Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 62-50

ОБ ОДНОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П.

Рассматривается позиционная дифференциальная игра сближения с целью. Изучается задача построения множества позиционного поглощения (МПП). Приводятся соотношения, на основании которых разработан алгоритм приближенного вычисления МПП для управляемых систем на плоскости.

Пусть задана управляемая система, поведение которой на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$ $(\vartheta > t_0)$ описывается уравнением

$$dx/dt = f(t, x, u, v), \; x(t_0) = x_0; \; u \in P, \; v \in Q \tag{0.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, содержащийся в евклидовом пространстве R^m, u — вектор управляющих воздействий, v — вектор, характеризующий помехи, действующие на систему, P, Q — компакты в евклидовых пространствах R^p, R^q соответственно.

Предполагаем, что система (0.1) удовлетворяет стандартным в теории дифференциальных игр условиям ([1], с. 32).

Рассматривается задача построения МПП, примыкающая к задаче о построении позиционной стратегии, гарантирующей попадание на цель в момент ϑ [1—3]. МПП представляет собой множество всех точек, для которых возможно построение гарантирующей позиционной стратегии. Известно [1—6], что МПП можно определить на основании попятных процедур, используя на каждом шаге процедуры некоторый оператор поглощения. Вопросам сходимости в попятных процедурах посвящены также работы [7—10] [1]. Кроме того, изучены [8, 9] некоторые задачи, связанные с моделированием на ЭВМ МПП для линейных систем.

Ниже исследуются вопросы, связанные с вычислительными аспектами построения МПП. В п. 1 при помощи некоторой совокупности условий выделяется конструкция оператора стабильного поглощения, являющаяся ключевой при определении МПП. Эта конструкция представляет собой достаточно общую схему, удобную в то же время с точки зрения приближенных вычислений на ЭВМ. В п. 2 приводятся условия, при которых некоторая дискретная аппроксимация МПП сходится к нему, когда шаг дискретизации стремится к нулю. В п. 3 выписываются соотношения, на основании которых разработан алгоритм приближенного вычисления дискретной аппроксимации для управляемых систем на плоскости. Область реализации алгоритма ограничивается случаями, когда элементы дискретной аппроксимации — односвязные множества в фазовом пространстве. Приводятся примеры.

1. Введем понятия оператора стабильного поглощения и u-стабильного моста, рассмотрим некоторые варианты u-стабильности и установим их эквивалентность.

Пусть $M \subset R^m$ — целевое множество в задаче сближения в момент ϑ [1—3]. Полагаем, что все рассматриваемые ниже конструкции (стабильных мостов, движений, окрестностей цели M) содержатся в некоторой достаточно большой компактной области $D \subset [t_0, \vartheta] \times R^m$. Пусть $G = \{f \in R^m : \|f\| \leqslant K < \infty\}$ — шар, такой, что $F(t, x) = \mathrm{co}\,\{f = f(t, x, u, v) : u \in P, \; v \in Q\} \subset G$, где $\mathrm{co}\,\{f\}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $\{f\}$, $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

[1] См. также: *Тарасьев А. М., Ушаков В. Н.* О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения — уклонения. Свердловск, 1983.— 60 с. Деп. в ВИНИТИ 5.05.83; № 2454-83.

Пусть задано некоторое множество Ψ элементов ψ, а также семейство отображений $\{F_\psi : D \mapsto 2^{R^m}\}$, отвечающее множеству Ψ и удовлетворяющее следующим условиям.

А1. Для любых $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$ множество $F_\psi (t, x)$ выпукло, замкнуто, удовлетворяет включению $F_\psi (t, x) \subset G$, а также отображение $F_\psi : D \mapsto 2^{R^m}$ полунепрерывно сверху при любом $\psi \in \Psi$.

А2. При любых $(t, x, l) \in D \times S$

$$(1.1) \qquad \min_{\psi\in\Psi} \rho_F (l) = \xi (t, x, l), \quad F = F_\psi (t, x)$$

$$S = \{l \in R^m : \| l \| = 1\}, \quad \rho_F (l) = \max_{f\in F} \langle l, f\rangle$$

$$\xi (t, x, l) = \max_{u\in P} \min_{v\in Q} \langle l, f (t, x, u, v)\rangle$$

($\langle l, f\rangle$ — скалярное произведение векторов l и f).

