

УДК 539.3

ДАВЛЕНИЕ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА,
БЛИЗКОГО В ПЛАНЕ К КОЛЬЦЕВОМУ

Ковура А. Б., Самарский В. И.

Рассматривается обобщение задачи о вдавливании без трения кольцевого штампа в упругое полупространство [1, 2]. Область контакта имеет ось симметрии и представляет собой кольцо, ограниченное кривыми, близкими по форме к окружностям. Материал полупространства изотропный и однородный. Определение давлений под штампом сводится к нахождению двух аналитических в круге функций комплексного переменного по граничным условиям смешанного типа. Неизвестные постоянные в правых частях граничных условий определяются в предположении, что размеры отверстия в штампе малы. При этом существенно используются результаты работ [3, 4], относящиеся к случаю кольцевого и близкого к круговому штампов.

1. В упругое полупространство $z \geq 0$ вдавливается без трения штамп с плоским основанием, боковую поверхность которого образуют цилиндры $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ ($r_2(\varphi) < r_1(\varphi)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$). Поверхность полупространства вне штампа свободна от усилий. Требуется по заданной осадке штампа w_0 определить давления $p(r, \varphi)$ в области контакта S — некруговом кольце $r_2^2(\varphi) < r^2 < r_1^2(\varphi)$.

Возникающую при этом задачу теории потенциала для полупространства $z > 0$ можно, следуя [5], записать в виде

$$(1.1) \quad V_1(r, 0, \varphi) = w_0, 0 < r < r_1(\varphi); V_2(r, 0, \varphi) = 0, r_2(\varphi) < r < \infty \\ V_{1z}'(r, 0, \varphi) + V_{2z}'(r, 0, \varphi) = 0, 0 < r < r_2(\varphi), r_1(\varphi) < r < \infty$$

где $V_j(r, z, \varphi)$ ($j = 1, 2$) — гармонические и убывающие на бесконечности функции, граничные значения нормальных производных которых связаны со значениями контактных давлений формулой

$$(1.2) \quad p(r, \varphi) = h [V_{1z}'(r, 0, \varphi) + V_{2z}'(r, 0, \varphi)], r \in S; h = \\ = E [2(1 - \nu^2)]^{-1}$$

(E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона).

Не снижая общности проводимых рассуждений, примем, что область контакта S имеет ось симметрии $\varphi = 0$. Тогда уравнения $r^2 = r_j^2(\varphi)$ и гармонические функции $V_j(r, z, \varphi)$ могут быть представлены в виде

$$(1.3) \quad r^2 = r_j^2(\varphi) \equiv R_j^2 + \alpha_j \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(j)} \cos l\varphi, \\ V_j(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{jk}(r, z) \cos k\varphi$$

В первом соотношении (1.3) $\alpha_j \ll 1$, так что кривые, ограничивающие область контакта, близки к круговым.

Наряду с $V_j(r, z, \varphi)$ введем в рассмотрение две гармонические в полуплоскости $y > 0$ функции

$$Q_j(x, y, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{jk}(x, y) \cos k\varphi$$

(φ — параметр), убывающие на бесконечности и удовлетворяющие системе соотношений

$$(1.4) \quad Q_{1ky}'(x, 0) = V_{1kz}'(x, 0)x, \quad Q_{2kx}'(x, 0) = V_{2kz}'(x, 0)x \\ (0 < x \equiv r < \infty)$$

Функции V_{jk} , V_{jkz}' и Q_{jkx}' , Q_{jky}' представим в виде контурных интегралов [3]

$$(1.5) \quad V_{jk}(r, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_{jk}(s, z) \xi(s, k) r^{s-1} ds \\ \xi(s, k) = 2^{-s} \Gamma(1/2 - s/2 + k/2) / \Gamma(1/2 + s/2 + k/2)$$

$$(1.6) \quad Q_{jkx}'(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} N_{jk}(s, y) \eta(s, k) 2^{2-s} \sqrt{\pi} r^{s-1} ds \\ \eta(s, k) = \begin{cases} \Gamma(1/2 - s/2) / \Gamma(s/2), & k = 0, 2, \dots \\ -\Gamma(1 - s/2) / \Gamma(1/2 + s/2), & k = 1, 3, \dots \end{cases}$$

Выражение для $V_{jkz}'(r, z)$ получается из (1.5) заменой $\xi(s, k)$ на $\xi(s-1, k)$, выражение для $Q_{jky}'(x, y)$ — из (1.6) заменой $\eta(s, k)$ на $(-1)^k \eta(s, k+1)$.

