Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 531.36

О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ ЧАПЛЫГИНА К ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА

Мощук Н. К.

Рассматриваются неголономные системы Чаплыгина [1] с n степенями свободы, обладающие m ($m < n$) линейными по скоростям первыми интегралами. Предполагается, что функция Лагранжа, составленная с учетом наложенных на систему неголономных связей, и эти интегралы не зависят от первых m обобщенных координат. Тогда при выполнении некоторых условий можно так ввести m линейных неголономных координат (квазикоординат), что относительно этих квазикоординат первые m уравнений движения будут иметь вид обычных уравнений Лагранжа.

Исследуется наиболее интересный — интегрируемый случай, когда $m = n - 1$. Показано, что если выполнены некоторые условия, то траектории такой системы в фазовом пространстве представляют собой квазипериодические обмотки n-мерных торов. Приведены примеры: качение тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости, движение круглого диска с острым краем по гладкому горизонтальному льду.

Проблема приведения уравнений движения неголономных систем в форме уравнений Чаплыгина к виду обычных уравнений Лагранжа и Гамильтона имеет богатую историю. Подробный обзор и анализ существующих подходов к решению этой проблемы содержится в [2].

1. Рассмотрим натуральную неголономную механическую систему Чаплыгина [1], находящуюся под действием потенциальных сил. Предполагается, что функция Лагранжа, составленная с учетом наложенных на систему неинтегрируемых связей, имеет вид

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) = T - \Pi, \quad T = {}^1/_2\mathbf{q}^{\cdot T}\mathbf{\Omega}\mathbf{q}^\cdot, \quad \Pi = \Pi(\mathbf{q}) \tag{1.1}$$
$$\mathbf{\Omega} = \| \omega_{ij}(\mathbf{q})\| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Здесь $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^\cdot$ — матрицы-столбцы обобщенных координат и скоростей системы, $\mathbf{\Omega}$ — положительно-определенная симметрическая $n \times n$-матрица, T и П —соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы. Полная энергия системы сохраняется ($T + \Pi = h = \text{const}$), а дифференциальные уравнения движения в форме Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma} \tag{1.2}$$

будут описывать движение системы независимо от уравнений неинтегрируемых связей. В (1.2) $\mathbf{\Gamma}$ — матрица-столбец членов неголономности ($\Gamma_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ — квадратичная форма скоростей $q^\cdot_j$).

Уравнения Чаплыгина можно записать и в канонической форме

$$\mathbf{p}^\cdot = -\partial H/\partial \mathbf{q} + \mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{q}^\cdot = \partial H/\partial \mathbf{p} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{q}^\cdot$, а функции $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $\Phi_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ получаются из функций $L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ и $\Gamma_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ в результате замены обобщенных скоростей $\mathbf{q}^\cdot$ на обобщенные импульсы $\mathbf{p}$.

Пусть $\partial L/\partial q_k = 0$ ($k = 1, \ldots, m < n$). В отличие от голономных систем это не приводит к линейным по скоростям первым интегралам уравнений движения. Однако в ряде задач эти интегралы удается найти [2, 3].

Далее предполагается, что существует ровно m независимых, линейных по скоростям первых интегралов

$$(1.4)\qquad \mathbf{I}=\mathbf{\Lambda q}^{\cdot},\quad \mathbf{\Lambda}=\|\lambda_{kj}(\mathbf{q})\|$$

Здесь $\mathbf{I}$ — матрица-столбец первых интегралов (для удобства пусть она имеет размерность обобщенных импульсов), причем предполагается, что $\partial\lambda_{kj}/\partial q_l = 0$ $(l = 1, \ldots, m)$.

В дальнейшем понадобятся следующие представления матриц $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Omega}$:

$$(1.5)\qquad \mathbf{\Omega}=\begin{Vmatrix}\mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{\Omega}_2\\ \mathbf{\Omega}_2{}^T & \mathbf{\Omega}_3\end{Vmatrix},\quad \mathbf{\Lambda}=\|\mathbf{\Lambda}_1,\mathbf{\Lambda}_2\|,\quad \mathbf{\Omega}_1=\|\omega_{kl}\|,\quad \mathbf{\Lambda}_1=\|\lambda_{kl}\|$$

Предполагается, что в точках общего положения $\det\Lambda_1 \neq 0$.