Полагая $W^* \subset R^m$, введем обозначения $X_\psi (t_*; t^*, W^*) = \{x_* \in R^m : W^* \bigcap X_\psi (t^*; t_*, x_*) \neq \varnothing\}$, $X_\psi (t^*; t_*, x_*)$ — множество в R^m всех точек, в которые в момент t^* приходят решения $x (\cdot) = (x (t)$: $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, $x (t_*) = x_*)$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi (t, x)$

$$Z_\psi (t_*; t^*, W^*) = \bigcup_{x^*\in W^*} Z_\psi (t_*; t^*, x^*), \ Z_\psi (t_*; t^*, x^*)$$

— множество в R^m всех точек, в которые в момент τ_* приходят решения $z (\cdot) = (z (\tau) : \tau^* \leqslant \tau \leqslant \tau_*,\ z (\tau^*) = x^*)$ дифференциального включения $z^\cdot \in \Phi_\psi (\tau, z)$, где $\Phi_\psi (\tau, z) = - F_\psi (t, z)$, $t + \tau = \vartheta$, $t_* + \tau_* = \vartheta$, $t^* + \tau^* = \vartheta$.

Приведем определение оператора стабильного поглощения.

Определение 1. Оператором стабильного поглощения $\pi (t_*; t^*, W^*)$ ($t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $W^* \subset R^m$) назовем отображение $\pi (t_*; t^*, \cdot) : 2^{R^m} \mapsto 2^{R^m}$, заданное соотношением

$$(1.2) \qquad \pi (t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{\psi\in\Psi} X_\psi (t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{\psi\in\Psi} Z_\psi (t_*; t^*, W^*)$$

Пусть $M \subset R^m$, $W \subset D$ — замкнутые множества.

Определение 2. Множество W назовем u-стабильным мостом в задаче сближения с M в фиксированный момент ϑ, если

$$(1.3) \qquad W (\vartheta) \subset M, \ W (t_*) \subset \pi (t_*; t^*, W (t^*)), \quad \forall t_*, t^* \ (t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta) \ (W (t) = \{x \in R^m : (t, x) \in W\})$$

Допустим, что $\{F_\psi : D \mapsto 2^{R^m}\}$, $\{F_{\psi^*} : D \mapsto 2^{R^m}\}$ — семейства отображений, отвечающие множествам Ψ и Ψ^* и удовлетворяющие условиям А1, А2. Каждое из этих семейств индуцирует свой оператор $\pi (t_*; t^*, W^*)$ стабильного поглощения. Можно установить, что множество W, u-стабильное в смысле одного оператора, будет u-стабильным и в смысле другого оператора, т. е. понятие u-стабильности инвариантно по отношению к семействам отображений, удовлетворяющим условиям А1, А2. В этом смысле определение 2 корректно.

Полагаем

$$G_l (t, x) = G \bigcap \{f \in R^m : \langle l, f\rangle \leqslant \xi (t, x, l)\} \ (l \in S)$$

$F_{v(\cdot)} (t, x) = \mathrm{co}\, \{f (t, x, u, v (u)) : u \in P\} (v (\cdot) \in V$, V — совокупность всех отображений $v (\cdot) : P \mapsto Q)$.

Семейства отображений $\{G_l : D \mapsto 2^{R^m}\}$, $\{F_{v(\cdot)} : D \mapsto 2^{R^m}\}$, отвечающие множествам S, V соответственно, удовлетворяют условиям А1, А2 и, следовательно, известные определения u-стабильности [1, 2, 7, 11] укладываются в схему определений 1, 2. Отсюда вытекает, что определение 2 эквивалентно определениям из работ [1, 2, 7, 11].

Рассмотрим систему (0.1) с правой частью вида

$$(1.4) \qquad f(t, x, u, v) = f^{(1)} + f^{(2)},\ f^{(1)} = f^{(1)}(t, x, u),\ f^{(2)} = f^{(2)}(t, x, v)$$

удовлетворяющей условиям из работы [1], где обозначим

$$F^{(1)}(t, x) = \mathrm{co}\,\{f^{(1)} : u \in P\},\ F^{(2)}(t, x) = \mathrm{co}\,\{f^{(2)} : v \in Q\}$$

Предполагаем, что $F^{(2)}(t, x)$ — выпуклый многогранник, представимый в виде $F^{(2)}(t, x) = \mathrm{co}\,\{f^{(\omega)}(t, x) : \omega = 1, \ldots, n\}$, где $f^{(\omega)}$ $(\omega = 1, \ldots n)$ — непрерывные функции t, x.

