Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 531.36

К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ УДАРЕ

Синицын В. А.

Рассматривается движение абсолютно твердого тела при ударе (импульсивное движение). Показана аналогия движения твердого тела при ударе и движения твердого тела в жидкости, состоящая в том, что влияние инерционных свойств твердого тела на движение в обоих случаях определяется тремя поверхностями второго порядка. Роль этих поверхностей при движении тела в беспредельной жидкости установлена Н. Е. Жуковским [1].

С учетом моментов ударных импульсов в месте контакта (влияние трения качения и трения верчения) получены необходимые условия возникновения «тангенциального» удара (ТУ). Как известно, ТУ характеризуется тем, что реакция способствует увеличению скорости сближения точек контакта соударяющихся тел, в том числе и при начальной скорости сближения, равной нулю («соударение без удара»). Ранее [2—4] при исследовании ТУ во внимание принимался только ударный импульс (нормальная составляющая реакции и трение скольжения).

Разъяснение физического смысла понятия ТУ дано в работах участников дискуссии о «парадоксах» сухого трения ([5], добавление 2), а также в популярной литературе [6]. В работающих технических устройствах ТУ нередко проявляется в виде динамического самоторможения, а также нежелательных «заклиниваний» и «задиров».

Рассмотрим движение твердого тела, принадлежащего системе с идеальными удерживающими линейными относительно скоростей связями (голономными или неголономными). Пусть ударное действие на тело задано в виде главного вектора S и главного момента L импульсов ударных сил, приведенных к какому-либо центру. Перемещениями материальных точек системы, как обычно при ударе, пренебрегаем. В качестве основной выберем неподвижную систему координат, начало которой совпадает с центром приведения импульсов ударных сил. Нахождение угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и скорости $\mathbf{v}$ некоторого полюса и составляет задачу определения движения твердого тела при ударе.

За полюс примем точку O тела, совпадающую с началом основной системы координат (положение полюса в процессе удара остается неизменным, а скорость меняется от некоторого значения $\mathbf{v}^-$ перед ударом). Составляем уравнения импульсивного движения тела (движения при ударе) [7]

$$v_i - v_i^- = \frac{\partial\Phi_1}{\partial S_i} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial S_i}, \quad \omega_i - \omega_i^- = \frac{\partial\Phi_2}{\partial L_i} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial L_i} \tag{1}$$

$$2\Phi_1 = S^T\alpha S, \ 2\Phi_2 = L^T\beta L, \ \Phi_3 = S^T\gamma L$$

$$\alpha = \| \alpha_{ij} \|, \ \beta = \| \beta_{ij} \|, \ \gamma = \| \gamma_{ij} \| \ (i, j = 1, 2, 3)$$

Здесь v_i, ω_i, S_i, L_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции векторов $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, S, L на оси неподвижной системы координат. Коэффициенты матриц α, β, γ определяются при помощи выражения кинетической энергии Θ приведенной системы (квадратичной формы в кинетической энергии, выраженной через обобщенные скорости) (a — матрица инерционных коэффициентов приведенной системы, n — число независимых обобщенных скоростей

$q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$

$$(2) \qquad (q^{\cdot} - q^{\cdot -})^T a (q^{\cdot} - q^{\cdot -}) = 2\Theta (q_1^{\cdot} - q_1^{\cdot -}, \ldots, q_n^{\cdot} - q_n^{\cdot -}) = = 2\Phi_1 + 2\Phi_2 + 2\Phi_3$$

Функциям Φ_1, Φ_2, Φ_3 можно поставить в соответствие три поверхности второго порядка

$$(3) \qquad \chi_\delta\colon\ \delta_{11}x^2 + \delta_{22}y^2 + \delta_{33}z^2 + 2\delta_{23}yz + 2\delta_{31}zx + 2\delta_{12}xy = = \chi_\delta(x, y, z) = 1 \quad (\delta = \alpha, \beta, \gamma)$$

Поверхности χ_α, χ_β — эллипсоиды, так как при $\mathrm{L} = 0$ и $\mathrm{S} = 0$, функции Φ_1 и Φ_2, соответственно, равны удвоенной кинетической энергии приобретенных скоростей приведенной системы (2).

Покажем, что роль поверхностей χ_δ в описании импульсивного движения твердого тела аналогична роли трех поверхностей при движении твердого тела в жидкости [1] (аналогичным понятиям будем присваивать названия, которые использовались Н. Е. Жуковским).