Подберем квазикоординаты π_k так, чтобы соответствующие им импульсы были первыми интегралами уравнений движения рассматриваемой системы Чаплыгина. Для этого сделаем замену

$$(1.6)\qquad \mathbf{q}^{\cdot}=\mathrm{S}\boldsymbol{\pi}^{\cdot},\quad \mathrm{S}=\begin{Vmatrix}\mathrm{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E}\end{Vmatrix}$$

Здесь $\mathrm{S}_1(\mathbf{q})$ — некоторая невырожденная $m\times m$-матрица, а $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Из (1.6) видно, что последние $n-m$ квазикоординат совпадают с исходными обобщенными координатами (для удобства меняются лишь обозначения), а вместо первых m координат q_k будут рассматриваться линейные квазикоординаты.

Функция Лагранжа в квазикоординатах будет иметь вид

$$(1.7)\qquad L^*=T^*-\Pi^*,\quad T^*={}^1/_2\boldsymbol{\pi}^{\cdot T}\mathbf{\Psi}\boldsymbol{\pi}^{\cdot},\quad \mathbf{\Psi}=(\mathrm{S}^T\mathbf{\Omega}\mathrm{S})^*$$

а уравнения движения [4]

$$(1.8)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\cdot}}-\frac{\partial L^*}{\partial\boldsymbol{\pi}}=\mathbf{\Gamma}^*(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}^{\cdot})$$

Будем обозначать звездочкой переход от координат $\mathbf{q}$ к квазикоординатам $\boldsymbol{\pi}$ (или, наоборот, от квазикоординат $\boldsymbol{\pi}$ к координатам $\mathbf{q}$). Заметим, что

$$(1.9)\qquad \frac{\partial L^*}{\partial\pi_k}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}s_{ik}\right)^*=0$$

Таким образом, функция $L^*(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}^{\cdot})$ явно не зависит от первых m квазикоординат (а остальные $n-m$ совпадают с исходными координатами), т. е. в (1.7) $\Pi^*=\Pi^*(\pi_{m+1},\ldots,\pi_n)$, $S^*=S^*(\pi_{m+1},\ldots,\pi_n)$.

Пусть теперь $\mathrm{S}_1=\mathbf{\Omega}_1{}^{-1}\mathbf{\Lambda}_1{}^T$. Тогда, если выполняется соотношение

$$(1.10)\qquad \mathbf{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{\Lambda}_2=\mathbf{\Omega}_1^{-1}\mathbf{\Omega}_2$$

то в первых m уравнениях (1.8) $\Gamma_i{}^*=0$. Действительно

$$(1.11)\qquad \left(\frac{\partial L^*}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\cdot}}\right)^*=[(\mathrm{S}^T\mathbf{\Omega}\mathrm{S})^*\boldsymbol{\pi}^{\cdot}]^*=\mathrm{S}^T\mathbf{\Omega}\mathrm{S}(\mathrm{S}^{-1}\mathbf{q}^{\cdot})=\mathrm{S}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{q}^{\cdot}=$$
$$=\begin{Vmatrix}\mathrm{S}_1{}^T\mathbf{\Omega}_1 & \mathrm{S}_1{}^T\mathbf{\Omega}_2\\ \mathbf{E}\mathbf{\Omega}_2{}^T & \mathbf{\Omega}_3\end{Vmatrix}\mathbf{q}^{\cdot}=\begin{Vmatrix}\mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Lambda}_2\\ \mathbf{E}\mathbf{\Omega}_2{}^T & \mathbf{\Omega}_3\end{Vmatrix}\mathbf{q}^{\cdot}$$

Из (1.11) следует, что $\partial L^*/\partial\pi_k{}^{\cdot}=I_k{}^*=\mathrm{const}$. Поэтому $(d/dt)(\partial L^*/\partial\pi_k{}^{\cdot})=0$ и с учетом (1.9) заключаем, что в (1.8) $\Gamma_k{}^*=0$. Следовательно, имеет место следующая

Теорема 1. Если в неголономной системе Чаплыгина с n степенями свободы существует m $(m<n)$ независимых, линейных по скоростям первых интегралов, таких, что ни эти интегралы, ни функция Лагранжа,

составленная с учетом неголономных связей, не зависят от первых m координат, то при выполнении некоторого соотношения (1.10) вместо первых m координат можно так ввести квазикоординаты, что члены неголономности в первых m уравнениях обратятся в нуль.

