Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 62-50

РЕШЕНИЯ ПО НЭШУ, ПАРЕТО И ШТАКЕЛЬБЕРГУ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Клейменов А. Ф.

Используемая в работе формализация неантагонистических дифференциальных игр основана на формализации и результатах теории позиционных антагонистических дифференциальных игр [1, 2].

Указанным в заголовке типам решений в неантагонистических дифференциальных играх посвящена обширная литература (часть ее отмечена, например, в обзоре [3]). Решение по Нэшу является наиболее распространенным в бескоалиционных играх; оптимальность по Парето служит одним из основных понятий в кооперативных играх без побочных платежей; наконец, решение по Штакельбергу [4, 5] характерно для иерархических игр. Ниже все эти три типа решений рассматриваются в рамках единого подхода. При этом используется понятие решения по Парето, отличное от классического учетом индивидуальных возможностей игроков. Для игры двух лиц выявлена структура стратегий, единая для всех рассматриваемых решений. Установлены соотношения между множествами решений различных типов. Показано, что множество решений каждого типа характеризуется решениями соответствующих нестандартных задач управления (оптимального управления). Результаты иллюстрируются на примере плоского движения материальной точки, находящейся под суммарным действием управляющих сил, формируемых различными игроками.

Статья примыкает к работам [6—8] и продолжает исследования [9, 10] [1].

1. Пусть динамика управляемой системы описывается уравнением вида

$$x^{\boldsymbol{\cdot}} = f(t, x, u, v), \; u \in P, \; v \in Q, \; x[t_0] = x_0 \tag{1.1}$$

где функция $f: G \times P \times Q \mapsto R^n$ непрерывна по совокупности аргументов, удовлетворяет условию Липшица по x, а также условию, обеспечивающему продолжимость решений (1.1) на заданный отрезок $[t_0, \vartheta]$. Здесь G — компакт в пространстве переменных t, x; P и Q — компакты в соответствующих конечномерных пространствах.

Целью первого и второго игроков, распоряжающихся выбором управлений u и v соответственно, является минимизация своих показателей, которые имеют вид

$$I_i = \sigma_i(x[\vartheta]), \quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

где функции $\sigma_i: R^n \mapsto R$ непрерывны. Оба игрока располагают полной информацией о текущей позиции игры $(t, x[t])$ и, следовательно, при формировании своих управлений могут использовать позиционные стратегии [1, 2]. Для простоты здесь предполагается, что обоим игрокам достаточно ограничиться классом чистых позиционных стратегий в том смысле, что расширение этого класса (например, до смешанных или контрстратегий) для какого-либо игрока не приводит к улучшению показателя этого игрока. Более общий случай, когда такое расширение целесообразно, рассматривается аналогично (см., например, работу, приведенную в сноске [1]).

[1] См. также: *Клейменов А. Ф.* К теории иерархических дифференциальных игр двух лиц.— Препринт Ин-та математики и механики. УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985.—67 с.

Используемая ниже формализация позиционных стратегий и порождаемых ими движений в неантагонистической дифференциальной игре основана на формализации и результатах теории позиционных антагонистических дифференциальных игр [1, 2].

Чистая позиционная стратегия (или просто стратегия) первого игрока отождествляется с парой $U = \{u(t, x, \varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon)\}$, где $u(\cdot, \cdot, \cdot)$ — произвольная функция позиции $(t, x) \in G$ и $\varepsilon > 0$ со значениями в P. Функция β_1: $(0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ непрерывна, монотонна и удовлетворяет условию $\beta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Введение параметра точности ε в качестве аргумента стратегии оправдало себя в теории антагонистических дифференциальных игр [2]. Оно позволило обеспечить свойство оптимальных стратегий быть универсальными по отношению к начальной позиции. Этот факт существенно используется ниже. Устанавливается также, что введение параметра ε играет совершенно новую роль при выявлении структуры решений в неантагонистических играх. Добавление функции $\beta_1(\cdot)$ вызвано спецификой неантагонистических игр. При фиксированном ε величина $\beta_1(\varepsilon)$ — ограничение на шаг дискретной схемы, которую первый игрок использует при построении ломаных Эйлера.

