Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 2, 1987

УДК 62-50

ОДНОТИПНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИГРА СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Ухоботов В. И.

Рассматривается игра, в которой на выбор управления первого игрока наложено геометрическое и интегральное ограничения. Второй игрок распоряжается выбором управления, стесненным геометрическим ограничением. Игра оканчивается в заданный момент времени. Множества значений управлений и терминальное множество обладают свойством однотипности. Найдены условия окончания игры из заданной начальной позиции. Построены управления игроков. Рассмотрен пример.

Дифференциальные игры со смешанными ограничениями рассматривались в работах [1, 2]. Исследуемые однотипные игры могут не удовлетворять условию регулярности [2, 3].

1. Линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания линейной заменой переменных может быть сведена [3] к игре с простым движением.

Рассмотрим игру, уравнения движения которой имеют вид

$$z^{\cdot} = -\alpha(t)u + \beta(t)v, \quad z \in R^n \tag{1.1}$$
$$\nu^{\cdot} = -|u|, \quad |u| \leqslant \gamma, \quad |v| \leqslant 1, \quad \gamma > 0$$

Здесь $|x|$ — норма вектора $x \in R^n$, α и β — непрерывные неотрицательные функции при $t \leqslant p$, где p — момент окончания игры. Второе уравнение в (1.1) характеризует закон изменения ресурсов, которые тратятся на формирование управления u. На выбор этого управления накладывается ограничение $\nu \geqslant 0$.

В фазовом пространстве игры $Z = \{(z, \nu): z \in R^n, \nu \geqslant 0\}$ задано терминальное множество

$$X = \{(z, \nu): |z| \leqslant \varphi(\nu), \nu \geqslant \delta\}, \quad \delta \geqslant 0 \tag{1.2}$$

Так, например, если условия окончания игры задаются условием $|z(p)| \leqslant a$, то $\varphi(\nu) = a$ и $\delta = 0$.

Предполагаем, что непрерывная функция φ неотрицательна и не убывает при $\nu \geqslant \delta$.

Запишем оператор программного поглощения [4] для терминального множества (1.2). Позиция $(z, \nu) \in Z$ принадлежит множеству $T_\tau^p(X)$ тогда и только тогда, когда для любого измеримого на отрезке $[\tau, p]$ управления $|v(t)| \leqslant 1$ существует измеримое при $\tau \leqslant t \leqslant p$ управление $|u(t)| \leqslant \gamma$, такое, что

$$\left|z + \int_\tau^p (-\alpha(t)u(t) + \beta(t)v(t))\,dt\right| \leqslant \varphi(\nu(p)), \tag{1.3}$$
$$\nu(p) = \nu - \int_\tau^p |u(r)|\,dr \geqslant \delta$$

Обозначим при $\nu \geqslant 0$

$$f(p, \tau, \nu) = \max \int_\tau^p \alpha(t)w(t)\,dt, \quad \int_\tau^p w(t)\,dt \leqslant \nu, \quad 0 \leqslant w(t) \leqslant \gamma \tag{1.4}$$

Тогда из (1.3) можно получить

$$T_\tau^p(X) = \{(z, \nu): |z| \leqslant \psi(\tau, \nu), \ \nu \geqslant \delta\} \tag{1.5}$$

$$\psi(\tau, \nu) = \max(\varphi(\nu - \mu) + f(p, \tau, \mu)) - \int_\tau^p \beta(t)\,dt, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \nu - \delta \tag{1.6}$$

Максимум по μ в (1.6) достигается, так как функция (1.4) непрерывна по ν. В самом деле, рассматривая задачу (1.4) как проблему моментов, получим [5]

$$f(p, \tau, \nu) = \max_I \int_I \gamma\alpha(t)\,dt, \quad \sigma(I) = \min(p - \tau, \nu/\gamma) \tag{1.7}$$

Здесь $\sigma(I)$ — мера множества $I \subset [\tau, p]$. Из формулы (1.7), следует, что при $0 \leqslant \nu_2 < \nu_1$

$$0 \leqslant f(p, \tau, \nu_1) - f(p, \tau, \nu_2) \leqslant (\nu_1 - \nu_2) \max_t \alpha(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant p \tag{1.8}$$

Возьмем начальную точку (z, ν), $\nu \geqslant \delta$, не принадлежащую множеству (1.5). Построим управление второго игрока, гарантирующее непопадание в момент времени p на множество (1.2).