Замечания. 1°. Условие (1.10) заведомо выполнено, если $\Lambda_2 = 0$, $\Omega_2 = 0$, т. е. когда первые интегралы зависят лишь от первых m скоростей $q_k^{\cdot}$, а в выражении для кинетической энергии отсутствуют члены вида $\omega_{k\nu} q_k q_\nu$ ($\nu = m+1, \ldots, n$). Это условие инвариантно относительно точечного преобразования координат $q_{m+1}, \ldots, q_n$.

2°. Если в матрице S_1 есть интегрируемые строки, то соответствующая квазикоордината просто является обобщенной координатой.

3°. Уравнения движения (1.8) можно записать и в каноническом виде [4]

$$\mathbf{P}^{\cdot} = -\partial H^*/\partial \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\Phi}^*, \quad \boldsymbol{\pi}^{\cdot} = \partial H^*/\partial \mathbf{P} \tag{1.12}$$

где $\mathbf{P} = \partial L^*/\partial \boldsymbol{\pi}^{\cdot}$, а $H^*(\mathbf{P}, \boldsymbol{\pi})$, $\Phi_i^*(\mathbf{P}, \boldsymbol{\pi})$ получаются из функций $L^*(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^{\cdot})$ и $\Gamma_i^*(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^{\cdot})$ в результате замены $\boldsymbol{\pi}^{\cdot}$ на $\mathbf{P}$, причем $\Phi_k^* = 0$.

4°. Среди q_i уже могут быть и квазикоординаты. Важно лишь, чтобы функция Лагранжа (1.1) явно от них не зависела. Если при этом все условия теоремы 1 выполняются, то в рассуждениях ничего не меняется.

5°. Вопрос об использовании квазикоординат в неголономной механике еще недостаточно изучен [2], поэтому введение квазикоординат требует большой осторожности. В общем случае связь между квазикоординатами и исходными (истинными) координатами можно установить лишь для конкретной траектории движения (которая, вообще говоря, неизвестна). В рассматриваемой здесь задаче эту связь удается установить, если $m = n - 1$.

2. Рассмотрим подробнее случай $m = n - 1$. Исследование этого интегрируемого случая приводит к анализу одномерной системы (с одной локальной координатой $\pi_n = q_n$), энергия которой сохраняется. Из теоремы 1 немедленно следует, что в (1.12) только функция Φ_n^* может быть отлична от нуля. Покажем, однако, что и $\Phi_n^* = 0$, т. е. $P_n^{\cdot} = -\partial H^*/\partial \pi_n$.

Функция Гамильтона в квазикоординатах имеет вид

$$H^* = {}^1/_2 \mathbf{P}^T \Psi^{-1}(\pi_n) \mathbf{P} + \Pi(\pi_n) \tag{2.1}$$

Дифференцируя (2.1) по времени, получаем

$$\frac{\partial H^*}{\partial \pi_n} \pi_n^{\cdot} + \frac{\partial H^*}{\partial P_n} P_n^{\cdot} = 0 \tag{2.2}$$

Отсюда

$$\pi_n^{\cdot} \left(P_n^{\cdot} + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_n} \right) = 0 \tag{2.3}$$

Из (2.3) при $\pi_n^{\cdot} \not\equiv 0$ сразу следует требуемое соотношение, если же $\pi_n^{\cdot} \equiv 0$, то $P_n^{\cdot} = -\partial H^*/\partial \pi_n = 0$. Поэтому в уравнениях (1.12) в этом случае $\boldsymbol{\Phi}^* = 0$, т. е. уравнения движения имеют вид обычных уравнений Гамильтона

$$\mathbf{P}^{\cdot} = -\partial H^*/\partial \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi}^{\cdot} = \partial H^*/\partial \mathbf{P} \tag{2.4}$$

Таким образом, исследование рассматриваемой неголономной системы Чаплыгина сводится к исследованию гамильтоновой системы с n степенями свободы и $n - 1$ циклическими координатами. Движение такой системы подробно изучено (см., например, [5]).

