Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 62-50

ПОСТРОЕНИЕ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Красовский А. Н.

Рассматривается задача об оптимальном управлении в классе смешанных стратегий при условии минимума гарантированного результата. Дается эффективный способ построения оптимальной стратегии методом стохастического программного синтеза. Эти результаты развивают теорию, данную в работах [1—7].

1. Постановка задачи. Рассматривая объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = A(t)\,x + f(t, u, v), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad u \in R, \quad v \in W \tag{1.1}$$

где x — n-мерный фазовый вектор, u — r-мерный вектор управления, v — s-мерный вектор помехи, R и W — компакты, матрица-функция $A(t)$ и вектор-функция $f(t, u, v)$ непрерывны, t_0 и ϑ фиксированы.

Задан показатель качества $\gamma = |x[\vartheta]|$, где $|x|$ — евклидова норма x.

Наряду с x — объектом (1.1) рассмотрим y — модель, включенную в орган управления. Ее фазовое состояние определяется n-мерным вектором $y[t]$.

Смешанной стратегией назовем совокупность

$$S^u = \{R(\cdot),\ p(\cdot);\ R^*(\cdot),\ p^*(\cdot);\ W^*(\cdot),\ q^*(\cdot)\} \tag{1.2}$$

из множеств и функций

$$R(\cdot) = \{R(\varepsilon) = \{u^{[l]} \in R,\ l = 1, \ldots, N_\varepsilon\},\ \varepsilon > 0\},$$

$$R^*(\cdot) = R(\cdot)$$

$$p(\cdot) = \Big\{p_l(t, x, y, \varepsilon) \geqslant 0,\ \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} p_l(t, x, y, \varepsilon) = 1\Big\}$$

$$p^*(\cdot) = \Big\{p_l^*(t, x, y, \varepsilon) \geqslant 0,\ \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} p_l^* = 1\Big\}$$

$$W^*(\cdot) = \{W^*(\varepsilon) = \{v^{[m]} \in W,\ m = 1, \ldots, M_\varepsilon\}\}$$

$$q^*(\cdot) = \Big\{q_m^*(t, x, y, \varepsilon) \geqslant 0,\ \sum_{m=1}^{M_\varepsilon} q_m^* = 1\Big\}$$

Закон управления U, отвечающий на отрезке $[t_*, \vartheta]$ стратегии S^u (1.2), определяется как совокупность

$$U = \{S^u;\ \varepsilon > 0;\ \Delta\{t_i\}\}, \quad t_* \in [t_0, \vartheta) \tag{1.3}$$

$$\Delta\{t_i\} = \{t_1 = t_*, \ldots, t_i < t_{i+1},\ t_{k+1} = \vartheta\} \tag{1.4}$$

Базой является некоторое вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, которое строится стандартным образом на основе функций $p(\cdot)$, $p^*(\cdot)$, $q^*(\cdot)$ и свойств случайной помехи

$$v[t_*[\cdot]\vartheta, \cdot) = \{v[t, \omega] \in W,\ t_* \leqslant t < \vartheta,\ \omega \in \Omega\} \tag{1.5}$$

Закон управления U (1.3) в паре с помехой $v[\cdot]$ (1.5) порождают из исходных позиций $\{t_*, x_*\}$ и $\{t_*, y_*\}$ случайные движения x-объекта и

y-модели, которые определяются как решения пошаговых уравнений

$$(1.6)\qquad x^{\cdot}[t,\omega] = A(t)\,x[t,\omega] + f(t,\ u[t_i,\omega],\ v[t,\omega]),\ t_i \leqslant t < t_{i+1},\quad i = 1, \ldots, k$$

$$(1.7)\qquad y^{\cdot}[t,\omega] = A(t)\,y[t,\omega] + \sum_{l,\,m=1}^{N_\varepsilon, M_\varepsilon} f(t, u^{[l]}, v^{[m]})\,p_l^*(t_i, x[t_i,\omega], y[t_i,\omega],\varepsilon)\,q_m^*(t_i, x[t_i,\omega], y[t_i,\omega],\varepsilon),\ t_i \leqslant t < t_{i+1}$$

