Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 62-50

ЗАДАЧА О СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ С ПАМЯТЬЮ

Чистяков Ю. Е.

Решается задача о сближении пучка траекторий с терминальным множеством, когда управляющая сторона использует позиционные стратегии с памятью и ей неизвестен дискретный параметр $i \in I$, от которого зависит как динамическая система, так и терминальное множество. Строится множество начальных позиций, для которых поставленная задача разрешима. Показано, что это множество можно построить решив несколько стандартных задач о сближении в позиционных стратегиях без памяти и без неопределенных параметров. Кроме того, показано, что это множество в некотором смысле обладает свойством моста, которое характерно для решения позиционных задач о сближении без неопределенных параметров [1, 2]. На основании решения поставленной задачи удается развить результаты работы [3] о необходимых и достаточных условиях существования ситуации равновесия в позиционных дифференциальных играх двух лиц на случай n игроков. В этом случае роль неопределенного параметра играет номер отклонившегося от равновесия игрока.

1. Задача о сближении при наличии неопределенного параметра. Задача о сближении, когда неизвестен некоторый дискретный параметр, будет задаваться системой

$$dx/dt \in F\ (i,\ x\ (t),\ t,\ u'\ (t)),\ x\ (t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

$$u'\ (t) \equiv u\ (x\ (t_0,\ \tau_k)),\ \ t \in [\tau_k,\ \tau_{k+1}),\ \tau_k \in \Delta$$

Требуется обеспечить $x\ (\vartheta) \in M\ (i),\ \ \forall\ i \in I$. Здесь $x \in X = R^l$, $t_0 \in T = [\vartheta_0,\ \vartheta]$, $I = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $M\ (i) \subset X$ $u'(t) \in P$, $\Delta = \{\tau_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ p'\ \mid t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{p'} = \vartheta\}$

Таким образом, фазовым пространством является конечномерное евклидово пространство X и игра происходит на отрезке времени $[t_0,\ \vartheta]$. Управляющая сторона (игрок) использует кусочно-постоянные позиционные стратегии с памятью, задаваемые парой $(u,\ \Delta)$. Здесь $u : X\ [t_0,\ \cdot] \to P$ — произвольная функция, которая каждой траектории $x\ (t_0,\ t)$, реализовавшейся к текущему моменту времени t, ставит в соответствие некоторое значение управления $u'\ (t) = u\ (x\ (t_0,\ t))$ из компакта P в топологическом пространстве; Δ — моменты времени, в которые управляющая сторона будет производить «переключение» своего управления; $M\ (i)$ — произвольные ограниченные множества, которые зависят от значения неизвестного параметра $i \in I$. При каждом фиксированном наборе $i,\ x,\ t,\ u'$ многозначная функция F принимает значение $F\ (i,\ x,\ t,\ u')$, которое является ограниченным замкнутым множеством в шаре радиуса R из X. Предполагается, что для всех подмножеств $\sigma \subseteq I$ многозначная функция

$$F\,(\sigma, x, t, u') = \bigcap_{i \in \sigma} F\ (i, x, t, u')$$

непрерывна по $t,\ u'$ и удовлетворяет условию Липшица по x в метрике Хаусдорфа. Заметим, что если $F\ (\sigma,\ x,\ t,\ u') = \varnothing$ для некоторых $\sigma,\ x,\ t,\ u'$ то она должна быть пустой для всех $x',\ t',\ u''$.

Если заданы начальная позиция $x_0,\ t_0$, значение неизвестного параметра $i \in I$ и стратегия $u\Delta$, то система (1.1) однозначно порождает пучок абсолютно непрерывных траекторий $X[i, x_0, t_0, u\Delta]$, удовлетворяющих первому уравнению в (1.1) при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

Определение 1.1. Будем говорить, что для $\sigma \subseteq I$ и начальной позиции x_0, t_0 разрешима задача о сближении, если для любого $\delta > 0$ найдется стратегия $u\Delta$, которая обеспечивает попадание к моменту ϑ всего пучка $X[i, x_0, t_0, u\Delta]$ в δ-окрестность множества $M(i)$, причем это включение должно выполняться для всех $i \in \sigma$.

Обозначим $K(\sigma) \subset X \times T$ множество начальных позиций x_0, t_0, для которых разрешима задача о сближении при фиксировнном $\sigma \subseteq I$, или формально

$$K(\sigma) = \{x_0, t_0 \mid \forall\delta > 0 \;\; \exists u\Delta\colon X^{\vartheta}[i, x_0, t_0, u\Delta] \subset M(i) + \delta, \;\; \forall i \in \sigma\} \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем $X^{\vartheta}[i, x_0, t_0, u\Delta]$ — срезка пучка траекторий моментом ϑ, а $M(i) + \delta$ — δ-окрестность множества $M(i)$.