Докажем, что существует гладкая обратимая замена переменных $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{P})$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{P})$ и приведение уравнений движения неголономной системы (1.3) к виду (2.4) можно осуществить при помощи этой замены.

Вначале заметим, что из (2.1), используя интеграл энергии, всегда можно выразить $\pi_n^{\cdot}$ через $h, P_1, \ldots, P_{n-1}$ и π_n:

$$\pi^{\cdot}_n = U(h, P_1, \ldots P_{n-1}, \pi_n)$$

Из (1.1), (1.6) и (1.7) следует, что

$$\mathbf{p} = \Omega \mathbf{q}^{\cdot} = (\Omega \mathrm{S})^* \boldsymbol{\pi}^{\cdot} = [\mathrm{S}^T(\pi_n)]^{-1} \mathbf{P} \tag{2.5}$$

Определим теперь, как связаны $\mathbf{q}$ с $\boldsymbol{\pi}$ и $\mathbf{P}$. Введем функцию

$$\mathbf{F}(h, P_1, \ldots, P_{n-1}, \pi_n) = \int \frac{\mathbf{WP}}{U} d\pi_n \tag{2.6}$$

$$\mathbf{W}(\pi_n) = [(\mathbf{E} - \mathrm{S}^{-1}) \Omega^{-1} (\mathrm{S}^T)^{-1}]^*$$

Заметим, что в матрице $\mathbf{W}$ последние строка и столбец нулевые, т. е. $F_n = 0$ и $\mathbf{WP}$ не зависит от P_n.

Искомая замена будет иметь вид

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi} + \mathbf{Q}(\mathbf{P}, \pi_n) \tag{2.7}$$

где функция $\mathbf{Q}$ получается из $\mathbf{F}$ заменой константы полной энергии h на $H^*(\mathbf{P}, \pi_n)$, т. е. $\mathbf{Q}(\mathbf{P}, \pi_n) \equiv \mathbf{F}[H^*(\mathbf{P}, \pi_n), P_1, \ldots, P_{n-1}, \pi_n]$.

Убедимся в этом. Действительно, дифференцируя (2.7) по времени в силу уравнений движения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{\cdot} &= \boldsymbol{\pi}^{\cdot} + \mathbf{Q}^{\cdot}(\mathbf{P}, \pi_n) = \boldsymbol{\pi}^{\cdot} + \mathbf{WP}\pi_n^{\cdot}/U = \boldsymbol{\pi}^{\cdot} + \mathbf{WP} = \boldsymbol{\pi}^{\cdot} + \\ &+ [(\mathbf{E} - \mathrm{S}^{-1}) \Omega^{-1} (\mathrm{S}^T)^{-1} (\mathrm{S}^T \Omega \mathrm{S})]^* \boldsymbol{\pi}^{\cdot} = \boldsymbol{\pi}^{\cdot} + (\mathrm{S}^* - \mathbf{E}) \boldsymbol{\pi}^{\cdot} = \mathrm{S}^* \boldsymbol{\pi}^{\cdot} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.5) — (2.7) следует, что замена $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \boldsymbol{\pi})$ достаточно гладкая и обратимая, ее якобиан (равный $\det \mathrm{S}$) отличен от нуля.

Таким образом, на каждом фиксированном уровне первых интегралов имеется однозначная связь между $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\pi}$, т. е. на каждом уровне первых интегралов квазикоординаты $\boldsymbol{\pi}$ полностью определяют положение системы.

Остановимся на структуре фазового пространства неголономной системы Чаплыгина в этом случае.