При формировании движения $x[t,\omega]$ согласно (1.6) на каждом шаге в момент t_i делается случайное испытание по выбору вектора $u[t_i,\omega] \in R(\varepsilon)$ с условной вероятностью

$$P(u[t_i,\ \omega] = u^{[l]} \mid x[t_i,\ \omega],\ y[t_i,\ \omega]\} = p_l(t_i,\ x[t_i\ \omega],\ y[t_i,\omega],\ \varepsilon)$$

Предполагаем, что помеха стохастически независима от управления на каждом шаге, т. е.

$$P(v[t,\ \omega] \in C \mid x[t_i,\ \omega],\ y[t_i,\ \omega],\ u[t_i,\ \omega]) = P(v[t,\ \omega] \in C \mid x[t_i,\ \omega],\ y[t_i,\ \omega])$$

Назовем гарантированным результатом для U, $\{t_*, x_*\}$, $\{t_*, y_*\}$ и $\beta \in [0, 1)$ величину

$$(1.8)\qquad \rho(U;\ t_*,\ x_*,\ y_*;\ \beta) = \min \alpha$$

где значения α удовлетворяют условию $P(\gamma = |x[\vartheta,\ \omega]| \leqslant \alpha) \geqslant \beta$ при каждой допустимой помехе (1.5).

Гарантированным результатом для стратегии S^u, для $\{t_*, x_*\}$ назовем число

$$\rho(S^u; t_*, x_*) = \lim_{\beta\to 1}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \lim_{\zeta\to 0}\ \sup_{|y_*-x_*|\leqslant\zeta}\ \lim_{\delta\to 0}\ \sup_{\Delta_\delta} \rho(U; t_*, x_*, y_*; \beta)$$

($\Delta_\delta = \Delta\{t_i\}$ — разбиение (1.4) с шагом $\max_i |t_{i+1} - t_i| \leqslant \delta$).

Стратегию S_0^u будем называть оптимальной, если справедливо равенство

$$(1.9)\qquad \rho(S_0^u; t_*, x_*) = \min_{S^u} \rho(S^u; t_*, x_*) = \rho^\circ(t_*, x_*)$$

для всех позиций $\{t_*, x_*\} \in G$, где G — заданная наперед ограниченная замкнутая область, удовлетворяющая условию: при каждой исходной позиции $\{t_*,\ x_*\} \in G$ $\{t_*,\ y_*\} \in G$ для всякого возможного движения $x[t_*[\cdot]\vartheta,\ \omega]$, $y[t_*[\cdot]\vartheta,\ \omega]$ справедливо включение $\{t, x[t,\ \omega]\} \in G$, $\{t, y[t,\ \omega]\} \in G$ при всех $t \in [t_*,\ \vartheta]$, $\omega \in \Omega$ ([5], с. 67). Величина $\rho^\circ(t_*,\ x_*)$ (1.9) — оптимальный гарантированный результат.

Задача состоит в вычислении величины $\rho^\circ(t_*,\ x_*)$ и в построении стратегии S_0^u.

Справедливо утверждение.

Теорема 1.1. Оптимальная универсальная стратегия $S_0^u = \{S_0^u(t,\ x,\ y,\ \varepsilon)\}$ существует.

Это означает, что для любых $\eta > 0$ и $\beta \in [0, 1)$ можно указать $\varepsilon(\eta, \beta) > 0$, $\zeta(\eta, \beta, \varepsilon) > 0$ и $\delta(\eta, \beta, \varepsilon, \zeta) > 0$ так, что для движения $x[t_*[\cdot]\vartheta, \cdot]$, порожденного из позиции $\{t_*,\ x_*\} \in G$ законом управления $U^\circ = \{S_0^u;\ \varepsilon,\ \Delta_\delta\}$ будет выполнено неравенство

$$P(|x[\vartheta, \omega]| \leqslant \rho^\circ(t_*,\ x_*) + \eta) \geqslant \beta$$

если $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta,\ \beta)$, $|y_* - x_*| \leqslant \zeta(\eta,\ \beta,\ \varepsilon)$, $\delta \leqslant \delta(\eta,\ \beta,\ \varepsilon,\ \zeta)$, какова бы ни была помеха (1.5). Величина ρ° — наименьшее число, удовлетворяющее такому условию. Ниже описывается аппроксимация функции $\rho^\circ(t, x)$ основанная на методе стохастического программного синтеза [5], и на этой базе строится стратегия $S_0{}^u$.