Обозначим $F_\omega(t, x) = F^{(1)}(t, x) + f^{(\omega)}(t, x)$ $(\omega = 1, \ldots, n)$.

Семейство отображений $\{F_\omega : D \mapsto 2^{R^m}\}$, отвечающее множеству $\Omega = \{\omega = 1, \ldots, n\}$, удовлетворяет условиям А1, А2. Значит, для системы (0.1) с правой частью (1.4) можно дать определение u-стабильности в терминах семейства отображений $\{F_\omega : D \mapsto 2^{R^m}\}$, т. е. оператор стабильного поглощения для системы (0.1) с правой частью (1.4) представим в виде

$$(1.5) \qquad \pi(t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{\omega=1}^{n} X_\omega(t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{\omega=1}^{n} Z_\omega(t_*; t^*, W^*)$$

$$t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta, \quad W^* \subset R^m$$

2. Рассмотрим дискретные (по времени) аналоги схемы u-стабильности, приведенной в п. 1. Предполагаем, что семейство отображений $\{F_\psi : D \mapsto 2^{R^m}\}$, отвечающее множеству Ψ, дополнительно к условиям А1, А2 удовлетворяет следующим условиям.

А3. Существует функция $\omega^*(\delta)$ $(\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0)$, такая, что для любых (t_*, x_*), (t^*, x^*) из D и $\psi \in \Psi$

$$(2.1) \qquad d(F_\psi(t^*, x^*),\ F_\psi(t_*, x_*)) \leqslant \omega^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|)$$

А4. Существует число $\lambda \in [0, \infty)$, такое, что для любых (t, x_*), (t, x^*) из D и $\psi \in \Psi$

$$(2.2) \qquad d(F_\psi(t, x^*),\ F_\psi(t, x_*)) \leqslant \lambda \|x^* - x_*\|$$

$(d(F^*, F_*)$ — хаусдорфово расстояние между F^* и $F_*)$.

Приведем определение аппроксимирующей системы множеств (АСМ), нацеленное на приближенное вычисление максимального u-стабильного моста. Понятие АСМ возникает при замене непрерывной схемы u-стабильности дискретной схемой, а именно, при введении разбиения $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и замене областей достижимости $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$, фигурирующих в определении 2, их линейными приближениями $X_\psi{}^a(t^*; t_*, x_*)$ $(t_* = t_i,\ t^* = t_{i+1})$.

Определение 3. Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения $\pi^a(t_*; t^*, W^*)$ $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta,\ W^* \subset R^m)$ назовем отображение $\pi^a(t_*; t^*, W^*) : 2^{R^m} \mapsto 2^{R^m}$, заданное соотношением

$$(2.3) \qquad \pi^a(t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi{}^a(t_*; t^*, W^*)$$

$$X_\psi{}^a(t_*; t^*, W^*) = \{x_* \in R^m : W^* \cap X_\psi{}^a(t^*; t_*, x_*) \neq \varnothing\}$$

$$X_\psi{}^a(t^*; t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*) F_\psi(t_*, x_*)$$

Определение 4. АСМ $\{W^a(t_i) : t_i \in \Gamma\}$ назовем систему, для которой

$$W^a(t_N) = M_{\varepsilon_N}, \quad W^a(t_i) = \pi^a(t_i; t_{i+1}, W^a(t_{i+1}))$$

для $i = N - 1, N - 2, \ldots, 0$; здесь число ε_N находится из рекуррентных соотношений $\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}$, $\varepsilon_0 = 0$; $i = 1, 2, \ldots, N$; $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $t_i \in \Gamma$, $\omega(\Delta) = \Delta\omega^*((1 + K)\Delta)$.

Символ Φ_ε означает замкнутую ε-окрестность множества Φ.