Положим

$$v(t) = z/|z|, \quad z \neq 0; \quad |v(t)| = 1, \quad z = 0 \tag{1.9}$$

Тогда, как следует из уравнения движения (1.1), при любом управлении $|u(t)| \leqslant \gamma$ и любом $t_1 > \tau$

$$|z(t_1)| \geqslant |z| + \int_\tau^{t_1} \beta(t)\,dt - \int_\tau^{t_1} \alpha(t)\,|u(t)|\,dt \tag{1.10}$$

Отсюда, используя неравенство $|z| > \psi(\tau, \nu)$ и определение функции (1.4), получим $|z(p)| > \varphi(\nu(p))$.

2. Рассмотрим вопрос о возможности перевода позиции в момент времени p на множество (1.2) из начального состояния, принадлежащего множеству (1.5).

Стратегию [3] первого игрока ищем в виде

$$u(t, z) = w(t)\,U(z), \quad 0 \leqslant w(t) \leqslant \gamma \tag{2.1}$$
$$U(0) = \{z: |z| \leqslant 1\}; \quad U(z) = z/|z|, \quad z \neq 0$$

Для начального условия $z(\tau) = z$, $\nu(\tau) = \nu$ и любых измеримых на отрезке $[\tau, p]$ функций $0 \leqslant w(t) \leqslant \gamma$ и $|v(t)| \leqslant 1$ под движением $z(t)$, $\nu(t)$ понимаем любое решение дифференциального включения

$$z^\cdot(t) \in -\alpha(t)\,w(t)\,U(z(t)) + \beta(t)\,v(t); \quad z(\tau) = z \tag{2.2}$$
$$\nu^\cdot(t) = -w(t), \quad z(t) \neq 0; \quad \nu^\cdot(t) \in [-w(t), 0], \ z(t) = 0,$$
$$\nu(\tau) = \nu$$

При каждых z, $\tau \leqslant t \leqslant p$ правая часть включения (2.2) — выпуклый компакт, полунепрерывно сверху зависит от z и измеримо зависит от t. Поэтому [6] решение $z(t)$, $\nu(t)$ включения (2.2) существует на отрезке $[\tau, p]$.

Стратегия (2.1) будет гарантировать попадение на терминальное множество (1.2) в момент p из начального состояния z, ν, τ, если для любого управления $|v(t)| \leqslant 1$ и любого решения включения (2.2) выполнено условие $(z(p), \nu(p)) \in X$. Учитывая монотонность функции φ, условие окончания запишем в виде

$$|z(p)| \leqslant \varphi(\nu_p), \quad \nu_p = \nu - \int_\tau^p w(t)\,dt \leqslant \nu(p) \tag{2.3}$$

Пусть абсолютно непрерывная функция $z(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant p$ — решение включения (2.1). Так как функция $|z|$ удовлетворяет условию Липшица, то норма $|z(t)|$ — также абсолютно непрерывная функция. Поэтому производная $|z(t)|^{\cdot}$ существует почти всюду и [6]

$$(2.4)\qquad |z(t)|^{\cdot} = \lim h^{-1}(|z(t) + hz^{\cdot}(t)| - |z(t)|), \quad h \to 0, \quad h > 0$$