Если M_0 — конфигурационное пространство исходной системы, а L_0 — ее функция Лагранжа, т. е. L_0: $TM_0 \to R$ (TM_0 — касательное расслоение M_0), то, так как это система чаплыгинская, существует $M \subset M_0$ (предполагается, что M — многообразие), такое, что движением рассматриваемой системы можно считать отображения $\delta : R \to M$, удовлетворяющие в локальных координатах $\mathbf{q}$ на M либо уравнениям Чаплыгина (1.2) с лагранжианом $L : TM \to R$ (L — функция Лагранжа, составленная с учетом наложенных на систему неинтегрируемых связей), либо уравнениям Чаплыгина (1.3) в каноническом виде с функцией $H : T^*M \to R$ (T^*M — кокасательное расслоение M). Оказывается, в фазовом пространстве T^*M рассматриваемой неголономной системы Чаплыгина (с локальными координатами $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) можно так ввести координаты $\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\pi}$, что уравнения движения в этих координатах будут иметь вид обычных уравнений Гамильтона. Полученная таким образом гамильтонова система обладает n независимыми первыми интегралами в инволюции и вполне интегрируема по Лиувиллю [5].

Если неособое множество уровня первых интегралов компактно и связано, то оно диффеоморфно n-мерному тору T^n, а траектории движения — квазипериодические обмотки этого тора. Как и в любой интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе, далее можно ввести переменные действие — угол. Заметим, что угловые координаты $\mathbf{w}$ на торе и координаты $\mathbf{q}$ будут связаны аналогичным (2.7) образом, т. е. $\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Q}'(h, P_1, \ldots, P_{n-1}, q_n)$.

Если на некотором уровне первых интегралов $\partial U/\partial\pi_n = 0$, то это «особый» уровень, где нарушается независимость первых интегралов. В этом случае рассматриваемая неголономная система может совершать стационарное движение: $q_n = c_n$, $q_k^{\cdot} = c_k$ (c_i — некоторые постоянные величины), которое не может быть асимптотически устойчивым по части переменных [6].

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Пусть в натуральной неголономной системе Чаплыгина с n степенями свободы существует $n - 1$ линейных по скоростям первых интегралов, причем эти интегралы и функция Лагранжа, составленная с учетом неголономных связей, зависит лишь от одной координаты q_n. Кроме того, пусть выполняется условие (1.10). Рассмотрим множество уровня первых интегралов Σ. Если на Σ все n интегралов независимы и Σ компактно и связно, то $\Sigma \simeq T^n$, а траектории движения — квазипериодические обмотки этого тора. Существует гладкая замена «естественных» канонических переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, приводящая уравнения движения рассматриваемой неголономной системы Чаплыгина к обычным уравнениям Гамильтона.

Следствие. Неголономные системы Чаплыгина, удовлетворяющие условию теоремы 2, обладают интегральным инвариантом, плотность которого $\mu = \mu(q_n)$.

Замечание. Если неголономная система Чаплыгина с двумя степенями свободы допускает кроме интеграла энергии еще один первый интеграл и множество неособого уровня первых интегралов Σ компактно и связно, то отсюда сразу следует, что $\Sigma \simeq T^2$ [7] (так как Σ — ориентируемое компактное двумерное многообразие, допускающее векторное поле без особых точек).

3. Рассмотрим задачу о катании строго выпуклого тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести [1]. Конфигурационное пространство системы $M_0 = R^2 \times SO(3)$. В качестве локальных координат на M_0 выберем следующие: ξ, η — координаты проекции центра тяжести G тела на горизонтальную плоскость в неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ (ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх), а ψ, θ, φ — углы Эйлера, характеризующие ориентацию жестко связанной с телом системы координат $Gxyz$ (оси x, y, z направим по главным центральным осям инерции тела, причем ось z направим по оси симметрии) относительно неподвижной. На систему наложено две неинтегрируемые связи: абсолютная скорость точки тела, совпадающей с точкой касания, равна нулю.