Заметим, что если σ состоит из одного элемента, то приведенная задача сводится к достаточно хорошо изученной задаче о сближении [1]. В частности, соответствующее множество $K(\sigma)$ обладает свойством моста, которое существенно используется для построения стратегий $u\Delta$, обеспечивающих встречу с терминальным множеством.

Исследуем свойства множеств $K(\sigma)$ при $|\sigma| > 1$, укажем способ построения этих множеств, а также найдем стратегии $u\Delta$, которые решают задачу о сближении. Основной интерес представляет множество $K(I)$ и соответствующие стратегии.

Свойства множеств $K(\sigma)$. Покажем, что множество $K(\sigma)$ обладает рядом свойств, характерных для мостов в задачах о сближении без неизвестных параметров.

Отметим, без доказательства, следующие два топологических свойства этих множеств.

Свойство 1.1. Множество $K(\sigma)$ замкнуто как подмножество расширенного фазового пространства $X \times T$.

Свойство 1.2. Существует величина $\varepsilon_0(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, такая, что $K(\sigma, \delta) \subset K(\sigma) + \varepsilon_0(\delta)$, где множество $K(\sigma, \delta)$ определяется по формуле (1.2) при фиксированном $\delta > 0$.

Свойство 1.2 показывает, что при малых δ множество $K(\sigma, \delta)$ «мало отличается» от $K(\sigma)$.

Если заданы $\sigma \subseteq I$, начальная позиция x_0, t_0 и стратегия $u\Delta$, то помимо пучков траекторий $X[i, x_0 t_0, u\Delta]$ можно рассмотреть пучок

$$X[\sigma, x_0, t_0, u\Delta] = \bigcap_{i \in \sigma} X[i, x_0, t_0, u\Delta] \tag{1.3}$$

Это множество траекторий, которые могли реализоваться при любом значении параметра $i \in \sigma$.

Непосредственно из определения системы (1.1) следует, что это множество совпадает с множеством абсолютно непрерывных решений дифференциального уравнения в контингенциях

$$dx/dt \in F(\sigma, x, t, u(x(t_0, \tau_k))), \qquad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

причем, если окажется, что для некоторого σ множество $F(\sigma, x, t, u')$ тождественно равно пустому по всем x, t, u', то решение уравнения (1.4) и соответствующий пучок (1.3) по определению состоят из одной траектории $x(t_0, t_0)$, которая будет просто начальной позицией (x_0, t_0).

Оказывается, что множество $K(\sigma)$ является мостом для таких пучков.

Свойство 1.3. Если $(x_0, t_0) \in K(\sigma)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует стратегия $u\Delta$, такая, что $\bar{X}[\sigma, x_0, t_0, u\Delta] \subset K(\sigma) + \varepsilon$. (Здесь и в дальнейшем черта над траекторией показывает, что ее следует рассматривать уже как множество точек в пространстве $X \times T$, через которые она проходит.)

Доказательство. Пусть задана величина $\varepsilon > 0$, пусть $u\Delta$ решает задачу (1.2) для фиксированного $\delta > 0$, подобранного так, чтобы $\varepsilon_0(\delta) < \varepsilon/2$ (см. свойство 1.2). Будем считать, что $R\|\Delta\| < \varepsilon/2$, где $\|\Delta\| = \max\limits_k (\tau_{k+1} - \tau_k)$. Пусть $x_0(t_0, \vartheta) \in X[\sigma, x_0, t_0, u\Delta]$ и $x_p = x_0^{\tau_p}(t_0, \vartheta)$ — значение фазового вектора траектории $x_0(t_0, \vartheta)$ в момент $\tau_p \in \Delta$. Покажем, что тогда $(x_p, \tau_p) \in K(\sigma) + \varepsilon/2$.

Для всех траекторий, начавшихся в (x_p, τ_p), определим $u_1(x(\tau_p, t)) = u(\varphi(x(\tau_p, t)))$, где $\varphi(x(\tau_p, t)) = x_0(t_0, \tau_p) * x(\tau_p, t)$.

Символ $*$ означает «сшивание» траекторий в точке (x_p, τ_p). Тогда из (1.1) следует, что

$$x_0(t_0, \tau_p) * X[i, x_p, \tau_p, u_1\Delta] \subset X[i, x_0, t_0, u\Delta], \quad \forall i \in \sigma$$

Следовательно, $X^{\vartheta}[i, x_p, \tau_p, u_1\Delta] \subset X^{\vartheta}[i, x_0, t_0, u\Delta] \subset M(i) + \delta$, так как $u\Delta$ решает (1.2). Поэтому по определению

$$(x_p, \tau_p) \in K(\sigma, \delta) \subset K(\sigma) + \varepsilon_0(\delta) \subset K(\sigma) + \varepsilon/2$$

Пусть теперь $t \in (\tau_p, \tau_{p+1})$. Тогда имеем

$$(x^t(t_0, \vartheta), t) \in (x_p, \tau_p) + R\|\Delta\| \subset K(\sigma) + \varepsilon$$

что и доказывает свойство 1.3.