Множество точек $\tau \leqslant t \leqslant p$, где $|z(t)| = 0$ и $|z(t)|^{\cdot} = 0$, не более чем счетно. Поэтому все точки $t \in [\tau, p]$, в которых существуют производные $z^{\cdot}(t)$ и $|z(t)|^{\cdot}$, можно разбить на два класса

$$(2.5)\qquad I_1 = \{t\colon |z(t)| > 0\},\ I_2 = \{t\colon |z(t)| = 0,\ |z(t)|^{\cdot} = 0\}$$

Мера объединения множеств (2.5) равняется мере отрезка $[\tau, p]$. Из формулы (2.4) следует, что для любого решения включения (2.1) выполнено неравенство

$$(2.6)\qquad |z(t)|^{\cdot} \leqslant -\alpha(t)\, w(t) + \beta(t), \quad t \in I_1$$

Возьмем измеримую функцию $0 \leqslant w(t) \leqslant \gamma$ при $\tau \leqslant t \leqslant p$ и число a. Обозначим

$$(2.7)\qquad F(t, z) = |z| - a(t), \quad a(t) = \int_t^p (\alpha(r)\, w(r) - \beta(r))\, dr + a$$

При выбранном управлении $v(t)$ рассмотрим решение $z(t)$ первого включения (2.2).

Лемма 1. Пусть $a(t) \geqslant 0$ при $\tau \leqslant t \leqslant p$ и $F(\tau, z) \leqslant 0$. Тогда при всех $\tau \leqslant t \leqslant p$

$$(2.8)\qquad F(t, z(t)) \leqslant 0$$

Доказательство. Функция F (2.7) удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных. Поэтому функция $F(t, z(t)) = f(t)$ абсолютно непрерывна. Из формул (2.5), (2.6), (2.7) следует, что

$$(2.9)\qquad f^{\cdot}(t) \leqslant 0,\ |z(t)| > 0;\ f^{\cdot}(t) = \alpha(t)\, w(t) - \beta(t), \quad |z(t)| = 0$$

Из условия $a(t) \geqslant 0$ следует, что если $|z(t)| = 0$, то неравенство (2.8) выполнено.

Пусть $|z(t)| > 0$. Тогда из условия $F(\tau, z) \leqslant 0$ вытекает, что существует число $t_0 > t$, что $f(t_0) \leqslant 0$ и $|z(r)| > 0$ при $t_0 < r \leqslant t$. Отсюда и из (2.9) получаем неравенство (2.8).

Из (1.7) следует, что если функция α убывает при $\tau \leqslant t \leqslant p$, то формула (1.6) примет вид

$$(2.10)\qquad \psi(\tau, \nu) = \max_s \Big(\varphi(\nu - \gamma(s - \tau)) + \gamma \int_\tau^s \alpha(r)\, dr\Big) - \int_\tau^p \beta(r)\, dr$$
$$\tau \leqslant s \leqslant \min(p;\ \tau + (\nu - \delta)/\gamma)$$

Пусть максимальное значение в (2.10) достигается при s_1. Обозначим

$$(2.11)\qquad M(\tau, \nu) = \varphi(\nu - \gamma(s_1 - \tau)) - \int_{s_1}^p \beta(r)\, dr$$

Теорема 1. Пусть $|z| \leqslant \psi(\tau, \nu)$ и выполнено при $\tau \leqslant t \leqslant p$ одно из условий

$$(2.12)\qquad \beta(t) = \gamma\alpha(t)$$

$$(2.13)\qquad \varphi(\delta) \geqslant \int_t^p \beta(r)\, dr$$

$$(2.14)\qquad \gamma\alpha(t) \geqslant \beta(t);\quad t_1 < t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) \leqslant \alpha(t_2)$$

$$(2.15)\qquad \gamma\alpha(t) \geqslant \beta(t);\quad t_1 < t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) > \alpha(t_2);\quad M(\tau, \nu) \geqslant 0$$

Тогда существует измеримая при $\tau \leqslant t \leqslant p$ функция $0 \leqslant w(t) \leqslant \gamma$, такая, что при любом измеримом управлении $|v(t)| \leqslant 1$ любое решение включения (2.2) удовлетворяет условию (2.3).

