Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 539.3

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОКОЛО КРАЯ ОБЛАСТИ КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ

Симонов И. В.

Изучаются асимптотики решений задач линейной динамической теории упругости в окрестности движущейся точки раздела различных условий контакта и отрыва разнородных тел (подразумеваются задачи соударения и отскока). Учитываются условия типа неравенств кинематического, динамического и энергетического характера. Это позволяет дать полную априорную информацию об областях дозвуковых скоростей, где решения сингулярны или непрерывны или не реализуются.

Природа сингулярности решений применительно к динамике трещин на границе раздела исследована в [1, 2].

1. Предварительные соображения. Рассмотрим области Ω_1, $\Omega_2 \in R^3$, заполненные однородными линейно-упругими телами *1* и *2*, $S = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ — общая граница (поверхность), $\Gamma(t)$ — край области контакта, Q — точка, принадлежащая регулярному куску как кривой Γ, так и поверхности S, причем скорости $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ точки Q относительно тел *1* и *2* и ускорения $(d/dt)\,\mathbf{c}_j$ — ограниченные функции времени t, $\mathbf{n}$ — нормаль к Γ в точке Q и вектор, касательный к S.

Физически указанная кинематика описывает соударение упругих тел с гладкими поверхностями и под малыми углами и, возможно, при большом разрыве касательных скоростей. Скорости же частиц $\mathbf{u}^j$, обусловленные деформацией, считаются малыми по сравнению с волновыми скоростями и всегда вычисляются во вмороженных в среды *1* и *2* системах отсчета и не меняются при преобразованиях координат. Причина фиксации векторов $\mathbf{u}^j$ заключается в неинвариантности уравнений линейной теории упругости при преобразовании Галилея — не различаются d/dt и $\partial/\partial t$.

Локализация в корректных по постановкам исходных задачах для указанной системы тел — переход в декартову систему координат, связанную с точкой Q и неравномерное растяжение координат [2—4] — приводит к предельным (каноническим сингулярным) задачам. Они содержат усеченную распадающуюся систему уравнений движения Ламе для описания плоских установившихся движений (со скоростями $c_j = \mathbf{n}\mathbf{c}_j$) упругих полуплоскостей в системе координат $x = x_1$, $y = x_2$; ось x направлена по $\mathbf{n}$, ось $y \perp S$. При $x > 0$ и $x < 0$, $y = 0$ ставятся условия отрыва и несовершенного контакта. В силу специфики предельного перехода (растяжение вдоль осей x, y происходило асимптотически «быстрее», чем растяжение вдоль оси x_3) касательные к кривой Γ составляющие скоростей $c_j' = \mathbf{c}_j - \mathbf{n}c_j$ не войдут в предельные уравнения движения.

Обсудим вопрос формулировки условий контакта. В основном будет рассмотрен закон сухого трения Кулона (ниже x, y — подвижная нерастянутая система отсчета)

$$(1.1)\qquad \tau = -k\sigma_{22}\mathbf{v} / |\mathbf{v}| \Rightarrow \sigma_{m2} = -k_m\sigma_{22}$$

и линейный закон вязкого сопротивления сдвигу

$$(1.2)\qquad \tau = \eta\mathbf{v} \Rightarrow \sigma_{m2} = \eta v_m, \quad m = 1,\ 3$$

$$\tau = (\sigma_{12},\ \sigma_{32}),\ \mathbf{v} = (v_1,\ v_3),\ v_m = [u_m] + v_m^\circ,\ (v_1^\circ,\ v_3^\circ) = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$$

Здесь σ_{ml}^j, u_m^j — компоненты тензоров напряжений и векторов массовой скорости; верхний индекс у функций фиксирует среду (иногда снимается); $\mathbf{v}$ — вектор полной скорости проскальзывания, $k > 0$ и $\eta > 0$ — коэффициенты трения; квадратные скобки означают скачок функции при переходе с верхнего берега на нижний.