Пусть $\{\Gamma_n\}$ — последовательность разбиений $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N(n)}\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$, диаметр $\Delta^{(n)} = \max\limits_i (t_{i+1} - t_i)$ которых стремится к нулю при $n \to \infty$. Имеется в виду, что для каждого Γ_n моменты $t_0, t_1, \ldots, t_{N(n)}$ свои.

АСМ, отвечающую разбиению Γ_n, обозначим $\{W^{a,n}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$.

Определение 5. Множество W° — множество всех точек $(t_*, x_*) \in D$, для которых существует последовательность

$$\{(t_n, x_n) : t_n = t_n(t_*) \in [t_0, \vartheta], x_n \in W^{a,n}(t_n), \lim_{n\to\infty} x_n = x_*\}$$

($t_n(t_*)$ — момент разбиения Γ_n, ближайший справа к моменту t_*).

Теорема 1. Пусть $\{F_\psi : D \mapsto 2^{R^m}\}$ — семейство отображений, удовлетворяющее условиям A1 — A4. Тогда W° — максимальный u-стабильный мост.

Теорема 1 указывает конструктивный путь к приближенному построению множества W° на основе попятных процедур, формализованных в определении 4.

В определении 4 исходили как бы из первой части

$$\pi(t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{\psi\in\Psi} X_\psi(t_*; t^*, W^*)$$

равенства (1.2). Теперь примем во внимание вторую часть этого равенства (1.2) и сконструируем новую попятную процедуру.

Обозначим

$$Z_\psi{}^b(t_*; t^*, x^*) = x^* - (t^* - t_*) F_\psi(t^*, x^*)$$

$$Z_\psi{}^b(t_*; t^*, \Phi^*) = \bigcup_{x^*\in\Phi^*} Z_\psi{}^b(t_*; t^*; x^*), \quad \Phi^* \subset R^m$$

Предполагаем, что семейство отображений $\{F_\psi : D \mapsto 2^{R^m}\}$ удовлетворяет также и условию

A5. Найдутся числа K^*, r^*, δ^* из $(0, \infty)$, такие, что для любых $(t^*, x^*) \in D$, $t_* \in [t_0, t^*]$, $\psi \in \Psi$, $r \in (0, (t^* - t_*) r^*)$, $t^* - t_* \leqslant \delta^*$

$$(Z_\psi{}^b(t_*; t^*, x^*))_r \subset Z_\psi{}^b(t_*; t^*, U_{K^*r}(x^*))$$

$$(U_{K^*r}(x^*) = \{x \in R^m : \| x - x^* \| \leqslant K^*r\})$$

Отметим, что условие A5 не является слишком ограничительным. Ему удовлетворяет, например, семейство отображений $\{F_{v(\cdot)} : D \mapsto 2^{R^m}\}$.

Определение 6. Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения $\pi^b(t_*; t^*, W^*)$ $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta, W^* \subset R^m)$ назовем отображение $\pi^b(t_*; t^*, \cdot) : 2^{R^m} \mapsto 2^{R^m}$, заданное соотношением

$$\pi^b(t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{\psi\in\Psi} Z_\psi{}^b(t_*; t^*, W^*) \tag{2.4}$$

Определение 7. АСМ $\{W^b(t_i) : t_i \in \Gamma\}$ назовем систему, для которой

$$W^b(t_N) = M_{\zeta_N}, \quad W^b(t_i) = \pi^b(t_i; t_{i+1}, W^b(t_{i+1})), \quad i = N - 1, \ldots, 0$$

где ζ_N находится из рекуррентных соотношений

$$\zeta_i = (1 + K^*)\omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda\Delta_{i-1})\zeta_{i-1}, \quad \zeta_0 = 0, \ i = 1, 2, \ldots, N$$

Теорема 2. Пусть $\{F_\psi : D \mapsto 2^{R^m}\}$ — семейство отображений, удовлетворяющее условиям A1 — A5. Тогда W° — множество всех точек

$(t_*, x_*) \in D$, представимых в виде $(t_*, x_*) = \lim (t_n, x_n)$ при $n \to \infty$, где $t_n = t_n(t_*)$ — момент разбиения Γ_n, ближайший справа к t_*, $x_n \in W^b(t_n)$.