Подставив эти контурные интегралы в (1.4) и (1.1), после преобразований, аналогичных [3], получим граничные условия задачи теории потенциала для полуплоскости

$$(1.7) \quad Q_{1y}'(x, 0, \varphi) + Q_{2x}'(x, 0, \varphi) = 0, \quad 0 < x < r_2(\varphi), \quad r_1(\varphi) < x < \infty \\ Q_{1y}'(x, 0, \varphi) - Q_{2x}'(x, 0, \varphi) = 0, \quad -r_2(\varphi) < x < 0, \quad -\infty < x < -r_1(\varphi) \\ Q_{1x}'(x, 0, \varphi) = 2\pi^{-1} [w_0 + B(x, \varphi)], \quad 0 < |x| < r_1(\varphi) \\ Q_{2y}'(x, 0, \varphi) = 2\pi^{-1} D(x, \varphi), \quad r_2(\varphi) < |x| < \infty \\ B(x, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} B_k(x) \cos k\varphi, \quad D(x, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} D_k(x) \cos k\varphi \\ B_{2m}(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \beta_{2m, 2l} x^{2l}, \quad B_{2m+1}(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \beta_{2m+1, 2l+1} x^{2l+1} \\ D_{2m}(x) = \sum_{l=0}^{m-1} d_{2m, 2l} x^{-2l-1}, \quad D_{2m+1}(x) = \sum_{l=0}^{m-1} d_{2m+1, 2l+1} x^{-2l-2}$$

($m = 1, 2, \dots$; $\beta_{k,s}$, $d_{k,s}$ — неизвестные постоянные).

2. При определении функций $B(x, \varphi)$ и $D(x, \varphi)$, входящих в граничные условия (1.7), будем руководствоваться следующими соображениями. Если $a = \max \{r_2(\varphi)\} \rightarrow 0$, то рассматриваемая область контакта S переходит в область, близкую к кругу. Соответствующая этому случаю краевая задача для определенной по приведенным выше формулам функции $Q_1(x, y, \varphi)$, гармонической в полуплоскости $y > 0$, имеет вид [3]

$$(2.1) \quad Q_{1x}'(x, 0, \varphi) = 2\pi^{-1} [w_0 + T(x, \varphi)], \quad 0 < |x| < r_1(\varphi) \\ Q_{1y}'(x, 0, \varphi) = 0, \quad r_1(\varphi) < |x| < \infty \\ T(x, \varphi) = \frac{\alpha_1 w_0}{2R_1} c_{2k+m}^{(1)} \left(\frac{x}{R_1}\right)^m \times \\ \times \left\{ \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(2k-2l-1)!!}{(2k-2l-2)!!} \left(\frac{x}{R_1}\right)^{2l} + \left(\frac{x}{R_1}\right)^{2k-2} \right\} \cos(2k+m)\varphi$$

$c_{2k+m}^{(1)}$ ($m = 0, 1$) — коэффициенты в уравнении границы области контакта (1.3).

Выполняя указанный переход в (1.7) и сравнивая с (2.1), заключаем, что

$$(2.2) \quad D(x, \varphi) \equiv 0, \quad B(x, \varphi) \equiv T(x, \varphi)$$

Если $a \neq 0$, то неизвестные постоянные в (1.7) не будут, вообще говоря, определяться формулами (2.2). Тем не менее, ограничиваясь малыми значениями радиуса $a \ll \max \{r_1(\varphi)\}$, можно приближенно полагать, что указанные постоянные имеют те же величины, что и в рассмотренном предельном случае области контакта, близкой к кругу. Таким образом, граничные условия (1.7) становятся вполне определенными.

3. Для нахождения гармонических функций $Q_{jx'}$ и $Q_{jy'}$ из системы соотношений (1.7) используем подход, предложенный в [4].

Путем конформного отображения

$\omega = r_1(\varphi)i(1 - \zeta) / (1 + \zeta)$ ($\omega = x + iy$, $\zeta = \mu e^{i\vartheta}$, $\mu \geq 0$) полуплоскости $y \geq 0$ на круг $|\zeta| \leq 1$ из (1.7) получим краевую задачу Римана — Гильберта для двух функций

$$(3.1) \quad F_j = 1/2 \pi \{Q_{jx'}[x(\zeta), y(\zeta), \varphi] - iQ_{jy'}[x(\zeta), y(\zeta), \varphi]\} \quad (j = 1, 2)$$