2. Близость движений x-объекта и y-модели. Пусть набор $R_\eta = \{u^{[l]} \in R,\ l = 1, \ldots, N\}$ таков, что для любого $u \in R$ найдется $u^{[l]} \in R_\eta$, $|u - u^{[l]}| \leqslant \eta$. Аналогично $W_\eta = \{v^{[m]} \in W,\ m = 1, \ldots, M\}$ — такой набор, что для любого $v \in W$ существует $v^{[m]} \in W_\eta$, $|v - v^{[m]}| \leqslant \eta$. Образуем n-мерный вектор $r = x - y$. Пусть определились позиции $\{\tau_*, x[\tau_*]\} \in G$ и $\{\tau_*, y[\tau_*]\} \in G$. Построим движение $y[t]$ согласно уравнению

$$(2.1)\qquad y^{\cdot}[t] = A(t)y[t] + \sum_{l,m=1}^{N,M} f(t, u^{[l]}, v^{[m]})p_l{}^*q_m{}^*, \quad \tau_* \leqslant t < \tau^*$$

$$u^{[l]} \in R_\eta,\ v^{[m]} \in W_\eta,\ p_l{}^* \geqslant 0,\ q_m{}^* \geqslant 0$$

$$\sum_{l=1}^{N} p_l{}^* = 1, \quad \sum_{m=1}^{M} q_m{}^* = 1, \quad \tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$$

Выберем наборы чисел $\{p_l{}^\circ \geqslant 0,\ l = 1, \ldots, N,$

$$\sum_l p_l{}^\circ = 1\} \text{ и } \{q_m^{*\circ} \geqslant 0,\ \sum_m q_m^{*\circ} = 1\},$$

удовлетворяющие равенствам

$$(2.2)\qquad \max_q \sum_{l,m=1}^{N,M} \langle r[\tau_*]\cdot f(\tau_*, u^{[l]}, v^{[m]})p_l{}^\circ q_m\rangle = \min_p \mathrm{Idem}(p^\circ \to p)$$

$$(2.3)\qquad \min_{p^*} \sum_{l,m=1}^{N,M} \langle r[\tau_*]\cdot f(\tau_*, u^{[l]}, v^{[m]})p_l{}^* q_m^{*\circ}\rangle = \max_{q^*} \mathrm{Idem}(q^{*\circ} \to q^*)$$

где $r[\tau_*] = x[\tau_*] - y[\tau_*]$.

Здесь и далее Idem в правой части равенства означает выражение, совпадающее с левой частью этого равенства при указанной в скобках замене символов; $\langle r\cdot f\rangle$ — скалярное произведение.

Может существовать не единственный набор чисел $\{p_l{}^\circ\}$, $\{q_m{}^{*\circ}\}$, удовлетворяющих условиям (2.2), (2.3) при фиксированных $\{u^{[l]}\}$, $\{v^{[m]}\}$ и $r[\tau_*] = r_*$. Выберем при данных $\{u^{[l]}\}$, $\{v^{[m]}\}$ и r_* один набор $\{p_l{}^\circ\}$ и один набор $\{q_m{}^{*\circ}\}$. Пусть вероятность $P(u = u^{[l]} \in R_\eta)$ равна числу $p_l{}^\circ$ из набора $\{p_1{}^\circ, \ldots, p_N{}^\circ\}$, удовлетворяющего условию (2.2).

Введем функцию

$$\nu(t, x, y) = |x - y|^2 \exp\{-2\lambda(t - t_0)\}$$

$$\lambda = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |A(t)|, \quad |A(t)| = \max_{|x| \leqslant 1} |A(t)x|$$

Лемма 2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\eta(\varepsilon) > 0$, такие что справедливо следующее утверждение.