3. Рассмотрим задачу приближенного построения множества W° для системы (0.1) с правой частью (1.4). Принимая во внимание теоремы 1, 2, эту задачу будем решать как задачу приближенного построения системы $\{W^a(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, или системы $\{W^b(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$.

В дополнение к условиям, наложенным на правую часть системы (0.1), предполагаем, что справедливо представление $F^{(1)}(t, x) = \mathrm{co}\,\{f_{(\gamma)}(t, x) : \gamma = 1, \ldots, k\}$, функции $f_{(\gamma)}(t, x)$, $f^{(\omega)}(t, x)$ ($\gamma = 1, \ldots, k$; $\omega = 1, \ldots, n$) удовлетворяют неравенствам $\| f_{(\gamma)}(t, x) \| \leqslant \varkappa(1 + \| x \|)$, $\| f^{(\omega)}(t, x) \| \leqslant \varkappa(1 + \| x \|)$, $\varkappa > 0$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times R^m$, а также условию Липшица в $D^* = \{(t, x) : t \in [t_0, \vartheta],\ \| x \| \leqslant d_0 \exp 2\varkappa(\vartheta - t_0)\}$.

Здесь $d_0 = \max\{2, d(M_\varepsilon, \{0\})\}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ — некоторое фиксированное число.

Пусть разбиение Γ имеет диаметр $\Delta(\Gamma)$, удовлетворяющий неравенствам $L(D^*)\Delta(\Gamma) \leqslant 1/2$, $1 - 2\varkappa\Delta(\Gamma) \geqslant 1/2$. Предполагаем также, что при каждом $(t, x) \in D^*$ множество $\{f_{(\gamma)}(t, x) : \gamma = 1, \ldots, k\}$ есть $K^\circ\Delta(\Gamma)$-сеть на множестве $\partial F^{(1)}(t, x)$, где $K^\circ \in (0, \infty)$ не зависит от выбора (t, x).

Введем обозначения

$$W^a(t_N) = M_\varepsilon, \quad X^a_{\omega,\gamma}(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) = x(t_i) +$$
$$+ \Delta_i(f^{(\omega)}(t_i, x(t_i)) + f_{(\gamma)}(t_i, x(t_i))),\ X^a_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1} W^a(t_{i+1})) =$$
$$= \{x(t_i) \in R^m : X^a_{\omega,\gamma}(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \cap W^a(t_{i+1}) \neq \varnothing\}$$

Тогда имеет место приближенное равенство

$$(3.1)\qquad X_\omega{}^a(t_i; t_{i+1}, W^a(t_{i+1})) \approx \bigcup_{\gamma=1}^{k} X^a_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^a(t_{i+1}))$$

понимаемое в том смысле, что

$$d(X_\omega{}^a(t_i; t_{i+1}, W^a(t_{i+1}))$$
$$\bigcup_{\gamma=1}^{k} X^a_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^a(t_{i+1}))) \leqslant 2K^\circ\Delta_i\Delta(\Gamma)$$

Отсюда следует приближенное равенство

$$(3.2)\qquad W^a(t_i) \approx \bigcap_{\omega=1}^{n} \bigcup_{\gamma=1}^{k} X^a_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^a(t_{i+1}))$$

Принимая его во внимание, задачу построения системы множеств $\{W^a(t_i) : t_i \in \Gamma\}$ заменим задачей построения системы $\{W^{da}(t_i) : t_i \in \Gamma\}$, где множества $W^{da}(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ заданы рекуррентно:

$$W^{da}(t_N) = M_\varepsilon, \quad W^{da}(t_i) = \bigcap_{\omega=1}^{n} \bigcup_{\gamma=1}^{k} X^a_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^{da}(t_{i+1})), \quad i =$$
$$= N-1, N-2, \ldots, 0; \quad X^a_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^{da}(t_{i+1})) =$$
$$= \{x(t_i) \in R^m : W^{da}(t_{i+1}) \cap X^a_{\omega,\gamma}(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \neq \varnothing\}$$

Множество $X^a_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^{da}(t_{i+1}))$ представимо в виде

$$\bigcup_{x(t_{i+1}) \in W^{da}(t_{i+1})} x_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, x(t_{i+1}))$$

где $x(t_i) = x_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, x(t_{i+1}))$ — решение уравнения

$$(3.3)\qquad x + \Delta_i(f^{(\omega)}(t_i, x) + f_{(\gamma)}(t_i, x)) = x(t_{i+1})$$