голоморфных в круге $|\zeta| < 1$ и зависящих от параметра φ

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} F_1(t, \varphi) - \operatorname{Re} F_2(t, \varphi) &= 0, \quad 0 < \vartheta < \psi(\varphi), \quad \pi/2 < \vartheta < \pi \\ \operatorname{Im} F_1(t, \varphi) + \operatorname{Re} F_2(t, \varphi) &= 0, \quad -\psi(\varphi) < \vartheta < 0, \\ &-\pi < \vartheta < -\pi/2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} F_2(t, \varphi) = 0, \quad \psi(\varphi) < |\vartheta| < \pi; \quad \operatorname{Re} F_1(t, \varphi) = w_0 + B_1(\vartheta, \varphi), \quad |\vartheta| < \pi/2$$

$$t = e^{i\vartheta}, \quad \psi(\varphi) = 2 \operatorname{arctg} \{r_2(\varphi)/r_1(\varphi)\}$$

$$B_1(\vartheta, \varphi) = B[x(\vartheta), \varphi], \quad x(\vartheta) = r_1(\varphi) \operatorname{tg}(\vartheta/2)$$

Так как $Q_{jx'}$ и $Q_{jy'}$ убывают на бесконечности, то $F_j(-1, \varphi) = 0$.

Для функций $F_j(\zeta, \varphi)$ используем представления

$$(3.3) \quad \begin{aligned} F_1(\zeta, \varphi) &= w_0 \sum_{k=0}^n g_k(\varphi) \zeta^k (1 + \zeta^2)^{-1/2} \\ F_2(\zeta, \varphi) &= w_0 \sum_{k=0}^n b_k(\varphi) \zeta^k [(\zeta - e^{i\psi(\varphi)})(\zeta - e^{-i\psi(\varphi)})]^{-1/2} \end{aligned}$$

учитывающие характер особенностей в точках раздела граничных условий (3.2). Здесь, в силу симметрии задачи, $g_k(\varphi) = \operatorname{Re} g_k(\varphi)$, $b_k(\varphi) = \operatorname{Re} b_k(\varphi)$.

Подставив (3.3) в (3.2), потребуем, чтобы полученные таким путем соотношения удовлетворялись в n равноотстоящих точках $t_s = \exp(i\vartheta_s)$ ($s = 0, 1, \dots, n$) верхней полуокружности ($0 < |\vartheta_s| < \pi$), не совпадающих с точками раздела граничных условий ($\vartheta_s \neq \psi(\varphi)$ и $\vartheta_s \neq \pi/2$). Тогда для каждого фиксированного значения φ придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно g_k и b_k

$$M^{-1}(\vartheta_s) \sum_{k=0}^n b_k \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \vartheta_s - \sum_{k=0}^n g_k \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \vartheta_s = 0,$$

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta_s < \pi$$

$$\sum_{k=0}^n b_k \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \vartheta_s - M(\vartheta_s) \sum_{k=0}^n g_k \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \vartheta_s = 0,$$

$$0 < \vartheta_s < \psi$$

$$\sum_{k=0}^n g_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \vartheta_s = [1 + T_1(\vartheta_s, \varphi)] (2 \cos \vartheta_s)^{-1/2}, \quad 0 < \vartheta_s < \frac{\pi}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^n b_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \vartheta_s = 0, \quad \psi < \vartheta_s < \pi; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k g_k = 0$$

$$(M(\vartheta) = |1 - \cos \psi / \cos \vartheta|^{1/2}, \quad T_1(\vartheta, \varphi) = T[x(\vartheta), \varphi] / w_0)$$

Вычислив g_k и b_k , можно, используя формулы (1.2), (1.4), (3.1) и (3.3), определить давления под штампом при выбранном значении угловой координаты φ

$$P(r, \varphi) = \frac{\sqrt{2h} w_0}{\pi r_1(\varphi)} (1 + \sigma^{-2})^{1/2} \left\{ (1 - \sigma^2)^{-1/2} \sum_{k=0}^n g_k \sin [(2k - 1) \operatorname{arctg} \sigma] - \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right)^{1/2} (\sigma^2 - \varepsilon^2)^{-1/2} \sum_{k=0}^n b_k \sin [(2k - 1) \operatorname{arctg} \sigma] \right\}$$

$$r_2(\varphi) / r_1(\varphi) = \varepsilon(\varphi) < \sigma(\varphi) = r / r_1(\varphi) < 1$$

4. Предложенный алгоритм определения контактных давлений реализован на ЭВМ ЕС-1022 для разных форм областей контакта. В качестве примеров ниже рассмотрены случаи эллиптического основания штампа с круговым отверстием и квадрато-подобного с эллиптическим отверстием. Численные результаты получены при $n = 44$ и $\vartheta_s = \pi(s + 1) / (n + 2)$ ($s = 0, 1, \dots, n$; $|\psi_j(\varphi) - \vartheta_s| > \pi / (2n + 4)$, $\psi_2(\varphi) = \pi / 2$).