Закон управления $Z(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$, отвечающий стратегии U, определяется тремя компонентами: функцией $u(\cdot, \cdot, \cdot)$, входящей в стратегию U, значением параметра ε_1 и разбиением $\Delta_1\{t_i^{(1)}\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$, $i = 1, \ldots, k_1 + 1$, $t_1^{(1)} = t_0$, $t_{i+1}^{(1)} > t_i^{(1)}$, $t_{k_1+1}^{(1)} = \vartheta$. При этом должно выполняться условие на шаг разбиения

$$\delta(\Delta_1) = \max_i (t_{i+1}^{(1)} - t_i^{(1)}) \leqslant \beta_1(\varepsilon_1)$$

Аналогично определяется стратегия второго игрока $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$ и отвечающий ей закон управления $Z(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$, где $\delta(\Delta_2) \leqslant \beta_2(\varepsilon_2)$.

Пусть выбраны стратегии U и V. Пусть $Z(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$ и $Z(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$ — законы управления, соответствующие выбранным игроками значениям параметра точности ε_1 и ε_2 и разбиениям $\Delta_1\{t_i^{(1)}\}$ и $\Delta_2\{t_j^{(2)}\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$. Ломаной Эйлера, порожденной законами управления $Z(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$ и $Z(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$ из начальной позиции (t_0, x_0), назовем кусочно-дифференцируемую функцию

$$x_\Delta^\varepsilon[t] = x[t, t_0, x_0, \quad Z(U, \varepsilon_1, \Delta_1), Z(V, \varepsilon_2, \Delta_2)] \tag{1.3}$$

являющуюся пошаговым решением дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} \dot{x}_\Delta^{\varepsilon}[t] = f(t, x_\Delta^\varepsilon[t], u_{\Delta_1}^{\varepsilon_1}[t], v_{\Delta_2}^{\varepsilon_2}[t]), \quad x_\Delta^\varepsilon[t_0] = x_0 \\ u_{\Delta_1}^{\varepsilon_1}[t] = u(t_i^{(1)}, x_\Delta^\varepsilon[t_i^{(1)}], \varepsilon_1), \quad t_i^{(1)} \leqslant t < t_{i+1}^{(1)} \\ v_{\Delta_2}^{\varepsilon_2}[t] = v(t_j^{(2)}, x_\Delta^\varepsilon[t_j^{(2)}], \varepsilon_2), \quad t_j^{(2)} \leqslant t < t_{j+1}^{(2)} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Движением, порожденным стратегиями U и V из начальной позиции (t_0, x_0), назовем непрерывную функцию $x[t] = x[t, t_0, x_0, U, V]$, являющуюся равномерным на $[t_0, \vartheta]$ пределом последовательности ломаных Эйлера $\{x[t, t_0^k, x_0^k, Z(U, \varepsilon_1^k, \Delta_1^k), Z(V, \varepsilon_2^k, \Delta_2^k)\}$ при $k \to \infty$, $\varepsilon_i^k \to 0$, $t_0^k \to t_0$, $x_0^k \to x_0$, $\delta(\Delta_i^k) \leqslant \beta_i(\varepsilon_i^k)$. По крайней мере одно движение $x[t]$ существует. В то время как пара законов управления $Z(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$ и $Z(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$ определяет единственную ломаную Эйлера, пара стратегий U и V порождает, вообще говоря, множество (пучок) движений, обозначаемое далее через $X(t_0, x_0, U, V)$. Оно будет компактом в $C[t_0, \vartheta]$.

Изложенную формализацию можно интерпретировать следующим образом. По сути дела строятся две взаимосвязанные модели игры —

дескриптивная и конструктивная. И та и другая модели складываются из уравнений динамики, формализации действий игроков и движений, порождаемых этими действиями. Динамика в обеих моделях описывается уравнением (1.1). Действия игроков в дескриптивной модели формализуется в виде стратегий U и V, а порождаемые ими движения — в виде пучка $X(t_0, x_0, U, V)$. При теоретических рассуждениях удобнее работать с дескриптивной моделью, в то время как для целей счета целесообразно использовать конструктивную модель. При этом для построения ломаных Эйлера не требуется, вообще говоря, проводить расчет движений в дескриптивной модели.

Понятие решения в неантагонистической дифференциальной игре может определяться по-разному. В работе исследуются три типа решений: по Нэшу, Парето и Штакельбергу, хорошо известные в литературе (см., например, обзор [3]). Здесь, однако, соответствующие определения будут приведены, во-первых, чтобы уточнить детали, связанные с неединственностью движений в дескриптивной модели, а во-вторых, потому что предлагаемое решение по Парето отличается от классического.