Доказательство. Из (1.6) следует, что существует число $0 \leqslant \mu \leqslant \nu - \delta$, при котором

$$(2.16) \qquad |z| \leqslant f(p, \tau, \mu) - \int_\tau^p \beta(r)\,dr + a, \quad a = \varphi(\nu - \mu)$$

Возьмем в качестве $w(t)$ во включении (2.2) и в определении функции (2.7) решение задачи (1.4) с $\nu = \mu$. Тогда, как следует из (2.16), $F(\tau, z) \leqslant 0$ и $a(\tau) \geqslant 0$. Если покажем, что $a(t) \geqslant 0$ при $\tau \leqslant t \leqslant p$, то будет выполнено неравенство (2.8) при $t = p$. Это неравенство, как следует из (2.7) и определения числа a (2.16), принимает вид (2.3).

Пусть выполнено условие (2.12). Тогда функция (2.7) $a(t) \geqslant a(\tau) \geqslant 0$ при $\tau \leqslant t$.

Если выполнено неравенство (2.13), то, как следует из вида числа a (2.16) и неубывания функции φ, функция (2.7) $a(t) \geqslant 0$ при $\tau \leqslant t$.

Пусть выполнено условие (2.14). Тогда, как следует из (1.4), $w(t) = 0$ при $\tau \leqslant t \leqslant t_0$ и $w(t) = \gamma$ при $t_0 \leqslant t \leqslant p$, где $t_0 = \max(\tau;\ p - \mu/\gamma)$. Стало быть, $a^\cdot(t) = \beta(t) \geqslant 0$ при $\tau \leqslant t \leqslant t_0$ и $a^\cdot(t) = -\gamma\alpha(t) + \beta(t) \leqslant 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant p$. Отсюда и из условия $a(\tau) \geqslant 0$, $a(p) \geqslant 0$ следует, что $a(t) \geqslant 0$ при $\tau \leqslant t \leqslant p$.

Пусть выполнено условие (2.15) и максимум в (2.10) достигается в точке s_1. Тогда $w(t) = \gamma$ при $\tau \leqslant t \leqslant s_1$ и $w(t) = 0$ при $s_1 \leqslant t \leqslant p$. Стало быть, $a^\cdot(t) = -\gamma\alpha(t) + \beta(t) \leqslant 0$ при $t \leqslant s_1$ и $a^\cdot(t) = \beta(t) \geqslant 0$ при $s_1 < t$. Поэтому минимальное значение равно $a(s_1) = M(\tau, \nu) \geqslant 0$.

Лемма 2. Пусть выполнено первое условие (2.15) и $\nu \geqslant \delta + \gamma(p - \tau)$. Тогда $M(\tau, \nu) \geqslant 0$.

Доказательство. Число (2.10) не меньше значения правой части (2.7) при $s = p$. Отсюда, используя первое условие (2.15) и неотрицательность функции φ, получим

$$\varphi(\nu - \gamma(s_1 - \tau)) \geqslant \gamma \int_{s_1}^p \alpha(r)\,dr \geqslant \int_{s_1}^p \beta(r)\,dr$$

3. Рассмотрим случай, когда

$$(3.1) \qquad \nu < \delta + \gamma(p - \tau)$$

Считаем, что при $\tau \leqslant t \leqslant p$ выполнены два первых условия (2.15) и

$$(3.2) \qquad \varphi(\mu) \leqslant \alpha(p)(\mu - \delta), \quad \delta \leqslant \mu < \delta + \gamma(p - \tau)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$(3.3) \qquad B(t, s) = \gamma(s - t) + \int_s^p \frac{\beta(r)}{\alpha(r)}\,dr, \quad t \leqslant s$$

Лемма 3. Пусть начальная позиция z, ν такова, что

$$(3.4) \qquad |z| > \alpha(\tau)(\nu - B(\tau, \tau) - \delta)$$

Тогда второй игрок, делая конечное число коррекций управления, сможет не допустить попадание в момент времени p на множество (1.2).