Если приращение скорости точки O направлено по радиусу $\mathbf{r}_1$ эллипсоида χ_α, то величина импульса S и приращение скорости $\triangle v$ в этом направлении связаны соотношением

$$(4) \qquad \Delta v = \frac{S}{2r_1^2}\left(\frac{\partial\chi_\alpha}{\partial x}x + \frac{\partial\chi_\alpha}{\partial y}y + \frac{\partial\chi_\alpha}{\partial z}z\right) = \frac{S}{r_1^2} \qquad (r_1^2\Delta v = S)$$

Величину $\mu = r_1^2$ назовем (по аналогии) измененной массой тела в направлении $\mathbf{r}_1$. Из формулы (4) следует, что эллипсоид χ_α получаем откладывая в направлении $\mathbf{r}_1$ от точки O расстояние $r_1 = \sqrt{\mu}$. Измененная масса во всяком направлении не менее массы тела, так как на основании теоремы Кельвина [8] кинетическая энергия приобретенных скоростей системы со связями (при наперед заданных приращениях наперед указанных точек) не меньше кинетической энергии приобретенных скоростей твердого тела без связей.

Если ударное действие на тело представлено только импульсивной парой, плоскость которой перпендикулярна радиусу r_2 эллипсоида χ_β и сообщает в направлении $\mathbf{r}_2$ приращение угловой скорости $\Delta\omega$, то

$$(5) \qquad \Delta\omega = \frac{L}{2r_2^2}\left(\frac{\partial\chi_\beta}{\partial x}x + \frac{\partial\chi_\beta}{\partial y}y + \frac{\partial\chi_\beta}{\partial z}z\right) = \frac{L}{r_2^2} \qquad (r_2^2\Delta\omega = L)$$

Величину $\nu = r_2^2$ назовем (по аналогии) измененным моментом инерции относительно оси $\mathbf{r}_2$. Эллипсоид χ_β получается, если в направлении $\mathbf{r}_2$ от точки O откладывать расстояние $r_2 = \sqrt{\nu}$ (эллипсоид измененных моментов инерции). При перемене полюса эллипсоид измененных моментов инерции меняется, но всегда измененный момент инерции относительно любой оси будет не менее момента инерции твердого тела относительно этой оси (также на основании теоремы Кельвина).

Выбором положения полюса можно добиться, чтобы коэффициенты γ_{ij} стали симметричны относительно индексов [1]. Назовем (по аналогии) эту точку центральной. Поверхность χ_γ для центральной точки будет эллипсоидом или гиперболоидом. Проведем радиус-вектор $\mathbf{r}_3$ в некоторую точку этой поверхности. Если по $\mathbf{r}_3$ направлен момент импульсивной пары $\mathbf{L}$, то кроме приращения угловой скорости, которое можно найти из (5), в направлении $\mathbf{r}_3$ произойдет приращение скорости (центральной точки) $(\mathrm{S} = 0)$

$$\Delta v = \frac{L}{2r_3^2}\left(\frac{\partial\chi_\gamma}{\partial x}x + \frac{\partial\chi_\gamma}{\partial y}y + \frac{\partial\chi_\gamma}{\partial z}z\right) = \frac{L}{r_3^2} \qquad (\lambda\Delta v = L,\ \lambda = r_3^2)$$

И наоборот, при действии импульса S вдоль $\mathbf{r}_3$ кроме приращения скорости происходит приращение угловой скорости

$$\Delta\omega = S/r_3^2, \quad \lambda\Delta\omega = S \quad (\lambda = r_3^2)$$

Если поверхность χ_γ — гиперболоид, то в направлении образующих асимптотического конуса приращения скорости центральной точки и угловой скорости тела равны нулю.

Таким образом, подобно влиянию твердого тела в жидкости на сообщаемое ему движение [1], все влияние твердого тела и системы с идеальными удерживающими связями на импульсивное движение характеризуется тремя поверхностями (3). Эти поверхности и поверхности, рассмотренные в [1], являются взаимными.

Рассмотрим условия возникновения тангенциального удара (ТУ) [3] при движении твердого тела по поверхности с трением. Предполагаем, что твердое тело и поверхность выпуклы (имеется единственная общая касательная плоскость и общая нормаль в точке контакта), ударные активные силы отсутствуют. Полагаем, что реакция поверхности состоит из силы [2, 3] и пары. Начало основной системы координат поместим в точку контакта, первые два единичных вектора базиса — в касательной плоскости, третий — по общей нормали внутрь тела. Введем в качестве независимой переменной τ в уравнениях движения импульс нормальной составляющей N главного вектора реакции ($d\tau = Ndt$). Тогда для составляющей v_3 ($-v_3$— скорость сближения) из (1) получаем уравнение

$$dv_3/d\tau = \alpha_{31}X + \alpha_{32}Y + \alpha_{33} + \gamma_{31}M_x + \gamma_{32}M_y + \gamma_{33}M_z \tag{6}$$

X, Y, M_x, M_y, M_z — проекции силы трения, момента трения качения и момента трения верчения, отнесенные к величине нормальной составляющей реакции.