Определение 1. Пара стратегий (U^N, V^N) образует равновесное по Нэшу решение (N-решение) в рассматриваемой дифференциальной игре, если при любых стратегиях U и V имеют место неравенства

$$\begin{aligned} &\min \sigma_1 (x[\vartheta, t_0, x_0, U, V^N]) \geqslant \max \sigma_1 (x[\vartheta, t_0, x_0, U^N, V^N]) \\ &\min \sigma_2 (x[\vartheta, t_0, x_0, U^N, V]) \geqslant \max \sigma_2 (x[\vartheta, t_0, x_0, U^N, V^N]) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь операции min и max берутся по всем движениям соответствующих пучков. Очевидно, на всем пучке движений, порожденном N-решением, значение показателя каждого игрока будет одним и тем же. Множество N-решений обозначим $\mathbf{N}$.

Определение 2. N-решение (U^P, V^P) образует модифицированное решение по Парето (P^*-решение), если для любого $(U, V) \in \mathbf{N}$ имеет место одна из следующих альтернатив:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \sigma_i (x[\vartheta, t_0, x_0, U, V]) = \sigma_i (x[\vartheta, t_0, x_0, U^P, V^P]), \ i = 1, 2 \\ &\text{б) } \exists j \in \overline{1, 2}: \sigma_j (x[\vartheta, t_0, x_0, U, V]) > \sigma_j (x[\vartheta, t_0, x_0, U^P, V^P]) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Отличие предлагаемого понятия P^*-решения от классического понятия решения по Парето, введенного для многокритериальных задач, состоит в том, что P^*-решение ищется на множестве N-решений. Это объясняется тем, что в дифференциальной игре, в отличие от многокритериальной задачи, ресурсы управления распределены между участниками, и поэтому необходимо считаться с индивидуальными возможностями каждого из них. Обозначим $\mathbf{P}^*$ множество P^*-решений. По определению, $\mathbf{P}^* \subset \mathbf{N}$. Множество классических решений по Парето (P-решений) обозначим $\mathbf{P}$.

Определению решения по Штакельбергу предпошлем следующие предположения [4, 5], регламентирующие последовательность выбора игроками стратегий.

1°. Первый игрок, называемый лидером, объявляет свою стратегию $U^* = \{u^*(t, x, \varepsilon), \beta_1^*(\varepsilon)\}$ второму игроку до начала игры.

2°. Второй игрок, зная стратегию первого игрока U^*, выбирает рациональную стратегию V^* из условия

$$\max \sigma_2 (x[\vartheta, t_0, x_0, U^*, V]) \to \min_V \tag{1.7}$$

где операция max берется по пучку $X(t_0, x_0, U^*, V)$.

При выполнении предложений 1°, 2° дифференциальная игра называется иерархической или игрой Штакельберга с лидером — первым игроком. Множество рациональных стратегий второго игрока обозначим $K_2(U^*)$.

Задача первого игрока состоит в нахождении стратегии U, доставляющей минимум показателю $\sigma_1(x[\vartheta])$ (1.2) при условии выбора вторым игроком рациональных стратегий. (Более детальная постановка задачи, включающая учет различных случаев выбора вторым игроком стратегии из множества $K_2(U)$, изложена в [10].) Пусть стратегия U^{S1} — решение этой задачи. Тогда пара (U^{S1}, V^{S1}), где $V^{S1} \in K_2(U^{S1})$, называется решением по Штакельбергу (S_1-решением) в иерархической игре с лидером — первым игроком. Множество S_1-решений обозначим S_1.

Аналогично формализуется иерархическая дифференциальная игра с лидером — вторым игроком. Множество S_2-решений в этой игре обозначим S_2. Траектории $x[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, порожденные N-, P^*-, S_1- и S_2-решениями, будем называть соответственно N-, P^*-, S_1- и S_2-траекториями.

При сделанных выше предположениях множества $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}^*$, S_1, S_2 непусты. Из [10] и работы, приведенной в сноске [1], следует

Теорема 1. $\mathrm{S}_i \cap \mathbf{P}^* \neq \varnothing$, $\mathrm{S}_i \subset \mathbf{N}$, $i = 1, 2$.

Заметим, что в формулировке теоремы 1 множество $\mathbf{P}^*$, вообще говоря, не может быть заменено на множество $\mathbf{P}$.