Построение множеств $K(\sigma)$. Покажем, что множества $K(\sigma)$ можно получить как решение задачи построения мостов

$$(1.5) \qquad W(\sigma) = \begin{cases} x_0, t_0 \mid \forall\delta > 0\ \exists u\Delta: \ X^{\vartheta}[j, x_0, t_0, u\Delta] \subset M(j) + \delta, & \sigma = \{j\} \\ x_0, t_0 \mid \forall\varepsilon > 0\ \exists u\Delta: \ \bar{X}[\sigma, x_0, t_0, u\Delta] \subset \bigcap\limits_{i \in \sigma} W(\sigma \setminus i) + \varepsilon, & |\sigma| > 1 \end{cases}$$

Таким образом, если σ состоит из одного элемента j, то для построения $W(\sigma)$ нужно решить задачу о сближении с множеством $M(j)$. Если же σ состоит более чем из одного элемента, то для построения $W(\sigma)$ нужно решить задачу об удержании пучка $X[\sigma, x_0, t_0, u\Delta]$ порождаемого системой (1.4), внутри пересечения уже построенных множеств $W(\sigma')$, $\sigma' = \sigma \setminus i$, $i \in \sigma$.

Заметим, что в этих задачах уже нет неопределенных параметров, поэтому информация о всей траектории будет уже избыточной, и для построения множеств $W(\sigma)$ можно обойтись обычными позиционными стратегиями без памяти. Следовательно, множества $W(\sigma)$ как решения позиционных задач будут обладать свойством моста, о чем говорит

Свойство 1.4. При каждом фиксированном $\delta > 0$ существуют позиционные стратегии без памяти $v_\delta^\sigma\Delta_\delta$ $(\sigma \subseteq I)$ и последовательность $0 < \varepsilon_n(\delta) < \varepsilon_{n-1}(\delta) < \ldots < \varepsilon_1(\delta)$ $(n = |I|)$, такие, что $\forall\sigma \subseteq I$, $(x_0, t_0) \in W(\sigma) + \varepsilon_m(\delta)$, где $m = |\sigma|$, выполняется условие

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} &X^{\vartheta}[j, x_0, t_0, v_\delta^j\Delta_\delta] \subset M(j) + \delta, \quad \sigma = \{j\} \\ &\bar{X}[\sigma, x_0, t_0, v_\delta^\sigma\Delta_\delta] + R\|\Delta_\delta\| \subset W(\sigma) + \varepsilon_{m-1}, \ |\sigma| = m > 1 \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись позиционными стратегиями $v_\delta^\sigma\Delta_\delta$, обеспечивающими включения (1.6), сконструируем позиционные стратегии с памятью $u_\delta^{\sigma_0}\Delta_\delta'$, которые будут решать при фиксированном $\delta > 0$ поставленную вначале задачу (1.2) для всех $(x_0, t_0) \in K(\sigma_0)$.

Итак, пусть заданы $\delta > 0$, $\sigma_0 \subseteq I$. Определим стратегию $u_\delta^{\sigma_0}\Delta_\delta'$, положив $\Delta_\delta' = \Delta_\delta$, $u_\delta^{\sigma_0}(x(t_0, t)) = v_\delta^{\sigma_p}(x^t, t)$, где $x^t = x^t(t_0, t)$, а множество $\sigma_p = \psi_\delta(x(t_0, t), \sigma_0) \subseteq \sigma_0$ находим в результате следующей последовательной процедуры:

$$\sigma_{k+1} = \{j \in \sigma_k \,|\, x(\tau_k, \tau_{k+1}) \in X[j, x_k, \tau_k, v_\delta^{\sigma_k}\Delta_\delta]\}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1$$

$$x_k = x^{\tau_k}(t_0, t), \quad \tau_k \in \Delta_\delta, \quad t \in [\tau_p, \tau_{p+1})$$

$$x(t_0, t) = x(t_0, \tau_1) * x(\tau_1, \tau_2) * \ldots * x(\tau_p, t)$$

Из определения стратегии $u_\delta^{\sigma_0}\Delta_\delta$ видно, что она каждой траектории $x(t_0, t)$ ставит в соответствие значение, равное значению, которое принимает позиционная стратегия $v_\delta^{\sigma_p}\Delta_\delta$ на концевой точке $(x^t(t_0, t), t)$ этой траектории. При этом σ_p вычисляется к моменту $t \in [\tau_p, \tau_{p+1})$ рекуррентно и показывает полный набор неизвестных параметров из σ_0, при которых могла реализоваться эта траектория.