Для определения коэффициентов в правой части уравнения (6) составим выражение кинетической энергии (2)

$$\begin{aligned}
\Theta = {} & \frac{S^2}{2m} + \frac{1}{2\triangle^2}(A_1M_1^2 + B_1M_2^2 + C_1M_3^2 + 2D_1M_2M_3 + \\
& + 2E_1M_1M_3 + 2F_1M_1M_2) \\
& \triangle = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF, \quad S^2 = S_1^2 + S_2^2 + \\
& + S_3^2 \\
& A_1 = Aa^2 + Bf^2 + Ce^2 - 2Def - 2Eae - 2Faf \\
& D_1 = Aef + Bbd + Ccd - D(bc + d^2) - E(cf + de) - \\
& - F(be + df) \\
& (A_1B_1C_1,\ D_1E_1F_1;\ ABC,\ DEF,\ abc,\ def) \\
& a = BC - D^2,\ d = AD + EF\ (abc,\ def;\ ABC,\ DEF) \\
& \mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{r} \times \mathbf{S}; \quad \mathbf{M} = \| M_1, M_2, M_3 \|^T, \quad \mathbf{r} = \| \xi, \eta, \zeta \|^T
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{M}$, $\mathbf{r}$ — главный момент импульсов реакции относительно центра масс и радиус-вектор положения центра масс тела в основной системе координат, A, B, C, D, E, F — составляющие тензора инерции для центра масс тела в осях, параллельных осям основной системы координат, m — масса тела. Невыписанные соотношения получаются круговой перестановкой символов, указанных в скобках.

Из (7) получаем коэффициенты

$$\alpha_{31} = \triangle^{-2}(-B_1\xi\zeta + D_1\xi\eta - E_1\eta^2 + F_1\eta\zeta) \tag{8}$$

$$\alpha_{32} = \triangle^{-2}(-A_1\eta\zeta - D_1\xi^2 + E_1\xi\eta + F_1\xi\zeta)$$
$$\alpha_{33} = m^{-1} + \triangle^{-2}(A_1\eta^2 + B_1\xi^2 - 2F_1\eta\zeta)$$
$$\gamma_{31} = \triangle^{-2}(-A_1\eta + F_1\xi), \quad \gamma_{32} = \triangle^{-2}(B_1\xi - F_1\eta), \quad \gamma_{33} = \triangle^{-2}(D_1\xi - E_1\eta)$$

Введем изображающую точку с координатами $x = X$, $y = Y$ на плоскости, касательной к поверхностям тел. Тогда необходимое условие возрастания скорости сближения (отрицательная правая часть уравнения (6)) состоит в том, что должны пересекаться прямая и окружность [3] (f_* — отношение силы трения к нормальной составляющей реакции)

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33} + \gamma_{31}M_x + \gamma_{32}M_y + \gamma_{33}M_z = 0, \quad x^2 + y^2 = f_*^2 \tag{9}$$

Окружность представляет собой сечение кругового конуса, ось которого совпадает с нормалью к поверхностям, $f_* \leqslant f_0$ (f_0 — коэффициент трения скольжения; равенство имеет место только при чистом скольжении, когда верчение отсутствует и конус является конусом трения).

Модель взаимодействия твердых тел, учитывающая зависимость моментов сопротивления качению и верчению от нормального импульса реакции и состояния тела в процессе удара, в настоящее время разработана недостаточно. Обычный подход, основанный на использовании коэффициентов трения качения и трения верчения, полученных эмпирически для чистого качения и чистого верчения, в общем случае [9] не дает реалистического описания движения.

Дифференциальное уравнение (6), условие пересечения прямой и окружности (9)

$$f_* > |(\alpha_{33} + \gamma_{31}M_x + \gamma_{32}\dot{M}_y + \gamma_{33}M_z)|(\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2)^{-1/2} \tag{10}$$

и выражения для коэффициентов (8) позволяют установить некоторые свойства сближения и условия возникновения ТУ (удар в результате возрастания скорости сближения даже при нулевой начальной скорости сближения).

1°. Трение качения и трение верчения не влияют на процесс изменения скорости сближения, ТУ невозможен при любых конечных значениях коэффициента трения скольжения ($f_0 > 0$), если центр масс тела находится на нормали к поверхности ($\xi = \eta = 0$), так как в этом случае $dv_3/d\tau = \alpha_{33} > 0$.