Кривые, ограничивающие эллиптическую область контакта с круговым отверстием, определяются уравнениями (a_2, a_1 — полуоси эллипса, $a_2 < a_1$)

$$(4.1) \quad \rho^2 = \rho_1^2(\varphi) \equiv l_1^2 + \alpha_1 \sum_{k=1}^{12} \gamma_k \cos k\varphi, \quad \rho^2 = \rho_2^2(\varphi) \equiv l_2^2 \quad (l_2 = \text{const})$$

$$\rho = r / a_1, \quad \alpha_1 = (1 - \lambda^2) / (1 + \lambda^2) \ll 1, \quad \lambda = a_2 / a_1$$

$$\gamma_2 = \gamma \left(1 + \frac{3}{4} \alpha_1^2 + \frac{5}{8} \alpha_1^4 \right), \quad \gamma_4 = \gamma \left(\frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1^3 + \frac{15}{32} \alpha_1^5 \right)$$

$$\gamma_6 = \gamma \left(\frac{1}{4} \alpha_1^2 + \frac{5}{16} \alpha_1^4 + \frac{21}{64} \alpha_1^6 \right), \quad \gamma_8 = \gamma \left(\frac{1}{8} \alpha_1^3 + \frac{3}{16} \alpha_1^5 \right)$$

$$\gamma_{10} = \gamma \alpha_1^4 / 16, \quad \gamma_j = 0 \quad (j = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$$

$$l_1 = \left[\gamma \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \frac{3}{8} \alpha_1^4 + \frac{5}{16} \alpha_1^6 \right) \right]^{1/2}, \quad \gamma = \frac{2}{1 + \lambda^{-1}}$$

На фиг. 1 линии 1—5 равных давлений

$$P(r, \varphi) = \pi^2 a_1 p_1(r, \varphi) / (4h w_0)$$

для области контакта с радиусом внутренней границы $l_2 = 0,2$ и отношением полуосей граничного эллипса $\lambda = 0,85$ ($\alpha_1 = 0,1611$) соответствуют значениям $P(r, \varphi) = 2,134; 1,962; 2,152; 2,549; 5,019$.

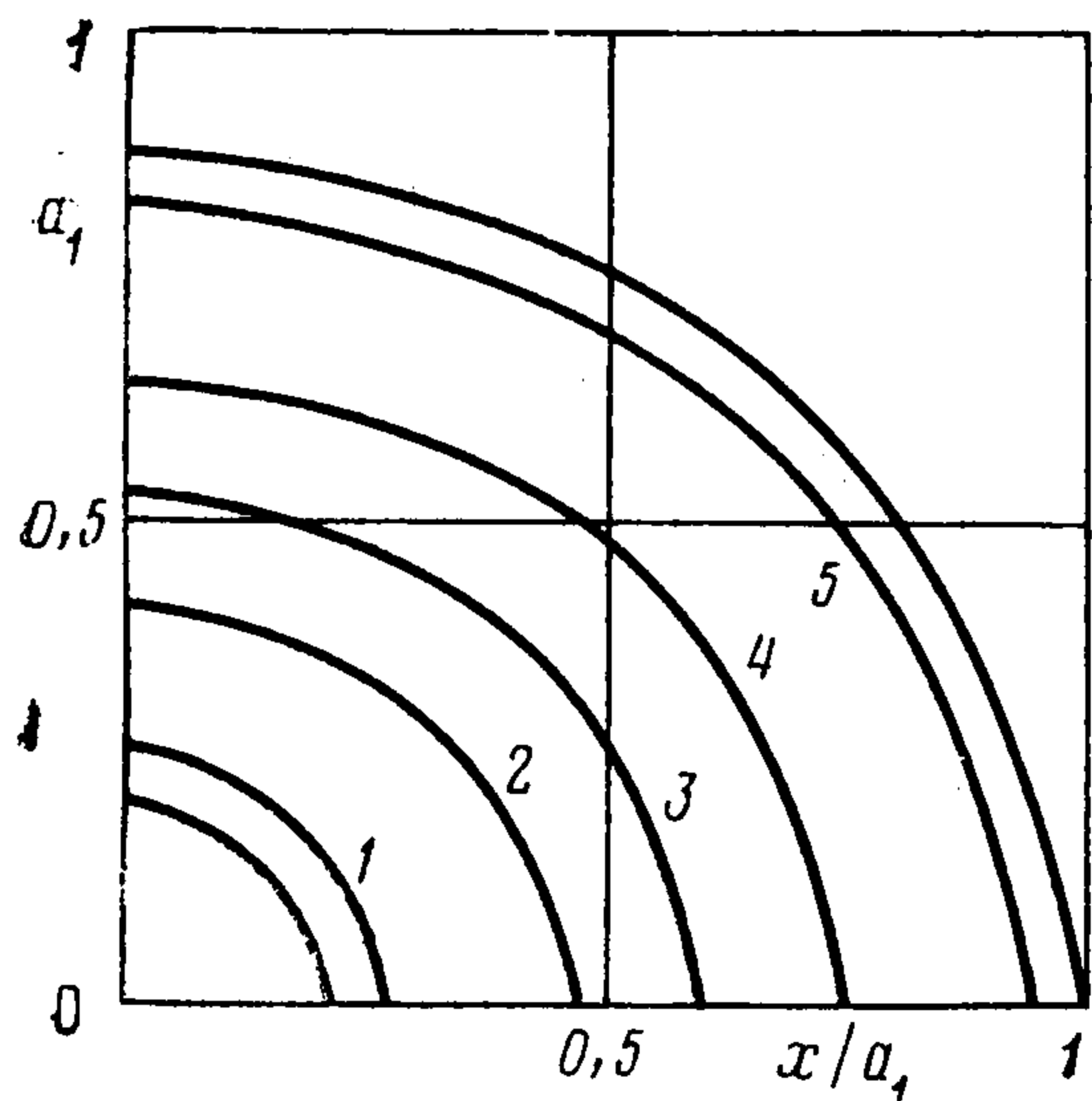
Распределение контактных давлений на оси $\varphi = 0$ для разных значений радиуса внутренней границы l_2 показано на фиг. 2. Кривым 1—3 соответствуют величины $l_2 = 0,1; 0,2; 0,3$ и $\lambda = 0,85$.