Доказательство. Из неравенства (3.4) следует существование чисел $\tau = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = p$, таких, что

$$(3.5) \qquad |z| > \alpha(t_0)\left(\nu - \sum_{i=0}^k A_i - \delta\right), \quad A_i = \frac{1}{\alpha(t_i)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta(r)\,dr$$

Второй игрок берет при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1'$ управление (1.9). Тогда, как следует из (1.10) и условия монотонности (2.15) функции α, при любом управлении $|u(t)| \leqslant \gamma$ первого игрока

$$|z(t_1)| > \alpha(t_1)\left(\nu(t_1) - \sum_{i=1}^{k} A_i - \delta\right)$$

По вектору $z(t_1)$ второй игрок строит управление (1.9) при $t_1 < t \leqslant t_2$ и т. д.

В момент окончания $t_{k+1} = p$ будет выполнено неравенство $|z(p)| > \alpha(p)\cdot(\nu(p) - \delta)$. Отсюда, используя неравенство (3.2), получим, что позиция $z(p)$, $\nu(p)$ не принадлежит множеству (1.2).

В силу доказанной леммы нужно рассматривать случай

$$\nu \geqslant \delta + \int_{\tau}^{p} \frac{\beta(r)}{\alpha(r)}\, dr = \delta + B(\tau, \tau) \tag{3.6}$$

Согласно первому условию (2.15), производная функции (3.3) по переменной s неотрицательна, т. е. эта функция не убывает по s. Следовательно, для каждого ν, удовлетворяющего неравенствам (3.1) и (3.6), определено число

$$s(\nu) = \max\{s\colon \tau \leqslant s \leqslant p,\ \nu = \delta + B(\tau, s)\} \tag{3.7}$$

Положим

$$\psi_1(t, \nu) = \int_{\tau}^{s(\nu)} (\gamma\alpha(r) - \beta(r))\, dr \tag{3.8}$$

Теорема 2. Пусть начальная позиция z, ν удовлетворяет условию $|z| \leqslant \psi_1(\tau, \nu)$. Тогда существует измеримая при $\tau \leqslant t \leqslant p$ функция $0 \leqslant w(t) \leqslant \gamma$, такая, что при любом измеримом управлении $|v(t)| \leqslant 1$ любое решение включения (2.2) удовлетворяет условию (2.3).

Доказательство. Положим

$$w(t) = \gamma, \quad \tau \leqslant t \leqslant s(\nu); \quad w(t) = \beta(t)/\alpha(t), \quad s(\nu) < t \leqslant p \tag{3.9}$$

Тогда, согласно (3.8), $|z| \leqslant a(\tau)$, где $a(t)$ задается формулой (2.7), с $a = 0$. Из первого условия (2.15) следует, что для функции (3.9) $a(t) \geqslant 0$ при $\tau \leqslant t \leqslant p$. На основании леммы 1 получим $|z(p)| = 0$. Для функции (3.9) число (2.3) $\nu_p = \delta$. Отсюда и из неравенства $\varphi(\delta) \geqslant 0$ следует условие (2.3).

Теорема 3. Пусть начальная позиция z, ν удовлетворяет условию $|z| > \psi_1(\tau, \nu)$. Тогда второй игрок, делая конечное число коррекций управления, сможет не допустить попадание в момент времени p на множество (1.2).

Доказательство. Если в (3.6) стоит равенство, то начальная позиция удовлетворяет условию (3.4).

Пусть в (3.6) стоит строгое неравенство. Тогда $\tau < s < p$, где обозначено $s = s(\nu)$. Второй игрок берет управление (1.9) при $\tau \leqslant t \leqslant s$. Из (1.10) и условия монотонности функции α получим, что при любом допустимом управлении первого игрока $|z(s)| > \alpha(s)(\gamma(s - \tau) - \nu + \nu(s))$. Отсюда и из вида числа s (3.7) следует неравенство $|z(s)| > \alpha(s)\cdot(\nu(s) - B(s, s) - \delta)$. Согласно лемме 3, второй игрок, продолжая игру из точки $z(s)$, $\nu(s)$, сможет не допустить попадание в момент времени p на множество (1.2).