2°. Трение качения не влияет на изменение скорости сближения (и условия возникновения ТУ), если выполняются соотношения ($\gamma_{31} = \gamma_{32} = 0$)

$$\xi/\eta = A_1/F_1 = F_1/B_1$$

3°. Трение верчения не влияет на изменение скорости сближения, если ($\gamma_{33} = 0$)

$$D_1\xi - E_1\eta = 0$$

Непосредственная проверка показывает, что $\gamma_{33} = 0$, в частности, когда один из главных диаметров центрального эллипсоида инерции перпендикулярен плоскости, касательной к поверхностям в точке контакта.

4°. Для указанной в п. 3° специальной ориентации твердого тела при дополнительном условии $\zeta = 0$ (центр масс расположен в касательной плоскости) изменение скорости сближения определяется только трением качения, и ТУ может возникнуть при выполнении неравенства (необходимое условие)

$$\frac{1}{m}+\frac{\eta}{A}(\eta-M_x)+\frac{\xi}{B}(\xi+M_y)<0$$

Если трение качения определяется, как обычно [10], при помощи коэффициента трения качения k (момент пары принимается противоположным угловой скорости качения), т. е.

$$M_x=-k\omega_1/\mid\omega\mid,\quad M_y=-k\omega_2/\mid\omega\mid,\quad \mid\omega\mid=(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}$$

то ТУ не может возникнуть вследствие трения качения при достаточно малых значениях k согласно неравенству

(11) $$ABm^{-1}+(A\xi^2+B\eta^2)>k\,(A^2\xi^2+B^2\eta^2)^{1/2}$$

В случае неравенства противоположного знака в (11) имеется сектор направлений угловой скорости качения, в котором

$$k\left(-\frac{\eta\omega_1}{A}+\frac{\xi\omega_2}{B}\right)\frac{1}{|\omega|}>\frac{1}{m}+\frac{\eta^2}{A}+\frac{\xi^2}{B}$$

Следовательно, независимо от главного вектора сил трения и пары трения верчения ($\alpha_{31}=\alpha_{32}=0,\ \gamma_{33}=0$) причиной ТУ является только трение качения.

5°. Влияние верчения на условия возникновения ТУ проявляется также через изменение коэффициента f_*. Учет малой конечной площади поверхности контакта показывает [9], что для движений, близких чистому верчению, коэффициент f_* линейно зависит от отношения $(v_1^2+v_2^2)^{1/2}/\mid\omega_3 r\mid$ (r — радиус основания локально сферической поверхности контакта). Поэтому при достаточно большой угловой скорости верчения можно, вообще говоря, избежать возникновения ТУ (изменение знака неравенства в (10)).

6°. При плоском движении твердого тела параллельно координатной плоскости, проходящей через общую нормаль, имеем следующие выражения коэффициентов (8):

$$\alpha_{31}=0,\quad \alpha_{32}=-\frac{\eta\xi}{m\rho^2},\quad \alpha_{33}=\frac{1}{m}+\frac{\eta^2}{m\rho^2}$$

$$\gamma_{31}=-\frac{\eta}{m\rho^2},\quad \gamma_{32}=\gamma_{33}=0\quad (m\rho^2=A)$$

Условие (10) в этом случае принимает вид

(12) $$f_*>\mid\zeta^{-1}(\rho^2\eta^{-1}+\eta-M_x)\mid$$

Если пренебречь моментом трения качения, то (12) совпадет с известным условием невозможности или неоднозначности (в зависимости от направления скорости скольжения) движения [4]. При использовании коэффициента трения качения k неравенство (12) примет вид (ω — алгебраическая угловая скорость качения)

(13) $$f_*>\mid\zeta^{-1}(\rho^2\eta^{-1}+\eta+k\omega\mid\omega\mid^{-1})\mid\quad(\omega=\omega_1)$$

Из (13) можно сделать очевидные выводы о влиянии трения качения (в зависимости от направления вращения и величины коэффициента k) на условия возникновения ТУ при плоском движении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* Лекции по гидродинамике. М.: Изд-во н.-техн. упр. ВСНХ, 1929. 143 с.
2. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.
3. *Болотов Е. А.* Об ударе двух твердых тел при действии трения.— Изв. Моск. инж. училища, 1908, ч. 2, вып. 2, с. 43—55.
4. *Болотов Е. А.* О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением. М.: Университетская тип., 1906. 147 с.
5. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
6. *Самсонов В. А.* Очерки о механике. М.: Наука, 1980. 64 с.
7. *Синицын В. А.* О некоторых свойствах связей при импульсивном движении.— В кн.: Аналитические методы механики в задачах динамики летательных аппаратов. М.: Изд.-е Моск. авиац. ин-та, 1982, с. 93—97.
8. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
9. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка.— В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967, с. 60—77.
10. *Appel P.* Traite de Mecanique rationnelle. V. 2. P.: Gauthier-Villars, 1953. 575 p.— Рус. перев.: М.: Физматгиз, 1960. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1985