В этом примере $M = SO(3)$, а функция Лагранжа L, составленная с учетом неголономных связей, имеет вид (1.1), где

$$\mathbf{q}^T = (\psi, \varphi, \theta), \quad \Pi(\theta) = mgf(\theta), \quad \Omega_2^T = (0, 0), \quad \Omega_3 = A + m(f^2 + \rho^2), \tag{3.1}$$

$$\Omega_1 = \begin{Vmatrix} A\sin^2\theta + C\cos^2\theta + m\rho^2 & C\cos\theta + m\rho\chi \\ C\cos\theta + m\rho\chi & C + m\chi^2 \end{Vmatrix}, \quad \chi = f\sin\theta + \rho\cos\theta$$

Здесь A, A, C — моменты инерции тела относительно осей x, y, z, m — масса тела, g — ускорение свободного падения, $f(\theta)$ — высота центра тяжести над опорной плоскостью, $\rho = df/d\theta$.

Известно [1, 8], что уравнения движения (1.2) в этом случае допускают два линейных по скоростям $\psi^{\cdot}$ и $\varphi^{\cdot}$ интеграла, зависящих явно лишь от θ. Таким образом, в (1.4) $\Lambda_1 = \Lambda_1(\theta)$, а $\Lambda_2 = 0$. Следовательно, все условия теоремы 2 выполнены и траекториями движения в фазовом пространстве $T^*SO(3)$ являются квазипериодические обмотки трехмерного тора.

В случае произвольной функции $f(\theta)$ явный вид этих интегралов (т. е. матрицы Λ_1) не известен, поэтому дальнейшее рассмотрение проведем для случая, когда тело ограничено сферой радиуса $d > 0$. Тогда [1] $f(\theta) = d + r\cos\theta$ ($|r| < d$) и

$$\Lambda_1 = A\begin{Vmatrix} \beta\cos\theta + \sin^2\theta & \beta \\ \alpha\cos\theta & \alpha \end{Vmatrix}, \quad \beta(\theta) = \gamma\left(\frac{r}{d} + \cos\theta\right) \tag{3.2}$$

$$\alpha(\theta) = \left(\frac{C}{md^2} + \sin^2\theta + \frac{\beta^2}{\gamma}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{C}{A}$$

Из (3.2) находим, что $\det \Lambda_1 = A\alpha(\theta)\sin^2\theta$. Так как $\alpha > 0$, то $\det \Lambda_1 = 0$, когда $\sin\theta = 0$. Однако можно проверить, что это связано лишь с особенностью введенной системы координат.

Для матрицы S_1 получаем выражение

$$\text{(3.3)}\qquad S_1 = \begin{Vmatrix} 1 & \beta/(\alpha\gamma) \\ r/d & (C + mdr\beta)/(md^2\alpha\gamma) \end{Vmatrix}, \quad \det S_1 = \frac{A}{\alpha m d^2} > 0$$

Таким образом, задача сводится к исследованию гамильтоновой системы с функцией Гамильтона

$$\text{(3.4)}\qquad H^*(\pi_1, \pi_2, \theta, P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2A}\left[\frac{md^2}{C}\left(\frac{\alpha P_1 - \beta P_2}{\sin\theta}\right)^2 + md^2\left(\frac{P_2^2}{A} - \frac{P_1^2}{C}\right) + \right.$$
$$\left. + \left[1 + \frac{md^2}{A}\left(1 + 2\frac{r}{d}\cos\theta + \frac{r^2}{d^2}\right)\right]^{-1} P_3^2\right] + mgr\cos\theta$$

Дальнейшее исследование можно проводить аналогично случаю, когда тело вращения движется по абсолютно гладкой плоскости.

Отметим, что ось симметрии тела Gz может пройти вертикальное положение, если выполнено соотношение [1] $\alpha(0)P_1 - \beta(0)P_2 = 0$ или $\alpha(\pi)P_1 - \beta(\pi)P_2 = 0$.

Укажем на некоторую аналогию задачи о качении однородного шара и задачи о геодезических на сфере. Пусть в (3.4) $A = C = (1 + \sqrt{5})\, md^2/2$, $r = 0$, $P_1 = 0$ (проекция вектора момента количеств движения на вертикаль равна нулю), тогда гамильтониан (3.4) будет иметь точно такой же вид, как и гамильтониан задачи о движении материальной точки массы $m(3 + \sqrt{5})/2$ по гладкой удерживающей сфере радиуса d.