Для основания типа квадрата с эллиптическим отверстием внешняя граница области контакта определяется уравнением

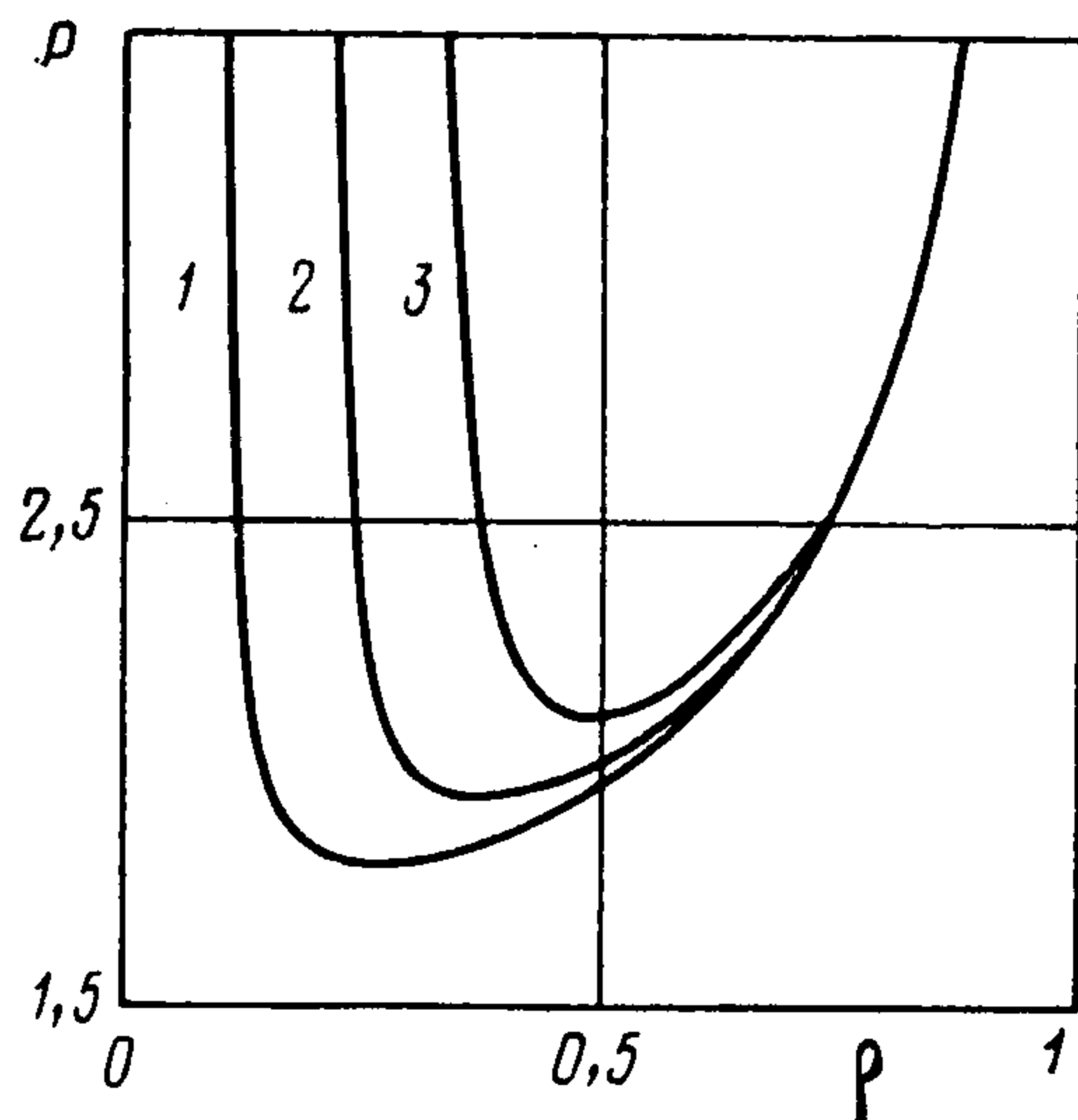
$$\rho^2 = \rho_1^2(\varphi) \equiv l_1^2 + \alpha_1 \sum_{k=1}^8 \gamma_k \cos k\varphi$$