Пусть $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ удовлетворяет условию $\tau^* - \tau_* \leqslant \delta(\varepsilon)$ и $\eta \leqslant \eta(\varepsilon)$. Движение $y[\tau_*[\cdot]\tau^*] = \{y[t], \tau_* \leqslant t \leqslant \tau^*\}$ начинается из исходной позиции $\{\tau_*, y[\tau_*]\} \in G$ набором $\{W_\eta, q_m{}^{*\circ}\}$ в паре с любым набором $\{u^{[l]}, p_l{}^*\}$. Пусть $x[\tau_*[\cdot]\tau^*, \cdot] = \{x[t, \omega^*], \tau_* \leqslant t \leqslant \tau^*, \omega^* \in \Omega^*\}$ — случайное движение, порожденное по схеме, аналогичной (1.6) при $t_i = \tau_*$, $t_{i+1} = \tau^*$, $x[t_1, \omega^*] = x[\tau_*]$ при выбранном наборе $\{R_\eta, p_l{}^\circ\}$ и при любой допустимой помехе $v[t, \omega^*]$. Тогда справедливо неравенство

$$M\{\nu(t, x[t, \omega^*], y[t])\} \leqslant$$
$$\leqslant \nu(\tau_*, x[\tau_*], y[\tau_*]) + \varepsilon\cdot(t - \tau_*)$$

для всех $t \in [\tau_*, \tau^*]$. Здесь $\{\Omega^*, F^*, P^*\}$ — подходящее вспомогательное вероятностное пространство, $M\{\ldots\}$ — математическое ожидание.

3. Программный экстремум. Рассмотрим w-модель, описываемую дифференциальным уравнением

$$(3.1)\qquad \begin{gathered} w^{\cdot} = A(t)w + \sum_{l,m=1}^{N_*, M_*} f(t, u_*^{[l]}, v_*^{[m]})\, p_{*l} q_{*m} \\ u_*^{[l]} \in R_*, \quad v_*^{[m]} \in W_*, \quad p_{*l} \geqslant 0, \quad q_{*m} \geqslant 0 \\ \sum_l p_{*l} = 1, \quad \sum_m q_{*m} = 1, \quad \tau_* \leqslant t \leqslant \vartheta \end{gathered}$$

В уравнении (3.1) значения N_*, M_* и множества R_*, W_* фиксированы. Зададимся каким-либо натуральным числом k. Назначим разбиение $\Delta\{\tau_j\} = \{\tau_1 = \tau_*, \ldots \tau_j < \tau_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, k, \quad \tau_{k+1} = \vartheta\}$. Свяжем с ним независимые в совокупности случайные величины $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, каждая из которых распределена равномерно на полуинтервале $0 \leqslant \xi_j < 1$. Каждый набор $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ трактуется как элементарное событие ω_* из вероятностного пространства $\{\Omega_*, B_*, P_*\}$, где $\Omega_* = \{\omega_*\}$ — единичный куб в k-мерном пространстве, B_* — борелевская σ-алгебра для этого куба, $P_* = \{P_*(B)\}$ — лебегова мера, $B \in B_*$. Программный экстремум ([5] с. 291) определен равенством

$$(3.2)\qquad \begin{gathered} e(\tau_*, w_*, \Delta\{\tau_j\}) = \sup_{\|l(\cdot)\| \leqslant 1} \Big[\langle m_* \cdot X(\vartheta, \tau_*) w_* \rangle + \\ + M\Big\{ \int_{\tau_*}^{\vartheta} \min_{p_*} \max_{q_*} \Big\langle m(\tau, \omega_*) \cdot X(\vartheta, \tau) \times \\ \times \sum_{l,m=1}^{N_*, M_*} f(\tau, u_*^{[l]}, v_*^{[m]})\, p_{*l} q_{*m} \Big\rangle d\tau \Big\} \Big] \end{gathered}$$