Отметим, что с учетом условий, наложенных на правую часть (1.4) системы (0.1), и в силу выбора области D^* решение $x = x(t_i)$ уравнения (3.3) при $(t_{i+1}, x(t_{i+1})) \in W^{d_1}(t_{i+1}) \subset D^*$ единственно и может быть найдено как предел $x(t_i) = \lim x^{(\rho)}(t_i)$, $x^{(\rho)}(t_i) = x^{(\rho)}_{\omega,\gamma}(t_i;\ t_{i+1},\ x(t_{i+1}))$ при $\rho \to \infty$, где

$$x^{(0)}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, x(t_{i+1})) = x(t_{i+1})$$

$$x^{(\rho)}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, x(t_{i+1})) = x(t_{i+1}) - \Delta_i (f^{(\omega)}(t_i, x^{(\rho-1)}(t_i)) + f_{(\gamma)}(t_i, x^{(\rho-1)}(t_i))), \quad \rho = 1, 2, \ldots$$

При этом выполняются включения $(t_i, x(t_i)) \in D^*$, $(t_i, x^{(\rho)}(t_i)) \in D^*$ при $\rho = 1, 2, \ldots$.

Положим

$$W^{da,\rho}(t_N) = M_\varepsilon, \quad W^{da,\rho}(t_i) = \bigcap_{\omega=1}^{n} \bigcup_{\gamma=1}^{k} X^{a,\rho}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^{da,\rho}(t_{i+1}))$$

$$(i = N-1, \ldots, 0)$$

$$X^{a,\rho}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, W^{da,\rho}(t_{i+1})) = \bigcup_{x(t_{i+1}) \in W^{da,\rho}(t_{i+1})} x^{(\rho)}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, x(t_{i+1}))$$

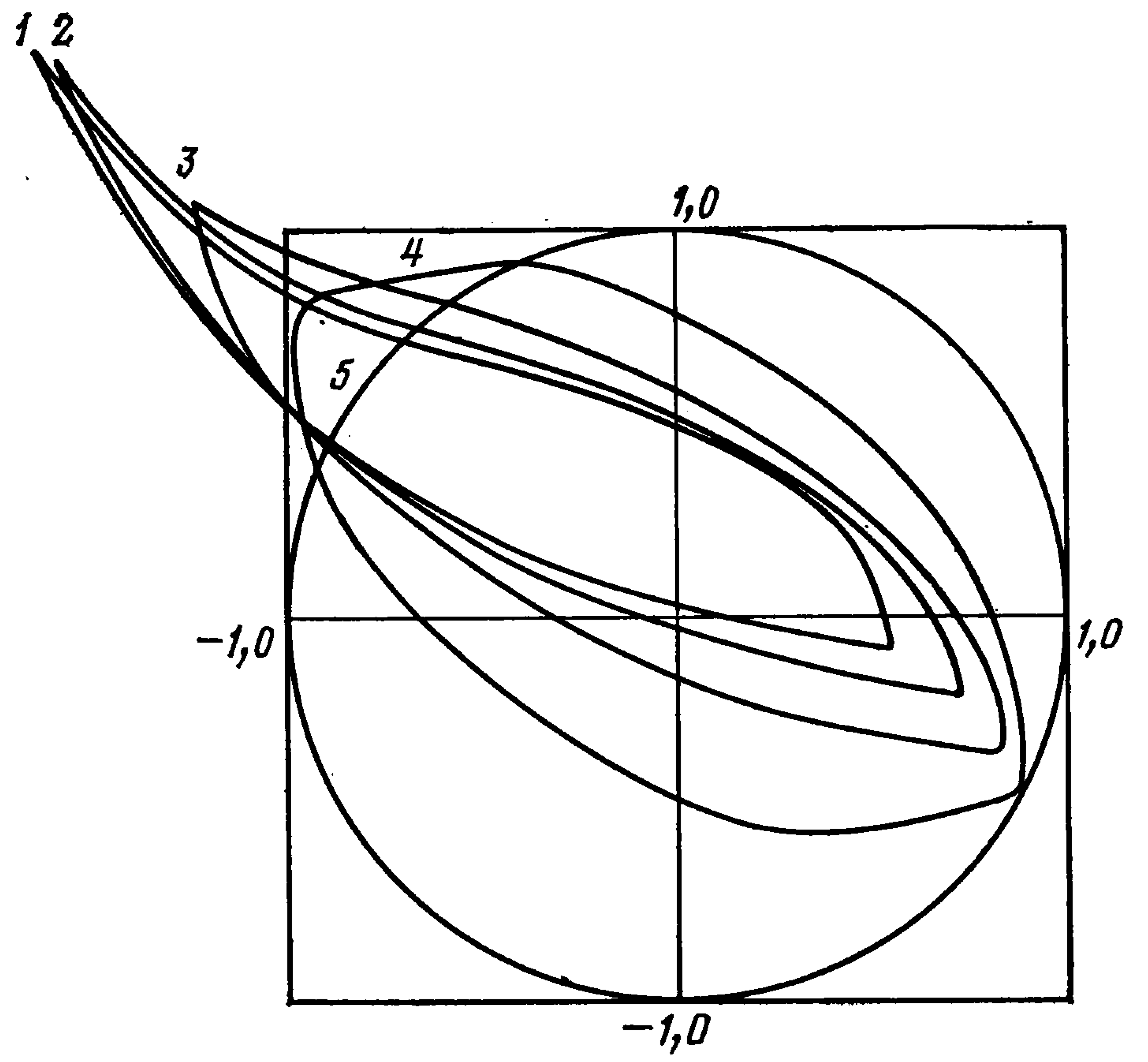
Система $\{W^{da,\rho}(t_i) : t_i \in \Gamma\}$ представляет собой некоторое приближение системы $\{W^a(t_i) : t_i \in \Gamma\}$, полученное на пути вычисления системы $\{W^{d_1}(t_i) : t_i \in \Gamma\}$ как результат оперирования лишь с ρ-ми приближениями уравнения (3.3). При этом $(t_i, W^{da,\rho}(t_i)) \subset D^*$ при любых $i = 0, 1, \ldots, N$.