$$\rho = r / a_1, \quad a_1 = 1,1845; \quad \alpha_1 = 1/3, \quad l_1 = 1,0281 a^{-1}$$

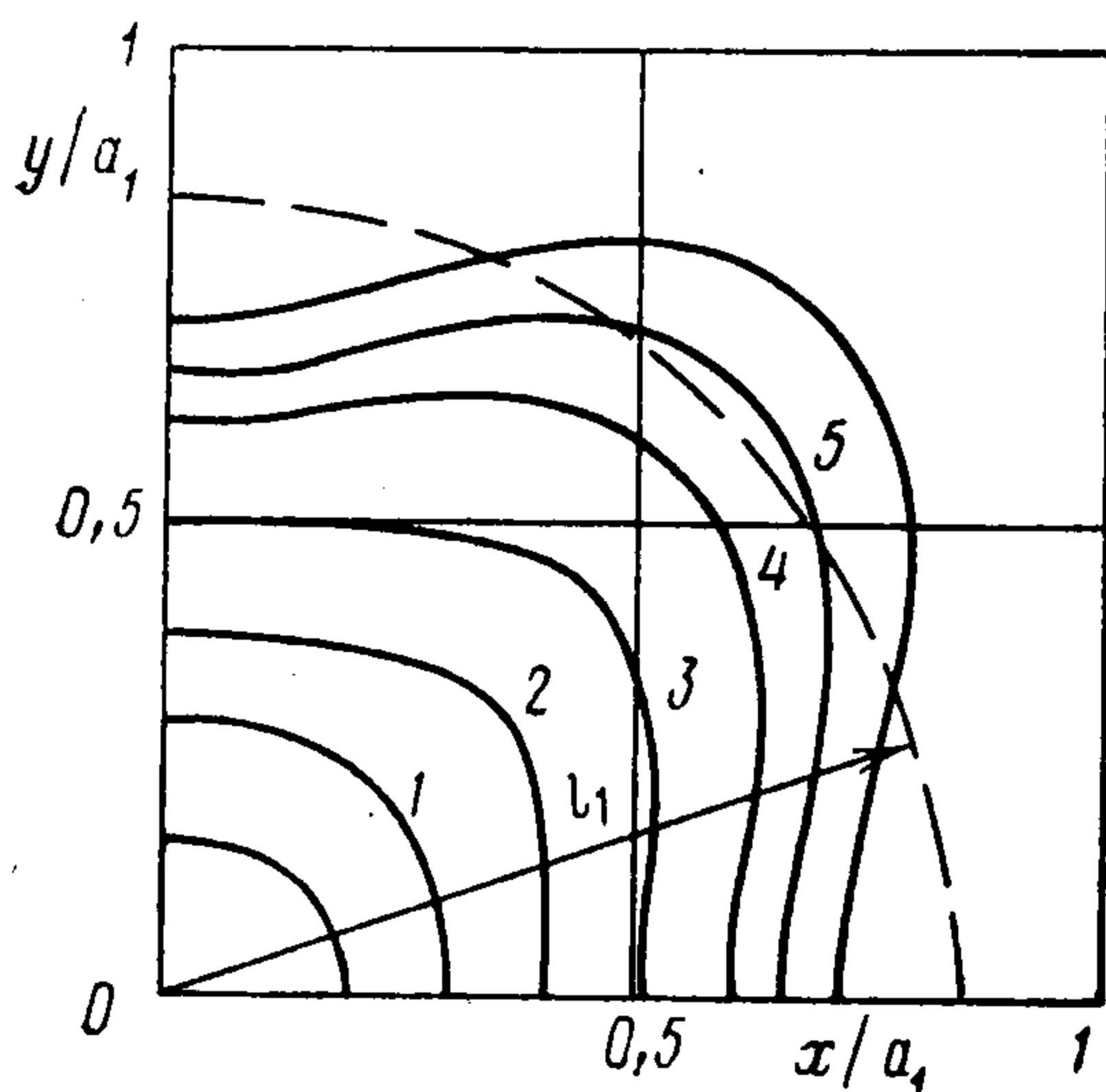
$$\gamma_4^{(1)} = -(57/58) a_1^{-2}, \quad \gamma_8^{(1)} = (3/28) a_1^{-2}, \quad \gamma_j^{(1)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 5, 6, 7).$$