В частности, если $(x_0, t_0) \in W(\sigma_0) + \varepsilon_m$, $m = |\sigma_0|$, $i \in \sigma_0$, $x(t_0, \vartheta) \in X[i, x_0, t_0, u_\delta^{\sigma_0}\Delta_\delta]$, $\psi_\delta(x(t_0, t), \sigma_0) = \sigma_0$, то непосредственно из определения следует, что все время на траектории $x(t_0, t)$ действует позиционная стратегия $v_\delta^{\sigma_0}\Delta_\delta$, для которой справедливо условие (1.6). Следовательно

$$x^\vartheta(t_0, \vartheta) \in M(j) + \delta, \quad \sigma_0 = \{j\} \tag{1.7}$$

$$\bar{x}(t_0, \vartheta) + R\,\|\Delta_\delta\| \subset W(\sigma_0) + \varepsilon_{m-1}, \quad |\sigma_0| = m > 1$$

Теорема 1. 1. Справедливо равенство $K(\sigma_0) = W(\sigma_0)$, причем стратегия $u_\delta^{\sigma_0}\Delta_\delta$ обеспечивает соответствующие включения в формуле (1.2) для фиксированного $\delta > 0$ и для всех начальных позиций $(x_0, t_0) \in K(\sigma_0) + \varepsilon_m(\delta)$, где $m = |\sigma_0|$.

Доказательство. При $\sigma_0 = \{i\}$ множества $K(j)$ и $W(j)$ равны по определению. Пусть теперь $(x_0, t_0) \in K(j) + \varepsilon_1(\delta)$. Тогда выполняется условие (1.6), а следовательно, и (1.2). Допустим, теорема верна при $|\sigma_0| < m$. Докажем, что тогда она верна при $|\sigma_0| = m > 1$.

Сначала докажем, что $K(\sigma_0) \subseteq W(\sigma_0)$. Если $(x_0, t_0) \in K(\sigma_0)$, то по свойству 1.3 для любого $\varepsilon > 0$ существует стратегия $u\Delta$, такая, что

$$\bar{X}[\sigma_0, x_0, t_0, u\Delta] \subset K(\sigma_0) + \varepsilon \subseteq \bigcap_{i \in \sigma_0} K(\sigma_0 \setminus i) + \varepsilon = \bigcap_{i \in \sigma_0} W(\sigma_0 \setminus i) + \varepsilon$$

Последнее равенство следует из предположения индукции, поэтому, в соответствии с определением, $(x_0, t_0) \in W(\sigma_0)$.

Докажем обратное включение: $W(\sigma_0) \subseteq K(\sigma_0)$. Достаточно показать что если $(x_0, t_0) \in W(\sigma_0) + \varepsilon_m(\delta)$, $x(t_0, \vartheta) \in X[i, x_0, t_0, u_\delta^{\sigma_0}\Delta_\delta]$ для некоторого $i \in \sigma_0$, то $x^\vartheta(t_0, \vartheta) \in M(i) + \delta$.

Первый случай: $\psi_\delta(x(t_0, \vartheta), \sigma_0) = \sigma$. Тогда в соответствии с (1.7)

$$\bar{x}(t_0, \vartheta) \subset W(\sigma_0) + \varepsilon_{m-1} \subseteq \bigcap_{j \in \sigma_0} W(\sigma_0 \setminus j) + \varepsilon_{m-1}$$

Последнее множество по предположению индукции совпадает с множеством

$$\bigcap_{j \in \sigma_0} K(\sigma_0 \setminus j) + \varepsilon_{m-1} \subset K(i) + \varepsilon_1$$

Следовательно, $x^\vartheta(t_0, \vartheta) \in M(i) + \delta$, так как по свойству 1.4 срезка моментом времени ϑ множества $K(i) + \varepsilon_1$ принадлежит $M(i) + \delta$.