Здесь $l(\cdot) = \{l(\omega_*), \quad \omega_* \in \Omega_*\}$ — векторная n-мерная случайная величина, определенная на $\{\Omega_*, B_*, P_*\}$; $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $w^{\cdot} = A(t)w$. Кроме того, в (3.2)

$$\begin{gathered} \|l(\cdot)\| = (M\{|l(\omega_*)|^2\})^{1/2}, \quad m_* = M\{l(\omega_*)\} \\ m(\tau, \omega_*) = M\{l[\xi_1, \ldots, \xi_k] \mid \xi_1, \ldots, \xi_j\}, \\ \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}) \end{gathered}$$

Введем величину

$$(3.3)\qquad \begin{gathered} \varkappa(\tau_*, m_*) = \sup_{\Delta\{\tau_j\}} \varkappa(\tau_*, m_*, \Delta\{\tau_j\}) = \sup_{\Delta\{\tau_j\}} \sup_{\|b(\cdot)\| \leqslant (1 - |m_*|^2)^{1/2}} M \times \\ \times \Big\{ \int_{\tau_*}^{\vartheta} \min_{p_*} \max_{q_*} \Big\langle (m_* + n(\tau, \omega_*)) \times \\ \times X\Big(\vartheta, \tau \sum_{l,m=1}^{N_*, M_*} f(\tau, u_*^{[l]}, v_*^{[m]}) \cdot p_{*l} q_{*m} \Big\rangle d\tau \Big\} \\ n(\tau, \omega_*) = M\{b[\xi_1, \ldots, \xi_k] \mid \xi_1, \ldots, \xi_j\}, \quad \tau_j \leqslant \tau < \tau_{j+1}. \end{gathered}$$

Опираясь на выражения (3.2), (3.3), сконструируем функцию (штрих означает транспонирование)

$$(3.4)\qquad \begin{gathered} \rho^{\varepsilon}(\tau_*, y_*) = -\beta(\varepsilon, \tau_*)(1 + |X'(\vartheta, \tau_*) m_*^{\circ}(\tau_*, y_*, \varepsilon)|^2)^{1/2} + \\ + \langle m_*^{\circ}(\tau_*, y_*, \varepsilon)' X(\vartheta, \tau_*) y_* \rangle + \varkappa(\tau_*, m_*^{\circ}(\tau_*, y_*, \varepsilon)) = \\ = \max_{|m_*| \leqslant 1} \mathrm{Idem}\,(m_*^{\circ}(\tau_*, y_*, \varepsilon) \to m_*) \\ \beta^2(\varepsilon, \tau_*) = \varepsilon + \varepsilon \exp\{2\lambda(\tau_* - t_0)\} \end{gathered}$$

Используя вогнутость функции $\varkappa(\tau_*, m_*)$ (3.3) по m_*, можно показать, что вектор $m_*^\circ(\tau_*, y_*, \varepsilon)$ (3.4) единственный. Отсюда вытекает, что вектор-функция $m_*^\circ(\tau_*, y_*, \varepsilon)$ непрерывна по τ_* и y_*, а функция $\rho^\varepsilon(\tau_*, y_*)$ (3.4) дифференцируемая по y_*. Поэтому существует вектор-градиент

(3.5) $$\partial\rho^\varepsilon(\tau_*, y_*)/\partial y_* = X'(\vartheta, \tau_*)\, m_*^\circ(\tau_*, y_*, \varepsilon)$$

который непрерывен по τ_* и y_*.

4. Гарантированный результат. Выберем набор величин

$$\{p_l^{*\varepsilon\circ},\ l = 1, \ldots, R^\varepsilon\}$$

удовлетворяющий при данных τ_*, y_* и $\varepsilon > 0$ условию

(4.1) $$\left\langle \frac{\partial\rho^\varepsilon(\tau_*, y_*)}{\partial y_*} \sum_{l, m=1}^{N_\varepsilon, M_\varepsilon} f(\tau_*, u_*^{[l]}, v_*^{[m]})\, p_l^{*\varepsilon\circ} q_m^{*\circ} \right\rangle =$$
$$= \min_{p^*} \max_{q^*} \mathrm{Idem}\,(p^{*\varepsilon\circ} \to p^*,\ q^{*\circ} \to q^*)$$
$$\text{при } p_l^* \geqslant 0,\ q_m^* \geqslant 0,\ \sum_l p_l^* = 1,\ \sum_m q_m^* = 1.$$

Здесь и далее полагаем $u^{[l]} \in R^\varepsilon$, $v^{[m]} \in W^\varepsilon$, где $R^\varepsilon = R_\eta$, $W^\varepsilon = W_\eta$ удовлетворяют условиям леммы 2.1 при данном $\varepsilon > 0$.