Конструкцию, аналогичную приведенным выше, можно построить для приближенного вычисления системы $\{\bar{W}^b(t_i) : t_i \in \Gamma\}$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорию. Пусть управляемая система описывается на промежутке времени [0, 2] уравнениями

$$x_1^{\cdot} = x_2 + v, \quad x_2^{\cdot} = -x_2 \cos(\pi + x_1^2) + x_1^3 + x_1^2 x_2 + u$$

где скалярные управления u и v стеснены ограничениями $u \in [-0{,}5;\ 0{,}5]$, $v \in [-1,\ 0]$. Цель M в задаче сближения — круг единичного радиуса на плоскости.



В этом примере вычислялась система множеств $\{W^{da,2}(t_i)\colon t_i \in \Gamma\}$, отвечающая разбиению $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$, где $t_0 = 0$, $t_N = \vartheta = 2$, $t_{i+1} = t_i + \Delta$, $\Delta = 0{,}05$. На фигуре приведены множества $W^{da,2}(t_i)$, отвечающие моментам 0,0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0. Каждое из пяти множеств представляет собой компакт, ограниченный кривой, отмеченной на фигуре соответствующими номерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Красовский Н. Н.* К задаче унификации дифференциальных игр.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6, с. 1260—1263.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Аппроксимация в дифференциальной игре.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 197—204.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. I.— Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6, с. 1278—1280.
5. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. II.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
6. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр.— Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2, с. 285—287.
7. *Ушаков В. Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения — уклонения.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 4, с. 29—36.
8. *Боткин Н. Д., Пацко В. С.* Позиционное управление в линейной дифференциальной игре.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 4, с. 78—85.
9. *Остапенко В. В.* Приближенное решение задач сближения — уклонения в дифференциальных играх.— Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 1, с. 30—34.
10. *Пономарев А. П.* Улучшенная оценка сходимости альтернированных сумм к альтернированному интегралу Понтрягина.— Мат. заметки, 1984, т. 35, № 1, с. 83—91.
11. *Алексейчик М. И.* Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры.— В кн.: Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д Изд-во Рост. ун-та, 1975, т. 7, с. 191—199.

Свердловск

Поступила в редакцию
30.X.1985