Второй случай: $\psi_\delta(x(t_0, \vartheta), \sigma_0) = \sigma' \subset \sigma_0$. Пусть $p = \max\{k \,|\, \psi_\delta(x(t_0, \tau_k), \sigma_0) = \sigma_0\}$. Тогда $\sigma_p = \sigma_0$, $\sigma_{p+1} \subset \sigma_0$, $|\sigma_{p+1}| = m' < m$, $\varepsilon_{m'} \geqslant \varepsilon_{m-1}$. Из соотношений (1.7) следует, что

$$\bar{x}(t_0, \tau_p) + R\,\|\Delta_\delta\| \subset \bigcap_{j\in\sigma_0} W(\sigma_0 \setminus j) + \varepsilon_{m-1}$$

Поскольку $\sigma_{p+1} \subset \sigma_0$, то для некоторого $j \in \sigma_0$ имеем $\sigma_{p+1} \subseteq \sigma_0 \setminus j$, поэтому последнее множество принадлежит $W(\sigma_{p+1}) + \varepsilon_m'$. Следовательно

$$(x_{p+1}, \tau_{p+1}) \in (x_p, \tau_p) + R\cdot\|\Delta_\delta\| \subset W(\sigma_{p+1}) + \varepsilon_{m'}$$

Таким образом, для позиции (x_{p+1}, τ_{p+1}) выполняется условие теоремы, но только для $\sigma_{p+1} \subset \sigma_0$. Кроме того, поскольку на интервале (τ_{p+1}, ϑ) действует стратегия $u_\delta^{\sigma_{p+1}}\Delta_\delta$, то по предположению индукции выполняется (1.2), т. е. $x^\vartheta(t_0, \vartheta) \in M(i) + \delta$, что и доказывает теорему.

2. Задача о ситуации равновесия в позиционной игре n лиц. Игра будет задаваться системой

$$\begin{aligned}
&(2.1) \qquad dx/dt = f(x, t, u_1'(t), \ldots, u_n'(t)),\ x(t_0) = x_0\\
&\qquad u_i'(t) = u_i(x(t_0, \tau_k^i)), \quad t \in [\tau_k^i, \tau_{k+1}^i), \quad \tau_k^i \in \Delta_i\\
&\qquad J_i(u_1\Delta_1, \ldots, u_n\Delta_n) = g_i(x(\vartheta)) \to \max\ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

Игра происходит в конечномерном пространстве X на отрезке времени $[t_0, \vartheta] \subseteq [\vartheta_0, \vartheta] = T$. Ее участники используют кусочно-постоянные позиционные стратегии с памятью, задаваемые парой (u_i, Δ_i), $u_i : X[t_0, \cdot] \to P_i$ — произвольная функция, которая каждой траектории $x(t_0, t)$, реализовавшейся к моменту t, ставит в соответствие некоторое значение управления $u_i'(t)$ из компакта P_i в топологическом пространстве; $\Delta_i = \{\tau_k^i,\ k = 0, 1, \ldots, p_i \mid t_0 = \tau_0^i < \tau_1^i < \ldots < \tau_{p_i}^i = \vartheta\}$ — моменты времени, в которые i-й игрок намерен «переключать» свое управление. Функция f, определяющая динамику игры, предполагается непрерывной по своим аргументам, удовлетворяет неравенству $\varkappa(1 + \|x\|) \geqslant \|f(x, t, u_1', \ldots, u_n')\|$, для некоторого значения $\varkappa > 0$ и условию Липшица по x. Кроме того, построенная на основании функции f многозначная функция

$$(2.2) \qquad F(\sigma, x, t, u_1', \ldots, u_n') = \bigcap_{i\in\sigma} \{f(x, t, u_1', \ldots, u_i'', \ldots, u_n') \mid u_i'' \in P_i\}$$

непрерывна по $u' = (u_1', \ldots, u_n')$, t и удовлетворяет условию Липшица по x в метрике Хаусдорфа для каждого $\sigma \subseteq I$.

Если заданы начальная позиция x_0, t_0 и набор стратегий игроков $u\Delta = (u_1\Delta_1, \ldots, u_n\Delta_n)$, то система (2.1) однозначно порождает некоторую траекторию $x(\cdot)$, а вместе с ней по третьей формуле в (2.1) определяются выигрыши игроков.

Определение 2.1. Для начальной позиции (x_0, t_0) в игре (2.1) имеет место ситуация равновесия, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся стратегии $u\Delta = (u_1\Delta_1, \ldots, u_n\Delta_n)$, такие, что для всех $i \in I$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
&(2.3) \qquad J_i(u_1\Delta_1, \ldots, u_i''\Delta_i'', \ldots, u_n\Delta_n) \leqslant J_i(u_1\Delta_1, \ldots, u_i\Delta_i, \ldots\\
&\qquad \ldots, u_n\Delta_n) + \varepsilon, \quad \forall u_i''\Delta_i''
\end{aligned}$$

Можно показать, что с существованием ситуации равновесия однозначно связано существование равновесной траектории (РТ).

Определение 2.2. Траектория $x^*(\cdot)$ является равновесной для дифференциальной игры (2.1), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется набор стратегий $u\Delta$, порождающий траекторию $x(\cdot)$, для которого, во-первых, выполняется условие

$$(2.4) \qquad \max_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} \|x(t) - x^*(t)\| \leqslant \varepsilon$$

и, во-вторых, выполняется неравенство (2.3) из определения 2.1.