Доказывается следующее свойство u-стабильности.

Лемма 4.1. Для любого $\alpha > 0$ можно указать $\varepsilon(\alpha) > 0$ и $\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$, так, что для любых $\{\tau_*, y_*\} \in G$ и $\tau^* > \tau_*$, $|\tau^* - \tau_*| \leqslant \delta(\alpha, \varepsilon)$ набор $\{R^\varepsilon, p_l^{*\varepsilon\circ}\}$ в паре с любым набором $\{W^\varepsilon, q_m^*\}$ породит из позиции $\{\tau_*, y_*\}$ движение $y[\tau_*[\cdot]\tau^*] = \{y[t],\ \tau_* \leqslant t \leqslant \tau^*\}$, для которого справедливо неравенство

$$\rho^\varepsilon(\tau^*, y[\tau^*]) \leqslant \rho^\varepsilon(\tau_*, y_*) + \alpha\cdot(\tau^* - \tau_*)$$

если только $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\alpha)$, $\delta \leqslant \delta(\alpha, \varepsilon)$.

Отсюда выводится, что для любого $\zeta^* > 0$ можно указать $\varepsilon(\zeta^*) > 0$ и $\delta(\zeta^*, \varepsilon) > 0$ так, что если разбиение (1.4) удовлетворяет условию $\max_i |t_{i+1} - t_i| \leqslant \delta(\zeta^*, \varepsilon)$ и движение $y[t_*[\cdot]\vartheta, \omega]$ строится по шагам $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ так, что $\{p_l^{*\varepsilon\circ}\}$ выбираются из условий леммы 4.1, а $\{q_m^*\}$ — как угодно, то справедлива оценка

$$|y[\vartheta, \omega]| \leqslant \rho^\varepsilon(t_*, y_*) + \zeta^*$$

если только $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta^*)$.

Построим стратегию $S_e^u = \{R_e(\cdot),\ p_e(\cdot);\ R_e^*(\cdot),\ p_e^*(\cdot);\ W_e^*(\cdot),\ q_e^*(\cdot)\}$ (1.4), которую назовем экстремальной. Будем использовать движение y-модели $y[t_*[\cdot]\vartheta, \omega]$ как поводырь для движения x-объекта. Пусть $R_e(\cdot)$, $p_e(\cdot)$ — правило, которое возможным значениям t°, x°, y° и $\varepsilon^\circ > 0$ ставит в соответствие наборы $\{u^{[l]}, p_l^\circ, l = 1, \ldots, N_\varepsilon\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2.1 при $\tau_* = t^\circ$, $x[\tau_*] = x^\circ$, $y[\tau_*] = y^\circ$, $\varepsilon = \varepsilon^\circ$. Далее, пусть $W_e^*(\cdot)$, $q_e^*(\cdot)$ — правило, которое назначает наборы $\{v^{[m]}, q_m^{*\circ}, m = 1, \ldots, M_\varepsilon\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2.1. Наконец, $R_e^*(\cdot)$, $p_e^*(\cdot)$ — правило, которое назначает $\{u^{[l]}, p_e^{*\varepsilon\circ}, l = 1, \ldots, N_\varepsilon\}$, удовлетворяющие условию (4.1). При этом доказывается, что функции $p_e(\cdot)$, $p_e^*(\cdot)$, $q_e^*(\cdot)$ можно выбрать измеримыми по x, y.