Покажем теперь, как можно найти каждое из множеств $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}^*$, S_1, S_2, решив соответствующую нестандартную задачу управления. Чтобы сформулировать эти задачи, рассмотрим вспомогательные антагонистические дифференциальные игры Γ_1 и Γ_2. В обеих играх динамика описывается уравнением (1.1). В игре Γ_1 первый игрок минимизирует показатель $\sigma_1(x[\vartheta])$ (1.2), а второй игрок ему противодействует. В игре Γ_2 второй игрок минимизирует показатель $\sigma_2(x[\vartheta])$ (1.2), а первый игрок ему противодействует. Из теории позиционных антагонистических дифференциальных игр [1, 2] следует, что обе игры имеют непрерывные функции цены $\gamma_1(t, x)$ и $\gamma_2(t, x)$ и универсальные седловые точки

$$\{u^{(i)}(t, x, \varepsilon),\ v^{(i)}(t, x, \varepsilon)\} \tag{1.8}$$

в игре Γ_i $(i = 1, 2)$.

Задача 1 (*нестандартная задача управления*). Пусть динамика управляемой системы описывается уравнением (1.1). Найти допустимые измеримые управления $u(t)$, $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, такие, что порождаемая ими траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ удовлетворяет неравенствам

$$\gamma_i(t, x(t)) \geqslant \gamma_i(\vartheta, x(\vartheta)) = \sigma_i(x(\vartheta)),\quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\quad i = 1, 2 \tag{1.9}$$

Задача 2 (*нестандартная задача оптимального управления*). Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ найти допустимые измеримые управления $u(t)$, $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, минимизирующие показатель $\alpha\sigma_1(x(\vartheta)) + (1-\alpha)\sigma_2(x(\vartheta))$ при условиях (1.9).

Задача 3 есть задача 2 при $\alpha = 1$; условие (1.9) при $i = 1$ опускается.

Задача 4 есть задача 2 при $\alpha = 0$; условие (1.9) при $i = 2$ опускается.

Пусть $u^*(t)$, $v^*(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ — допустимые измеримые управления, а $x^*(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ — порожденная ими траектория. Используя теорему Лузина, можно указать кусочно-непрерывные по первому аргументу функции $u_*(t, \varepsilon)$, $v_*(t, \varepsilon)$, такие, что для порождаемого ими движения

$x_*(t, \varepsilon)$ выполняется неравенство $\| x_*(t, \varepsilon) - x^*(t) \| \leqslant \varepsilon$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим стратегии $U^\circ = \{u^\circ(t, x, \varepsilon), \beta_1^\circ(\varepsilon)\}$ и $V^\circ = \{v^\circ(t, x, \varepsilon), \beta_2^\circ(\varepsilon)\}$, где при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $\varepsilon > 0$

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} &u^\circ = u_*(t, \varepsilon),\ v^\circ = v_*(t, \varepsilon),\ \| x - x_*(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon \\ &u^\circ = u^{(2)}(t, x, \varepsilon),\ v^\circ = v^{(1)}(t, x, \varepsilon),\ \| x - x_*(t, \varepsilon) \| > \varepsilon \end{aligned}$$

а функции $\beta_1^\circ(\cdot)$, $\beta_2^\circ(\cdot)$ выбраны так, чтобы обеспечить выполнение следующего неравенства для ломаных Эйлера:

$$(1.11) \qquad \begin{aligned} &\| x[t, t_0, x_0, Z(U^\circ, \varepsilon_1, \Delta_1), Z(V^\circ, \varepsilon_2, \Delta_2)] - x_*(t, \varepsilon) \| < \varepsilon \\ &t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon,\ \delta(\Delta_i) \leqslant \beta_i^\circ(\varepsilon),\ i = 1, 2 \end{aligned}$$

Функции $u^{(2)}(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $v^{(1)}(\cdot, \cdot, \cdot)$ определены в (1.8).

Заметим, что пара стратегий (U°, V°) порождает единственное движение, которое совпадает с $x^*(\cdot)$.

Теорема 2. Пусть измеримые управления $u(t)$, $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ решают задачу 1 (или задачу 2, 3, 4). Тогда пара стратегий (U°, V°) (1.10), (1.11) — N-решение (или соответственно P^*-, S_1-, S_2-решение). Наоборот, все N-решения (или P^*-, S_1-, S_2-решения) исчерпываются (с точностью до эквивалентности) парами стратегий (U°, V°) (1.10), (1.11), где $u^*(\cdot)$, $v^*(\cdot)$ — решение задачи 1 (или соответственно задачи 2, 3, 4).