Если записать уравнения движения рассматриваемой неголономной системы Чаплыгина в виде (1.3), используя естественные канонические переменные $\mathbf{q}^T = (\psi, \varphi, \theta)$, $\mathbf{P}^T = (p_\psi, p_\varphi, p_\theta)$, то они будут допускать последний множитель Якоби $\mu(\theta) = \alpha^{-1}(\theta)$, а дивергенция векторного поля, задаваемого правой частью этих уравнений, будет равна $\varkappa = p_\theta(\cos\theta - \beta)\sin\theta/(\alpha^2\omega_{33})$. Таким образом, и плотность интегрального инварианта μ, и $\varkappa$ периодичны вдоль любой траектории, лежащей на неособом уровне первых интегралов H, I_1, I_2.

4. В качестве второго примера рассмотрим задачу о движении круглого диска с острым краем по гладкому горизонтальному льду [9]. Диск движется без подрезания льда, т. е. скорость точки диска, совпадающей с точкой касания, параллельна его горизонтальному диаметру.

Сохраняя обозначения предыдущего примера, имеем $f(\theta) = d\sin\theta$ (d — радиус диска). Вместо обобщенных координат ξ, η введем квазикоординаты σ_1, σ_2

$$\text{(4.1)}\qquad \sigma_1^{\cdot} = \xi^{\cdot}\cos\psi + \eta^{\cdot}\sin\psi, \quad \sigma_2^{\cdot} = -\xi^{\cdot}\sin\psi + \eta^{\cdot}\cos\psi$$

На систему наложена следующая связь:

$$\text{(4.2)}\qquad \sigma_2 = d\cos\theta$$

Рассматриваемая неголономная система Чаплыгина имеет четыре степени свободы. Здесь $M = R^1 \times SO(3)$, а функция Лагранжа L, составленная с учетом неголономных связей, имеет вид (1.1), где

$$\text{(4.3)}\qquad \mathbf{q}^T = (\psi, \varphi, \sigma_1, \theta), \ \Pi(\theta) = mgd\sin\theta, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = A + md^2$$
$$\Omega_1 = \begin{Vmatrix} A\sin^2\theta + C\cos^2\theta & C\cos\theta & 0 \\ C\cos\theta & C & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix}$$

Известно [9], что в этой задаче существует три линейных по $\psi^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\sigma_1^{\cdot}$ интеграла, т. е. в (1.4) $\Lambda_2 = 0$, а

$$\text{(4.4)}\qquad \lambda_{11} = \lambda_{22} = \omega_{12}, \ \lambda_{12} = \omega_{22}, \ \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0, \ \lambda_{21} = \omega_{11}$$
$$\lambda_{31} = md^2[(1 + \gamma\ln\sin\theta)\cos\theta - (\sin^2\theta + \gamma\cos^2\theta)\ln \operatorname{tg} {}^1\!/_2\theta]$$
$$\lambda_{32} = md^2[1 + \gamma(\ln\sin\theta - \cos\theta\ln\operatorname{tg} {}^1\!/_2\theta)], \quad \lambda_{33} = md$$

В данном случае множество Σ не компактно. Однако все остальные условия теоремы 2 выполнены. Поэтому существует замена переменных, приводящая уравнения движения рассматриваемой системы к виду обычных уравнений Гамильтона, и траектории движения в фазовом пространстве T^*M представляют собой обмотки четырехмерного цилиндра $R^1 \times T^3$ [5].

Автор благодарит А. П. Маркеева за внимание к работе и предоставленную автору возможность выступить на семинаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.— Л.: Гостехиздат, 1949, 112 с.
2. *Сумбатов А. С.* Интегралы, линейные относительно скоростей: Обобщения теоремы Якоби.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1979, с. 3—57.
3. *Сумбатов А. С.* О линейных интегралах уравнений Чаплыгина.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 466—470.
4. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
6. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983, с. 3—128.
7. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика.— В кн.: Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985, с. 316—332.
8. *Миндлин И. М.* Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости.— Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 2, с. 225—230.
9. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 28—33.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1985