Для движений $x[t_*[\cdot]\vartheta, \cdot]$ и $y[t_*[\cdot]\vartheta, \cdot]$, которые формируются стратегией S_e^u по схеме (1.6), (1.7) на каждом шаге $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, справедливо неравенство

(4.2) $$M\{\nu(t_{i+1}, x[t_{i+1}, \omega], y[t_{i+1}, \omega]) \mid x[t_i, \omega], y[t_i, \omega]\} \leqslant$$
$$\leqslant \nu(t_i, x[t_i, \omega], y[t_i, \omega]) + \varepsilon\cdot(t_{i+1} - t_i)$$

где $M\{\cdots \mid \cdots\}$ — условное математическое ожидание. По формуле повторных математических ожиданий ([9], с. 55) получим, согласно (4.2)

$$M\{\nu(t_{i+1}, x[t_{i+1}, \omega], y[t_{i+1}, \omega])\} \leqslant \mathrm{Idem}(t_{i+1} \to t_i) + \varepsilon \cdot (t_{i+1} - t_i) \tag{4.3}$$

Из (4.3) с использованием неравенства Чебышева ([9], с. 51) выводится следующее утверждение.

При данной исходной позиции $\{t_*, x_*\} \in G$ для любых $\eta > 0$ и $\beta \in [0, 1)$ можно указать $\varepsilon(\eta, \beta) > 0$, $\zeta(\eta, \beta, \varepsilon) > 0$ и $\delta(\eta, \beta, \varepsilon, \zeta) > 0$ так, что для всякого движения $x[t_*[\cdot]\vartheta, \cdot]$, сформировавшегося из позиции $\{t_*, x_*\}$ указанным выше способом при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta, \beta)$, $|y_* - x_*| \leqslant \zeta(\eta, \beta, \varepsilon)$ и при разбиении Δ_δ, удовлетворяющем условию $\max_i |t_{i+1} - t_i| \leqslant \delta(\eta, \beta, \varepsilon, \zeta)$, будет справедлива оценка

$$P(|x[\vartheta, \omega]| \leqslant \rho^\varepsilon(t_*, x_*) + \eta) > \beta \tag{4.4}$$

какова бы ни была помеха (1.5).

Пусть $U_e = \{S_e^u; \varepsilon; \Delta_\delta\}$ — закон (1.3), отвечающий стратегии S_e^u. Тогда в соответствии с (4.4) гарантированный результат $\rho(U_e)$ (1.8) удовлетворяет неравенству

$$\rho(U_e; t_*, x_*, y_*; \beta) \leqslant \rho^\varepsilon(t_*, x_*) + \eta^* \tag{4.5}$$

если только $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta^*, \beta)$, $\delta \leqslant \delta(\eta^*, \beta, \varepsilon, \zeta)$ и $|y_* - x_*| \leqslant \zeta(\eta^*, \beta, \varepsilon)$.

5. Оптимальный гарантированный результат. Рассмотрим z-модель, описываемую уравнением, аналогичным (2.1) при замене y на z. Можно доказать лемму, подобную лемме 2.1 о близости движений x-объекта и z-модели, где для объекта выбираются наборы $\{W_\eta, q_m^\circ\}$, а для модели — наборы $\{R_\eta, p_l^{*\circ}\}$. Справедливо свойство v-стабильности функции $\rho_\varepsilon(\tau, \{w_1, \ldots, w_n\}) = e(\tau, \{w_1, \ldots, w_n\}, \Delta\{\tau_j\})$.

Лемма 5.1. Для любого $\alpha > 0$ можно указать $\varepsilon(\alpha) > 0$ и $\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ так, что для любых $\{\tau_*, w_*\}$, $\tau^* > \tau_*$, $|\tau^* - \tau_*| \leqslant \delta(\alpha, \varepsilon)$ и набора $\{p_{*l}\}$ найдется набор $\{\overset{\circ}{q}_{*m}\}$, который в паре с $\{p_{*l}\}$ породит из позиции $\{\tau_*, w_*\}$ такую позицию $\{\tau^*, w[\tau^*] = w^*\}$, что будет справедливо неравенство

$$\rho_\varepsilon(\tau^*, \{w_1^*, \ldots, \overset{*}{w}_{n+1}\}) \geqslant \rho_\varepsilon(\tau_*, \{w_{1*}, \ldots, w_{n+1*}\}) - \alpha \cdot (\tau^* - \tau_*)$$

если только $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\alpha)$, $\delta \leqslant \delta(\alpha, \varepsilon)$