Утверждение теоремы 2, касающееся N-, S_1- и S_2-решений, установлено в работе, приведенной в сноске [1]. Справедливость утверждения относительно P^*-решения доказывается аналогично.

Следствие. Множество траекторий $x^*(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ системы (1.1), порожденных управлениями $u^*(t)$, $v^*(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, решающими задачу 1 (или задачу 2, 3, 4), совпадает с множеством N-траекторий (или соответственно P^*-, S_1-, S_2-траекторий).

Замечания. 1°. Стратегии $u^{(2)}(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $v^{(1)}(\cdot, \cdot, \cdot)$ в структуре (1.10) можно интерпретировать как универсальные стратегии наказания партнера в случае его отказа в любой момент $t \in [t_0, \vartheta]$ отслеживать траекторию $x^*(\cdot)$. Подход, связанный с использованием стратегий наказания, предложен в [5] для статических игр и развит в [6] для динамических игр.

2°. При конструктивном отслеживании траектории $x^*(\cdot)$ в ломаных Эйлера требуется обмен информацией между игроками о выбираемых значениях параметра точности ε_1 и ε_2.

3°. Случай, когда показатели игроков (1.2) наряду с терминальными членами содержат также и интегральные, рассматривается аналогично (см. работу, приведенную в сноске [1]).

2. Рассмотрим следующий пример. Уравнение

$$(2.1) \qquad \xi^{\cdot\cdot} = u + v, \quad \xi, u, v \in R^2, \quad \| u \| \leqslant 1, \quad \| v \| \leqslant 1$$

описывает плоское движение материальной точки под суммарным действием сил u и v, подчиненных соответственно первому и второму игрокам. Заданы начальные условия $\xi[t_0] = \xi_0$, $\xi^\cdot[t_0] = \xi_0^\cdot$ и момент окончания ϑ. Цель i-го игрока — привести точку $\xi[\vartheta]$ как можно ближе к целевой точке $a^{(i)}$, т. е.

$$(2.2) \qquad \sigma_i(\xi[\vartheta]) = \| \xi[\vartheta] - a^{(i)} \| \to \min, \quad i = 1, 2$$

Полагая в уравнении (2.1) $y_1 = \xi_1$, $y_2 = \xi_2$, $y_3 = \xi_1^\cdot$, $y_4 = \xi_2^\cdot$ и производя замену переменных $x_1 = y_1 + (\vartheta - t) y_3$, $x_2 = y_2 + (\vartheta - t) y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$, получим систему, два первых уравнения которой имеют вид

$$(2.3) \qquad x_i^\cdot = (\vartheta - t)(u_i + v_i), \quad i = 1, 2$$

Показатели (2.2) в переменных x_1, x_2 примут вид

$$(2.4) \qquad \sigma_i(x[\vartheta]) = \| x[\vartheta] - a^{(i)} \|, \quad x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|$$

Поскольку показатели (2.4) определяются значениями лишь координат x_1 и x_2, а правая часть системы (2.3) не зависит от других координат, то можно заключить, что дифференциальную игру достаточно исследовать лишь для укороченной системы (2.3) с показателями (2.4). При этом начальные условия для системы (2.3) будут

$$x_i\,[t_0] = x_{0i} = \xi_{0i} - (\vartheta - t_0)\,\xi_{0i}^{\cdot},\quad i = 1,\ 2$$

Видно, что функции цены антагонистических игр Γ_1 и Γ_2 таковы:

$$\gamma_i\,(t,\ x) = \|\, x - a^{(i)} \,\|,\quad i = 1,\ 2$$

а универсальные оптимальные стратегии (1.8)

$$u^{(i)}\,(t,\ x,\ \varepsilon) = -\,v^{(i)}\,(t,\ x,\ \varepsilon) = (-1)^i\,\frac{x - a^{(i)}}{\|\,x - a^{(i)}\,\|},\qquad i = 1{,}2$$

Зададим начальные условия: $t_0 = 0$, $\xi_{01} = 2{,}2$, $\xi_{01}^{\cdot} = -0{,}8$, $\xi_{02} = 1{,}3$, $\xi_{02}^{\cdot} = -0{,}2$ и следующие значения параметров: $\vartheta = 2$, $a_1^{(1)} = -1$, $a_2^{(1)} = 5$, $a_1^{(2)} = 5$, $a_2^{(2)} = 4$. Тогда имеем $x_{01} = 0{,}6$, $x_{02} = 0{,}9$.