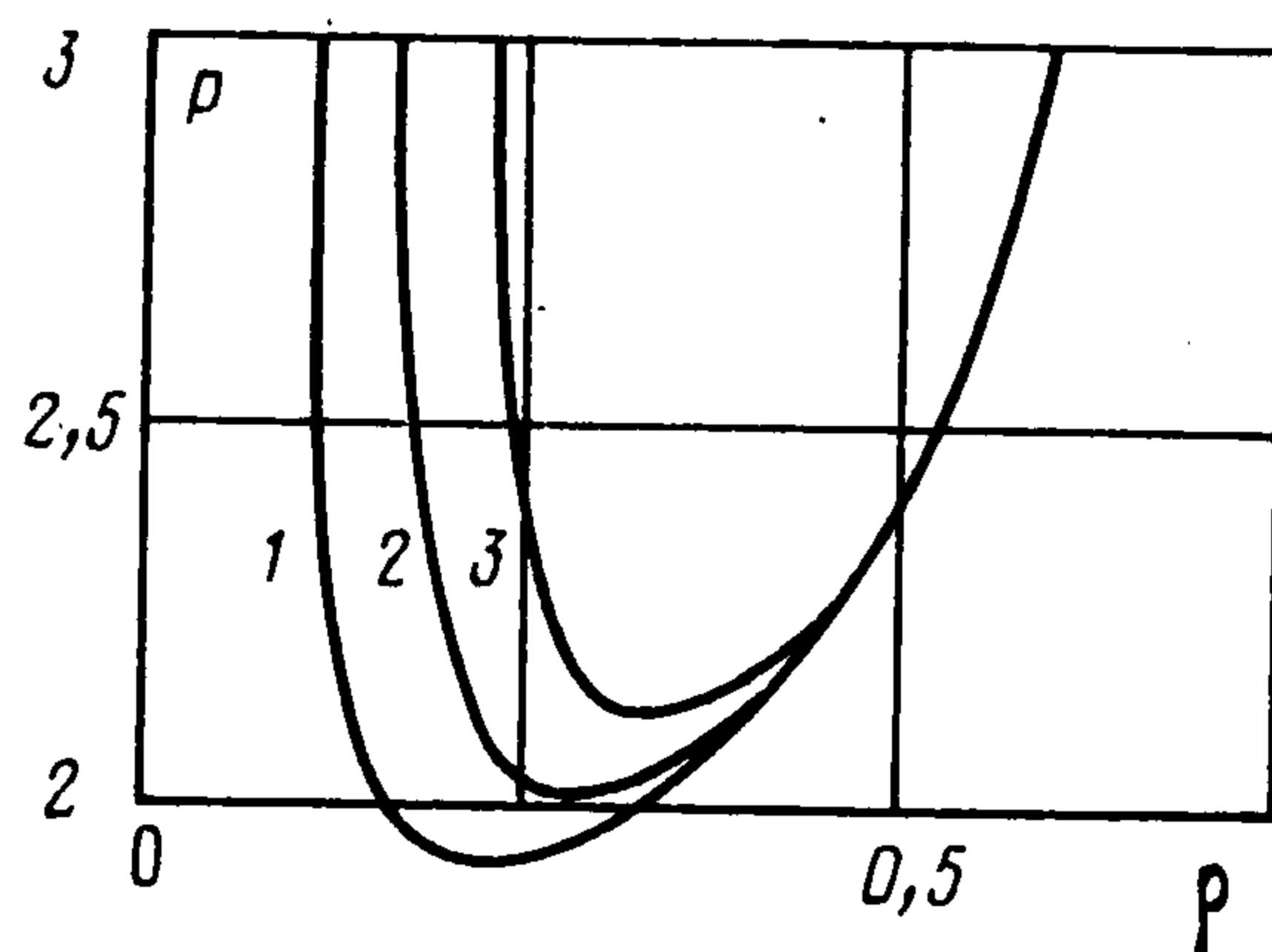
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Уравнение внутренней границы имеет вид

$$\rho^2 = \rho_2^2(\varphi) \equiv l_2^2 + \alpha_2 \sum_{k=1}^{12} \gamma_k^{(2)} \cos k\varphi$$