Вычислим функцию (2.10) в предположении, что $\varphi(\delta) = 0$ и

$$\varphi(\nu_1) - \varphi(\nu_2) \leqslant \alpha(p)(\nu_1 - \nu_2), \quad \delta \leqslant \nu_2 < \nu_1 \tag{3.10}$$

Тогда выполнено неравенство (3.2). Обозначим $\varepsilon(s)$ функцию, максимальное значение которой вычисляется в (2.10). Тогда из (3.10) и (2.15) следует, что при $s_1 < s_2$

$$\varepsilon(s_1) - \varepsilon(s_2) \leqslant \alpha(p)(s_2 - s_1)\gamma - \gamma \int_{s_1}^{s_1} \alpha(r)\,dr \leqslant 0$$

Поэтому при $\nu < \delta + \gamma(p - \tau)$

$$\psi(\tau, \nu) = \gamma \int_{\tau}^{\theta} \alpha(r)\,dr - \int_{\tau}^{\theta} \beta(r)\,dr, \quad \theta = \tau + \frac{\nu - \delta}{\gamma} \tag{3.11}$$

Из (3.7) следует, что

$$\theta = s + \int_{s}^{p} \frac{\beta(r)}{\alpha(r)}\,dr, \quad s = s(\nu)$$

Отсюда можно получить, что функции (3.8) и (3.11) удовлетворяют неравенству $\psi_1(\tau, \nu) < \psi(\tau, \nu)$. Следовательно, в рассматриваемом случае семейство множеств $W(\tau) = T_\tau^p(X)$ не является стабильным мостом [3], ведущим на цель (1.2).

4. *Пример*. Рассмотрим задачу о встрече ($|x(q) - y(q)| \leqslant a$) в заданный момент времени q точки, движущейся с ограниченной по величине скоростью $|y^{\cdot}| \leqslant \beta$, с точкой переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского [5] $x^{\cdot\cdot} = b + wm^{\cdot}(t)/m(t)$. Здесь b — постоянный вектор, характеризующий внешнюю силу; $m(t) = m_0 + m_1(t)$ — масса, причем m_0 — неизменяемая часть массы, а $m_1(t)$ — реактивная масса; w — относительная скорость отделяющихся частиц, величину $|w|$ которой считаем постоянной.

Обозначим

$$\begin{aligned} &z = y - x - (q - t)x^{\cdot} + b(q - t)^2/2, \quad v = y^{\cdot}/\beta \\ &u = -wm^{\cdot}(t)/m(t), \quad \nu(t) = |w| \ln(m(t)/m_0) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Тогда условие встречи и уравнения движения примут вид

$$|z(q)| \leqslant a; \quad z^{\cdot} = -(q - t)u + \beta v, \quad |v| \leqslant 1, \quad \nu^{\cdot} = -|u| \tag{4.2}$$

Неравенство $\nu(t) \geqslant 0$ означает условие неотрицательности реактивной массы. Считаем, что тяга ограничена: $|u| \leqslant \gamma$.

Первый игрок, выбирая управление u, стремится осуществить встречу. Цель второго игрока, который выбирает управление v, противоположна.

В этой игре функции $\alpha(t) = q - t$, $\beta(t) = \beta$, а в терминальном множестве (1.2) $\varphi(\nu) = a$, $\delta = 0$.