Используя движение z-модели как поводырь для движения x-объекта, можно определить подходящий закон формирования помехи V_e для объекта так, что будет справедливо утверждение. Для любого движения $x[t_*[\cdot]\vartheta, \cdot]$, порожденного из позиции $\{t_*, x_*\} \in G$ каким угодно законом U (по схеме (1.6)) и законом V_e с соответственно частым разбиением (1.4), будет верна оценка

$$P(|x[\vartheta, \omega]| \geqslant \rho_\varepsilon(t_*, x_*) - \eta_*) > \beta \tag{5.1}$$

при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta_*, \beta)$, $\delta \leqslant \delta(\eta_*, \beta, \varepsilon)$.

Справедливо неравенство

$$|\rho^\varepsilon(t_*, x_*) - \rho_\varepsilon(t_*, x_*)| \leqslant \psi(\varepsilon) \tag{5.2}$$

($\lim \psi(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon \to 0$)

С учетом (4.5) и (5.2) получаем, что справедлива оценка

$$\rho(U_e; t_*, x_*, y_*; \beta) \leqslant \rho_\varepsilon(t_*, x_*) + \chi$$

при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\chi, \beta)$, $\delta \leqslant \delta(\chi, \beta, \varepsilon)$.

В то же время, согласно (5.1), никакой допустимый закон U (1.3) не может гарантировать неравенство

$$\rho(U; t_*, x_*, y_*; \beta) < \rho_\varepsilon(t_*, x_*) - \alpha$$

при значениях β, близких к единице, $\alpha > 0$.

Из приведенных оценок выводится, что справедливо неравенство

$$\rho^*(t_*, x_*) = \lim_{\varepsilon \to 0} \rho^\varepsilon(t_*, x_*) \tag{5.3}$$

и верно следующее утверждение.

Теорема 5.1. Величина ρ^* (t_*, x_*) (5.3) — оптимальный гарантированный результат ρ° (t_*, x_*) (1.9) для любой позиции $\{t_*, x_*\} \in G$. Стратегия S_e^u — оптимальная стратегия S_e^u (1.9).

В заключение заметим, что для вычисления величины $\varkappa$ $(\tau_*, m_*, \Delta\{\tau_j\})$ (3.3) можно использовать следующую процедуру, которая вытекает прямо из определения этой величины. Вычисляем функцию

$$\psi_k(m_*) = I(\tau_k, \vartheta) = \int_{\tau_k}^{\vartheta} \min_{p*} \max_{q*} < m_* X(\vartheta, \tau) \sum_{l,\, m=1}^{N_*,\, M_*} f(\tau, u_*^{[l]}, v_*^{[m]}) \times$$
$$\times\, p_{*l} q_{*m} > d\tau$$

Пусть функция $\varphi_k(m_*)$ — верхняя вогнутая оболочка для $\psi_k(m_*)$ при $|m_*| \leqslant 1$. Дальнейшие построения функций $\varphi_i(m_*)$ $(i = k - 1, k - 2, \ldots, 1)$ осуществляются по шагам. Пусть функция $\varphi_i(m_*)$ $(i = k, \ldots, 2)$ уже построена. Вычисляем функцию

$$\psi_{i-1}(m_*) = \varphi_i(m_*) + I(\tau_{i-1}, \tau_i)$$

Функция $\varphi_{i-1}(m_*)$ конструируется как верхняя вогнутая оболочка для $\psi_{i-1}(m_*)$ при $|m_*| \leqslant 1$. Функция $\varphi_1(m_*)$ равна величине $\varkappa$ $(\tau_*, m_*, \Delta\{\tau_j\})$. Описанная процедура сводится к последовательности задач из выпуклого программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. *Осипов Ю. С.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре.— Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 5, с. 1022—1025.
5. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
6. *Третьяков В. Е.* Программный синтез в стохастической дифференциальной игре.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 2, с. 297—300.
7. *Красовский А. Н.* Нелинейная дифференциальная игра с интегральной платой.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1306—1312.
8. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
9. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971. 286 с.

Свердловск

Поступила в редакцию 15.X.1985