Предметом дальнейшего изучения будут РТ, которые, будучи предельными элементами ε-равновесных траекторий, обладают рядом хороших математических свойств.

Необходимое и достаточное условие равновесности траектории. Ниже будет показано, что задача построения РТ сводится к решению вспомогательной задачи о сближении при наличии неопределенного параметра, которое было проведено в п. 1.

Прежде всего представим определение РТ в удобной форме. Можно показать, что множество РТ не изменится, если в определении 2.1 потребовать, чтобы разбиения Δ_i всех игроков совпадали, а отклонившийся игрок перебирает всевозможные измеримые программы. На основании этого факта, теоремы об измеримом выборе, а также непрерывности терминальных функций выигрыша можно дать следующее эквивалентное определение РТ.

Определение 2.3. Траектория $x^*(\cdot)$ является равновесной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется набор стратегий $u\Delta = (u_1\Delta, \ldots, u_n\Delta)$, порождающих траекторию $x(\cdot)$, для которого, во-первых, выполняется условие (2.4) и, во-вторых, при каждом $i \in I$ весь пучок $X[i, x_0, t_0, u\Delta]$ к моменту ϑ попадает в ε-окрестность соответствующего множества

$$M(i) = \{x \mid g_i(x) \leqslant g_i(x^*(\vartheta))\} \tag{2.5}$$

Определение пучка $X[i, x_0, t_0, u\Delta]$ было дано в п. 1.

Из определения 2.5 следует, что если $x^*(\cdot)$ — РТ, то для начальной позиции x_0, t_0 разрешима задача о сближении пучков $X[i, x_0, t_0, u\Delta]$ с терминальными множествами $M(i)$ при наличии неопределенного параметра $i \in I$. В п. 1 множество таких начальных позиций обозначалось $K(I)$ и строилось путем решения $2^n - 1$ вспомогательных задач об $(N - M)$ сближении уже без неопределенных параметров и в обычных позиционных стратегиях без памяти. Исходя из равновесности траектории $x^*(\cdot)$, можно показать, что и для всех промежуточных позиций $(x^*(t), t)$ как для начальных разрешима соответствующая задача о сближении при наличии неопределенного параметра $i \in I$. Таким образом, вся РТ $x^*(\cdot)$ лежит в множестве $K(I) \subset X \times T$.

Действительно, пусть $x^*(\cdot)$ — некоторая допустимая траектория (т. е. траектория, которую можно сколь угодно близко приблизить траекториями, порожденными кусочно-постоянными программами $u'(t)$). Пусть $(x^*(t), t) \in K(I)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Пусть набор стратегий $u\Delta$ решает для начальной позиции $(x^*(t_0), t_0)$ соответствующую задачу о сближении при достаточно малом ε. В конце п. 1 было показано, что этот набор позиционных стратегий с памятью о траектории строится на основе обычных позиционных стратегий $v_\varepsilon^\delta\Delta_\varepsilon$, $\sigma \subseteq I$, которые внутри ε'-окрестности $K(I)$ могли быть выбраны произвольно, где $\varepsilon' > 0$ достаточно мало. Теперь эти позиционные стратегии доопределим внутри ε'-окрестности множества $K(I)$, положив их равными программам, которые с точностью до $\varepsilon'' < \varepsilon'$ аппроксимируют рассматриваемую траекторию $x^*(\cdot)$. Непосредственно проверяется, что так переопределенная стратегия $u\Delta = (u_1\Delta_1, \ldots, u_n\Delta_n)$ удовлетворяет всем условиям определения 2.3 и обеспечивает выполнение соответствующих неравенств и включений с точностью до ε.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. Допустимая траектория $x^*(\cdot)$ равновесна тогда и только тогда, когда она целиком лежит в множестве $K(I) \subset X \times T$.

Эта теорема аналогична по форме соответствующей теореме из работы [3], когда речь шла о неантагонистической позиционной игре двух лиц.

Решение дифференциальной игры простого вида. Рассмотрим частный случай дифференциальной игры (2.1), у которой функция f имеет вид

$f(u_1', \ldots, u_n')$, т. е. не зависит от x и t, а терминальные функции g_i выпуклы вниз. Для такой игры соответствующее множество $K(I)$ удается построить явно.

Решение будет основано на трех вспомогательных леммах, касающихся задачи о сближении простого вида

$$dx/dt = f(u', v'),\ x(t_0) = x_0,\ u' \in P,\ v' \in Q$$

Задача первого игрока — подобрать такую позиционную стратегию, которая при произвольных действиях второго игрока обеспечивала бы встречу к моменту ϑ всех траекторий с выпуклым терминальным множеством M.