Запишем функцию (2.10)

$$\begin{aligned} &\psi(\tau, \nu) = \gamma(c(\tau) - (q - r)^2)/2 \\ &c(\tau) = (q - \tau)^2 - 2(\beta(q - \tau) + a)/\gamma, \quad r = \min(q; \tau + \nu/\gamma) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Обозначим

$$l = \gamma \max(a/\beta; \beta/\gamma), \quad p = q - l/\gamma \tag{4.4}$$

Тогда при $p \leqslant t \leqslant q$ выполнено условие (2.12) либо условие (2.13). Стало быть, для начальных моментов времени $\tau \in [p, q]$ применима теорема 1. Функция $w(t)$ в (2.2), гарантирующая встречу, такова: $w(t) = \gamma$ при $\tau \leqslant t \leqslant r$ и $w(t) = 0$, $t > r$. Отсюда из (4.1) и (2.1) получим вид относительной скорости и закон изменения массы

$$w = -|w|(z/|z|), \quad m(t) = m(\tau)\exp(-\gamma(t - \tau)/|w|) \tag{4.5}$$

Рассмотрим случай $a < \beta^2/(2\gamma)$. Тогда $\psi(\tau, \nu) < 0$ при всех $\nu > 0$ и $p \leqslant \tau < \tau(a) = q - (\beta - (\beta^2 - 2a\gamma)^{1/2})/\gamma$. Множество (1.5) при этих τ пусто. Поэтому [7] для начального момента времени $\tau < \tau(a)$ и любого начального положения существует стратегия второго игрока, такая, что первый игрок не сможет осуществить встречу.

Пусть $a \geqslant \beta^2/(2\gamma)$. Тогда $c(\tau) \geqslant 0$ при всех τ и множество (1.5) не пусто при $p \leqslant \tau \leqslant q$.

Чтобы записать условие окончания игры, которая начинается в начальный момент времени $\tau < p$, нужно рассмотреть задачу попадания в момент времени p на терминальное множество (1.2) с функцией $\varphi(\nu) = \psi(p, \nu)$. Из (4.3) и (4.4) имеем

$$\varphi(\nu) = (l - \delta)^2/(2\gamma) - (\max(0; l - \nu))^2/(2\gamma)$$
$$\nu \geqslant \delta = l - (l^2 - 2\beta l + 2a\gamma)^{1/2}$$

Производная функции φ ограничена числом $l/\gamma = \alpha(p)$. Стало быть, выполнены условия (3.10).

Согласно лемме 2 и теореме 1, при $\nu \geqslant \delta + (p - \tau)\gamma = \delta + (q - \tau)\gamma - l$ гарантирующее встречу управление задается формулами (4.5).

Пусть выполнены неравенства (3.1) и (3.6), т. е.

$$\delta + \beta \ln\left((q - \tau)\frac{\gamma}{l}\right) \leqslant \nu < \delta + (q - \tau)\gamma - l$$

Запишем уравнение для определения числа s (3.7)

$$\nu = \delta + (s - \tau)\gamma + \beta \ln((q - s)\gamma/l)$$

Тогда из (3.9) получим, что закон изменения массы имеет вид (4.5) при $\tau \leqslant t \leqslant s$ и при $s \leqslant t \leqslant p$

$$m(t) = m(s)((q - t)/(q - s))^k, \quad k = \beta / |w|$$

Зная условия встречи при любом $a \geqslant 0$, можно найти [4] цену игры, когда платой служит расстояние $|z(q)|$. В рассмотренном примере множество $T_t^q(X)$ не является стабильным мостом. Это приводит к тому, что не для всех начальных позиций возможно окончание игры за первый момент поглощения [8], а цена игры не совпадает с программным максимином.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пожарицкий Г. К.* Интегральные ограничения управлений в игре сближения.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3, с. 401—412.
2. *Ледяев Ю. С.* Регулярные дифференциальные игры со смешанными ограничениями на управления.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1985, т. 167, с. 207—215.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
6. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
7. *Ухоботов В. И.* Построение цены игры в некоторых дифференциальных играх с фиксированным временем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 994—1000.
8. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче преследования.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 244—254.

Челябинск

Поступила в редакцию
16.VI.1986