Вспомогательная задача 1, решения которой входят в структуру (1.10) N-решений, формулируется так: найти измеримые вектор-функции $u\,(t)$, $v\,(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, удовлетворяющие условиям

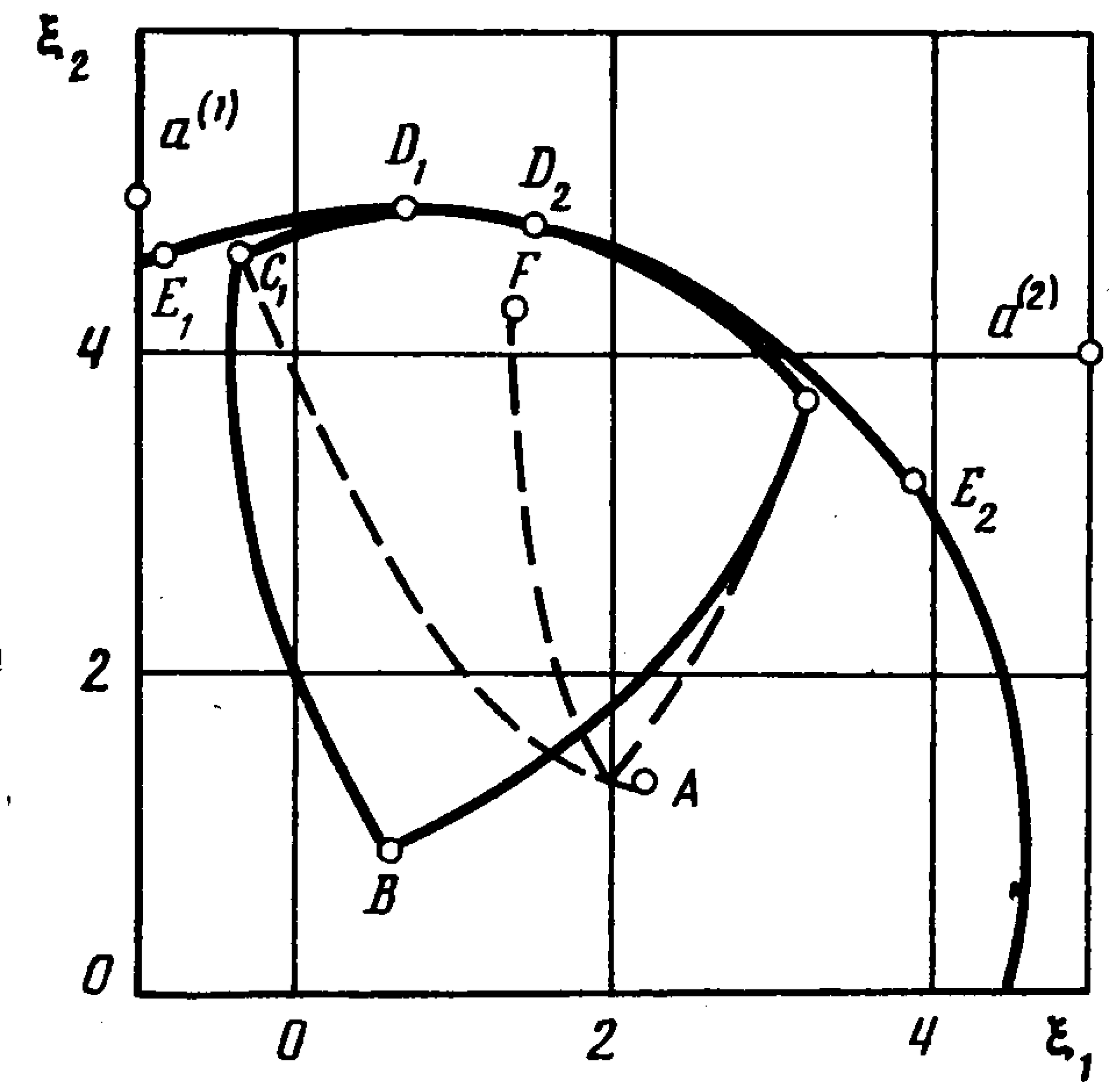
$$\|\, x\,(\vartheta) - a^{(i)} \,\| \leqslant \|\, x\,(t) - a^{(i)} \,\|,\ 0 \leqslant t \leqslant 2,\ i = 1,\ 2$$