Обозначим W максимальный u_*-стабильный мост в этой задаче о сближении.

Лемма 2.1. W — выпуклое множество.

Лемма 2.2. Если $(x_0, t_0) \in W$, то конус с вершиной в точке (x_0, t_0) и основанием, совпадающим с M, является u_*-стабильным множеством и целиком лежит в W.

Лемма 2.3. Множество W задается условием

$$W = \{x_0, t_0, | \forall \| q \| = 1 \quad \langle q, x \rangle + (\vartheta - t_0)\xi(q) \leqslant \sup_{x \in M} \langle q, x \rangle\}$$

$$\xi(q) = \min_{u' \in P} \max_{v' \in Q} \langle q, f(u', v') \rangle$$

Примем эти леммы без доказательства.

Вернемся к дифференциальной игре простого вида. Следуя общей схеме, изложенной в конце п. 1, для построения множества $K(I)$ нужно последовательно построить множества $K(\sigma)$ для всех $\sigma \subseteq I$. Если множества $K(\sigma \setminus i)$ уже построены, то для построения $K(\sigma)$ нужно решить $(N - M)$ задачу о сближении, у которой

$$N = \bigcap_{i \in \sigma} K(\sigma \setminus i) = N(\sigma), \quad M = \bigcap_{i \in \sigma} M(i) = M(\sigma)$$

Обозначим $A(\sigma)$ множество начальных позиций, для которых разрешима эта задача о сближении с терминальным множеством $M(\sigma)$, но уже без фазовых ограничений.

Теорема 2.2. $K(\sigma) = A(\sigma) \bigcap N(\sigma)$ и является выпуклым множеством ($K(\varnothing) = X \times T$).

Доказательство. Допустим, что теорема верна для всех $\sigma' \subset \sigma$. Докажем, что тогда она верна и для $\sigma' = \sigma$. То, что $K(\sigma) \subseteq A(\sigma) \bigcap N(\sigma)$, следует непосредственно из определения $K(\sigma)$. Пусть теперь $(x_0, t_0) \in A(\sigma) \bigcap N(\sigma)$. По предположению, множества $K(\sigma \setminus i)$ выпуклы. Множество $A(\sigma)$ выпукло в силу леммы 2.1. Следовательно, конус с вершиной в (x_0, t_0) и основанием, совпадающим с множеством $M(\sigma)$, во-первых, целиком лежит в множестве $A(\sigma) \bigcap N(\sigma)$ и, во-вторых, в силу леммы 2.2 является u_*-стабильным множеством. Следовательно, для начальной позиции x_0, t_0 разрешима задача о сближении с терминальным множеством $M(\sigma)$внутри множества $N(\sigma)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. $K(I) = \bigcap_{\sigma \subseteq I} A(\sigma)$, причем

$$A(\sigma) = \{x_0, t_0 | \forall \| q \| = 1 \langle q, x_0 \rangle + (\vartheta - t_0)\xi(\sigma, q) \leqslant \sup_{x \in M(\sigma)} \langle q, x \rangle\} \tag{2.6}$$

$$\xi(\sigma, q) = \min_{u_1', \ldots, u_n'} \max \{\langle q, f \rangle | f \in F(\sigma, u_1', \ldots, u_n')\}$$

Справедливость этого следствия следует непосредственно из теоремы 2.2 и леммы 2.3.

Таким образом, для игры простого вида теорему 2.1 о необходимых и достаточных условиях равновесности траектории можно переформулировать так.

Теорема 2.3. Допустимая траектория $x^*(\cdot)$ равновесна для простой игры тогда и только тогда, когда она целиком лежит в каждом из множеств $A(\sigma)$, определяемых формулой (2.6) и построенных для терминальных множеств

$$M(\sigma) = \{x \mid g_i(x) \leqslant g_i(x^*(\vartheta)), \quad \forall i \in \sigma\}$$

В качестве примера рассмотрим следующую игру на перетягивание:

$$dx/dt = u_1' + u_2' + u_3', \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \vartheta]$$

$$\| u_i' \| \leqslant r_i, \quad 0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$$

$$J_i = \langle g_i, x(\vartheta) \rangle \to \max$$

Игра происходит на плоскости. Для определенности будем считать, что у игроков нет вектора общих интересов, т. е. не существует такого вектора g, что $\langle g, g_i \rangle > 0$, $\forall i$.

