}$$

Получим

$$\frac{dS_{2*}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_*{}^{ij}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_i}\right)_*\left(\frac{\partial S_2}{\partial x_j}\right)_*$$

что в силу соотношения (2.3) тождественно равняется нулю. Поскольку $\sqrt{-\lambda_1}\alpha_1 + \ldots + \sqrt{-\lambda_m}\alpha_m \neq 0$ при целых неотрицательных α_i, таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $S_{2*} \equiv \text{const} = 0$.

Следовательно

$$K_{\pm}{}^m = \{y = \pm\partial S_1/\partial x,\quad x_{m+l} = f_l\,(x_1, \ldots, x_m),\ l = 1, \ldots, n - m\}$$

— инвариантные m-мерные многообразия из теоремы 1. Так как $\pm S_{1*}$ имеет максимум (минимум) и производная по времени в силу системы (2.5) в окрестности положения равновесия положительна, то $K_{\pm}{}^m$ состоит из фазовых траекторий, асимптотически приближающихся к состоянию равновесия при $t \to \pm\infty$.

Кнезер [4] впервые доказал существование асимптотических движений систем с двумя степенями свободы в окрестности невырожденных положений равновесия, в которых потенциальная энергия имеет локальный максимум. В общем невырожденном случае асимптотические движения изучены Болем [3]. Теорема 3 связывает многообразия фазовых траекторий асимптотических движений с решениями уравнения Гамильтона — Якоби.

Обратимся теперь к более общему случаю, когда вместо натуральных систем рассматриваются полунатуральные системы.

Пусть уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-b_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}-b_j\right)+\Pi(x)=0$$

где $db_i\,(0)=0$, $i=1,\ldots,n$, т. е. линеаризованная система гироскопически несвязна. Теорема 2 остается справедливой: в общем невырожденном случае решения имеют вид $S^{\pm}=S_1^{\pm}+iS_2^{\pm}$ $(S^-\neq -S^+)$, где

$$S_1\pm=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\pm\sqrt{-\lambda_i}x_i^2+\bar{S}_1\pm(x),$$

$$S_2\pm=-\frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{n}\pm\sqrt{\lambda_i}x_i^2+\bar{S}_2\pm(x)$$

Как и в теореме 3, они определяют инвариантные многообразия асимптотически фазовых траекторий при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$. В отличие от натурального случая фазовые траектории проектируются на несовпадающие траектории асимптотических движений при $t\to\pm\infty$.

3. Вырожденный случай. В общем вырожденном случае уравнение (2.1) не имеет в окрестности точки $x=0$ аналитического решения. Неаналитические решения могут существовать (см. пример [1]). Будем рассматривать достаточно общий вырожденный случай, когда разложение потенциальной энергии в окрестности положения равновесия начинается с формы четного порядка вида $2\Pi_{2m}=-a^2\mid x\mid^{2m}$, $m>2$, $a^2=\mathrm{const}$. Для простоты предположим, что $n=2$. Переходя к полярным координатам $x_1=r\cos\varphi$, $x_2=r\sin\varphi$, преобразуем уравнения (2.1)

(3.1) $$(1+A^1)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{2}{r}A^2\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial S}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}(1+A^3)\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2=$$

$$=a^2r^{2m}+r^{2m+1}\sum_{j=1}^{\infty}r^{j-1}\Pi_{2m+j}(\varphi)$$

$$A^l=\sum_{k=1}^{\infty}r^kA^l_{2+k}(\cos\varphi,\sin\varphi),\qquad l=1,2,3$$

где многочлены A^l_{2+k} $(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ определенным образом зависят от коэффициентов форм $A_k{}^{ij}$ кинетической энергии.

Упрощенное уравнение

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2=a^2r^{2m}$$

имеет решение $S=ar^{m+1}/m+1$. Решение полного уравнения будем искать в виде

(3.2) $$S=\frac{a}{m+1}r^{m+1}+\sum_{j=1}^{\infty}r^{m+1+j}S_{m+1+j}(\varphi)$$

Теорема 4. Существует решение уравнения (3.1), представимое в виде ряда (3.2), сходящегося при достаточно малых r.