причем α_2 определяется тем же выражением, что и параметр α_1 в (4.1). Величины $\gamma_k^{(2)}$ связаны с коэффициентами γ_k в (4.1) соотношениями $\gamma_k^{(2)} = \beta^2 \gamma_k$ ($k = 1, 2, \dots, 12$), в которых множитель $\beta > 0$ задает характерный размер эллиптического отверстия — полуось $\rho_2(0) = \beta$, а также радиус l_2 близкой к эллипсу окружности

$$l_2 = \beta \left[\gamma \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \frac{3}{8} \alpha_1^4 + \frac{5}{16} \alpha_1^6 \right) \right]^{1/2}$$

На фиг. 3 линии 1—5 равных давлений, построенные при $\beta = 0,2$, соответствуют значениям $P(\rho, \varphi) = 2,146; 2,189; 2,467; 3,159; 4,182$.

На фиг. 4 изображены эпюры контактных давлений на оси $\varphi = 0$ при разных размерах эллиптического отверстия. Кривым 1—3 отвечают значения $\beta = 0,1; 0,15; 0,2$.

Для рассмотренного выше случая эллиптического в плане штампа с круговым отверстием малого радиуса полученные значения $P(\rho, \varphi)$ сравнивались со значениями контактных давлений $P_1(\rho, \varphi)$, найденными другим способом [6]. В таблице помещены значения (в процентах) относительной погрешности $\delta = |1 - P_1(\rho, \varphi)/P(\rho, \varphi)|$. Данные, отвечающие $\lambda = 0,85$ и $l_2 = 0,2$, отражают типичный характер поведения величины δ

ρ	$\lambda = 0,85; l_2 = 0,2$					$l_2 = 0,2; \varphi = \pi/4$		$\lambda = 0,85; \varphi = \pi/4$	
	$\varphi = 0$	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$\lambda = 0,9$	0,8	$l_2 = 0,1$	0,3
0,22	9,54	7,59	5,44	9,52	9,11				
0,25	3,25	1,56	1,69	2,87	2,08	0,85	3,10	0,72	
0,35	0,11	0,26	0,95	0,25	0,05	0,55	0,72	0,71	2,35
0,55	0,14	0,56	0,94	0,53	0,21	0,71	1,28	0,81	1,40
0,75	0,21	0,86	1,34	1,26	0,88	0,99	2,14	1,25	1,62
0,85	0,39	0,47	2,14	5,64		1,74	4,58	2,07	2,35
0,95	1,34	5,26							

внутри области контакта: погрешность δ возрастает при подходе к внутренней и внешней границам, а также по мере удаления от осей симметрии области контакта $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. Данные, полученные при $\varphi = \pi/4$, показывают, как влияет эксцентриситет внешней границы (отношение λ) и радиус l_2 внутренней границы на величину погрешности δ : увеличение эксцентриситета (уменьшение λ), так же как и рост l_2 , увеличивает расхождение между соответствующими значениями $P(\rho, \varphi)$ и $P_1(\rho, \varphi)$.

В целом вычисления показывают, что при $0,8 < \lambda < 1$ и $0 < l_2 < 0,3$ погрешность δ на большей части области контакта не превосходит 2,5 %, что свидетельствует о хорошем согласовании двух различных приближенных решений.

Авторы благодарят В. И. Моссаковского за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. Моссаковский В. И., Ковура А. Б. Контактные задачи для упругого полупространства с круговыми и близкими к круговым линиями раздела граничных условий. — В кн.: Динамика и прочность тяжелых машин. Изд-е Днепропетров. ун-та, 1980, вып. 5, с. 74—89.
3. Моссаковский В. И. Давление штампа, близкого в плане к круговому, на упругое полупространство. — ПММ, 1954, т. 18, вып. 6, с. 675—680.
4. Моссаковский В. И., Ковура А. Б. Об одном способе решения задач теории потенциала и его приложении в теории упругости. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 1, с. 43—47.
5. Губенко В. С., Моссаковский В. И. Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 334—340.
6. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. — Инж. ж. МТТ, 1967, № 4, с. 108—116.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
11.VI.1985