Можно показать, что функция $\xi(\sigma, q)$ для этой задачи представима в виде $\xi(\sigma) \cdot \| q \|$, причем

$$\xi(\sigma) = \min_{i \in \sigma} \xi(i), \quad \xi(1) = r_1 - r_2 - r_3$$

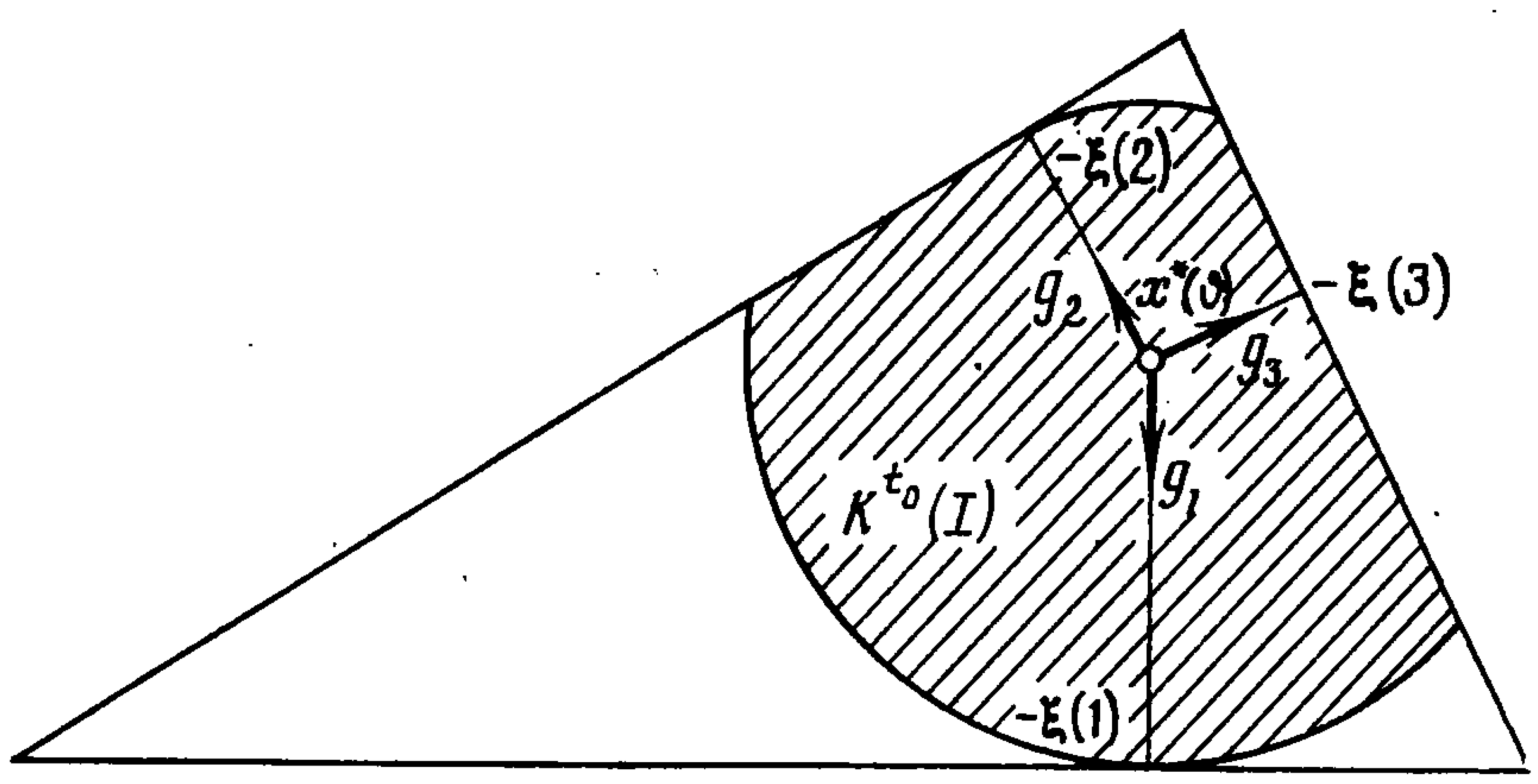
$$\xi(2) = r_2 - r_1 - r_3, \quad \xi(3) = r_3 - r_1 - r_2$$

Множества $A(\sigma)$ можно задать в виде

$$A(\sigma) = \{x_0, t_0 \mid \rho(x_0/(\theta - t_0), M(\sigma)) \leqslant -\xi(\sigma)\}$$

$$M(\sigma) = \{x \mid \langle g_i, x \rangle \leqslant \langle g_i, x^*(\vartheta) \rangle, \quad \forall i \in \sigma\}$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ — расстояние между точкой и множеством, $x^*(\cdot)$ — исследуемая на равновесность траектория.



Таким образом, множество $K(I)$ в данном случае — конус с вершиной в точке $(x^*(\vartheta), \vartheta)$, срезка которого моментом времени $t_0 = \vartheta - 1$ изображена на фигуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Кононенко А. Ф.* О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 2, с. 285—288.

Москва

Поступила в редакцию 24.VI.1986