Справедлива следующая

Лемма. Если существует решение вида (3.2) уравнения (3.1), где

(3.3) $$A^l=A^l\,(\varepsilon,\ r,\ \varphi),\ l=1,\ 2,\ 3$$

при достаточно малом ε, сходящееся при $r\leqslant r_0$, то соответствующее решение уравнения (3.1) сходится при $r\leqslant\varepsilon r_0$.

Доказательство теоремы. В силу леммы достаточно доказать существование решения уравнения (3.1), (3.3). Пусть A — пространство функций, которые представляются при $r \leqslant r_0$ абсолютно сходящимися рядами

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} r^{m+1+j}\Phi_{m+1+j}(\varphi); \qquad \Phi_{m+1+j} \in C^{\infty}[0, 2\pi]$$

— бесконечно дифференцируемые 2π-периодические функции. В этом пространстве зададим норму

$$\| f \|_1 = \sup_k \{ \| f \|_1^{(k)} \}, \quad \| f \|_1^{(k)} = \sup_{\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} (m + 1 + j) r_0^{m+1+j} | \Phi_{m+1+j}^{(k)} |$$

где $\Phi^{(k)}$ — производная k-го порядка. Аналогично введем пространство B:

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} r^{2m+j}\Phi_{2m+j}(\varphi), \qquad \| f \|_2 = \sup_k \{ \| f \|_2^{(k)} \}$$

$$\| f \|_2^{(k)} = \sup_{\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} r_0^{2m+j} | \Phi_{2m+j}^{(k)} |$$

Пространства A и B банаховы.

Запишем уравнения (3.1), (3.3) в виде $F(S, \varepsilon) = 0$ и рассмотрим F как отображение достаточно малой окрестности

$$V = \{(S, \varepsilon): \| S - S_0 \|_1 < \delta, \ | \varepsilon | < \varepsilon_0\}, \quad S_0 = ar^{m+1}/m + 1$$

в B.

Справедливы следующие утверждения: 1) $F(S_0, 0) = 0$. 2) Отображение F непрерывно в точке $(S_0, 0)$. 3) Производная $F_S'(S, \varepsilon)$ существует в V и непрерывна в точке $(S_0, 0)$.

Покажем, что линейный оператор $F_S'(S_0, 0) = ar^m\partial/\partial r$ имеет ограниченный обратный. Действительно, пусть

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} r^{2m+j} V_{2m+j} \in B$$

Тогда уравнение $F_S'(S_0, 0)\ u = v$ имеет решение

$$u = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{m+1+j}}{m+1+j} V_{2m+j}, \quad \| u \|_1 \leqslant c \| v \|_2, \quad c = \frac{1}{ar_0^{m-1}}$$

Следовательно, в силу теоремы о неявной функции [5] при малых ε в пространстве A существует решение $S(r, \varphi, \varepsilon)$ уравнения $F(S(r, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) = 0$, мало отличающееся от S_0. Теорема доказана.

Возвращаясь к старым переменным x_1, x_2, получим по крайней мере функцию класса C^m. Полученные решения аналогично п. 2 определяют многообразия $y = \pm\partial S/\partial x$ фазовых траекторий асимптотических движений (ср. с [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булатович Р. М.* Существование решений уравнения Гамильтона — Якоби в окрестности невырожденных положений равновесия.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 330—333.
2. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики.— Вестн. МГУ. Сер. Математика — механика, 1980, № 4, с. 84—89.
3. *Боль П. Г.* Избранные труды. Рига: Изд-во АН ЛатвССР. 1961. 238 с.
4. *Kneser A.* Studien die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslage. (Zweiter Aufsatz).— J. reine und angew. Math., 1897, B. 11b, H. 3, S. 186—223.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.

Титоград

Поступила в редакцию
25.V.1985