где $x\,(\cdot)$ — траектория системы

$$x^{\cdot}\,(t) = (\vartheta - t)\,[u\,(t) + v\,(t)],\quad \|\, u\,(t) \,\| \leqslant 1,\quad \|\, v\,(t) \,\| \leqslant 1,\ x\,(0) = x_0 \tag{2.5}$$

Аналогичным образом формулируются задачи 2—4. Задачи 1—4 были решены. Не вдаваясь в детали, отметим, например, что по существу все решения задачи 1 могут быть получены в классе непрерывных управлений $u\,(t)$, $v\,(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, порождающих фазовые траектории системы (2.5) только трех типов: отрезок прямой, дуга окружности, «склейка» отрезка с дугой. С использованием теоремы 2 были найдены множества **N**, **P***, $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$.

Полученные множества N-, P^*-, S_1- и S_2- траекторий опишем через множества $N\,(\vartheta)$, $P^*\,(\vartheta)$, $S_1\,(\vartheta)$ и $S_2\,(\vartheta)$ правых концов этих траекторий (при $\vartheta = 2$). На фигуре в плоскости $(\xi_1,\ \xi_2)$ изображена начальная точка A ($\xi_{01} = 2{,}2$, $\xi_{02} = 1{,}3$). Окружность с центром в точке B ($\xi_{01} = 0{,}6$, $\xi_{02} = 0{,}9$) и радиусом 4, проходящая через точки E_1, D_1, D_2, E_2, ограничивает область достижимости системы (2.1) (и системы (2.3)) в момент $\vartheta = 2$. Часть области достижимости, ограниченная линией $BC_1D_1D_2C_2B$, где BC_1 и BC_2 — дуги окружностей с центрами в точках $a^{(2)}$ и $a^{(1)}$, имеющие длину 4, есть множество $N\,(\vartheta)$. Множество $P^*\,(\vartheta)$ изображается линией $C_1D_1D_2C_2$, а точки C_1 и C_2 — множества $S_1\,(\vartheta)$ и $S_2\,(\vartheta)$ соответственно. Штриховыми линиями изображены фазовые траектории в плоскости $(\xi_1,\ \xi_2)$, порожденные некоторыми из решений игры. Траектории, приводящие в точки C_1 и C_2, являются единственными S_1- и S_2-траекториями в данной игре. В точку F приводит N-траектория.



В данном примере имеем $\mathbf{S}_i \subset \mathbf{P}^*$, $i = 1,\ 2$. Заметим, что дуга окружности $E_1D_1D_2E_2$, где E_1 и E_2 — точки области достижимости, ближайшие к $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$, есть множество $P\,(\vartheta)$ концов траектории, соответствующих классическим P-решениям. Множества $P^*\,(\vartheta)$ и $P\,(\vartheta)$ имеют общую часть — дугу D_1D_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. *Тынянский Н. Т., Жуковский В. И.* Дифференциальные игры с ненулевой суммой (Бескоалиционный вариант).— В кн.: Итоги науки и техники: Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1977, т. 15, с. 199—266.

4. *Chen C. I., Cruz J. B., Jr.* Stackelberg solution for two-person games with biased information patterns.— IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, v. 17. No. 6, p. 791—798.
5. *Гермейер Ю. Б.* Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов.— Докл. АН СССР, 1971, т. 198, № 5, с. 1001—1004.
6. *Кононенко А. Ф.* О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 2, с. 285—288.
7. *Бунаков А. Э., Кононенко А. Ф.* Ситуации равновесия в классе позиционных стратегий в динамических играх m лиц.— В кн.: Всесоюз. конф. «Динамическое управление»: Тез. докл. Свердловск: Изд-е Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР, 1979, с. 50—51.
8. *Чистяков С. В.* О бескоалиционных дифференциальных играх.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 5, с. 1052—1055.
9. *Клейменов А. Ф.* Равновесные коалиционные контрстратегии в дифференциальных играх многих лиц.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 714—721.
10. *Клейменов А. Ф.* Анализ одной иерархической дифференциальной игры двух лиц.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 551—559.

Свердловск

Поступила в редакцию
1.IX.1986