Условия вязкого трения — распадающиеся. Для (1.1) это не так: функции, описывающие плоскую и антиплоскую деформации, связаны нелинейными зависимостями, что усложняет задачу. Основная цель работы — получить информацию об особенностях решений, главным образом о старших членах асимптотических разложений, так как в следующих порядках может проявиться влияние отброшенных частей в уравнениях движения. Принимая во внимание сказанное, сделаем упрощающее предположение о постоянстве коэффициентов трения по направлениям

$$k_m = kv_m / |\mathbf{v}| = \text{const}, \quad m = 1, 3 \tag{1.3}$$

Заметим, что условие (1.3) выполняется точно, если исходная постановка соответствует плоской деформации ($k_3 = 0$, $k_1 = k \operatorname{sgn} v_1$) или плоскому сдвигу ($k_1 = 0$, $k_3 = k \operatorname{sgn} v_3$). В других случаях (1.3) означает, что вектор $\mathbf{v}$ не меняется по направлению при подходе к кривой Г и нуждается в проверке апостериори.

2. Постановка задачи (плоская деформация). Искомые функции u_m^j и σ_{ml}^j на границе раздела упругих полуплоскостей $y = 0$ удовлетворяют при $x > 0$ условиям отсутствия напряжений

1) $\sigma_{m2}^j = 0, \ j, m = 1, 2$

и дополнительному условию асимптотического характера

$$[u_2/c] = u_2^1/c_1 - u_2^2/c_2 = -d\delta/dx \leqslant 0, \quad 0 < x < x_*, \quad x_* \to 0 \tag{2.1}$$

(δ — расстояние между берегами), предотвращающему «перехлест» берегов вблизи точки контакта Q; при $x < 0$ — одному из следующих условий:

2) скольжение с сухим трением

$$[u_2] = [\sigma_{22}] = 0, \ \sigma_{12}^j = -k_1\sigma_{22}^j, \ k_1 v_1 > 0$$

3) скольжение с вязким трением

$$[u_2] = [\sigma_{22}] = 0, \ \sigma_{12}^j = \eta v_1, \ v_1 \neq 0$$

4) условие типа «гребешка» (перекатывание без поджатия)

$$[u_1] = [\sigma_{12}] = 0, \ \sigma_{22}^j = 0 \ (\text{при этом } c_1 = c_2, \ v_1^\circ = 0)$$

и дополнительным условиям в форме неравенств

$$\sigma_{22}^j (x, 0) \leqslant 0, \quad x < 0; \ 0 \leqslant F < \infty \tag{2.2}$$

означающим отсутствие сил притяжения между поверхностями и конечность и неотрицательность потока энергии F в точку $x = y = 0$ (обсуждалось в [2, 5, 6]).

При решении канонических сингулярных задач используем комплексные представления Л. А. Галина [7] в несколько видоизмененной форме [2], удобные для рассмотрения плоских стационарных задач теории упругости. Введение комплексных потенциалов $\chi_m^j (z_{lj})$ [2] эквивалентно удовлетворению уравнениям в областях $y > 0$ и $y < 0$ (следует только в соотношениях (1.3) из [2] заменить c на c_j).

На границе раздела $y = 0$

$$\sigma_{12}^j = \operatorname{Im} \chi_1^j, \quad u_1^j = c_j \operatorname{Re} \{b_{2j}\chi_1^j + a_j\chi_2^j\} \tag{2.3}$$

$$\sigma_{22}^j = \operatorname{Re} \chi_2^j, \quad u_2^j = -c_j \operatorname{Im} \{a_j\chi_1^j + b_{1j}\chi_2^j\}$$

$$a_j = \frac{\beta_{1j}\beta_{2j} - \beta_j}{2\mu_j R_j}, \quad b_{mj} = \frac{\beta_{mj}(1 - \beta_j)}{2\mu_j R_j}, \quad \beta_{mj} = \sqrt{1 - \frac{c_j^2}{c_{mj}^2}}$$

$$z_{mj} = x + i\beta_{mj}y, \quad \beta_j = {}^1/_2 (1 + \beta_{2j}^2), \quad R_j = \beta_{1j}\beta_{2j} - \beta_j^2$$

Здесь c_{1j}, c_{2j} — скорости объемных волн расширения и сдвига, μ_j — модули сдвига, R_j — функции Релея (c_{Rj} — единственные положительные корни уравнений Релея $R_j(c) = 0$), $m, j = 1, 2$.

Из условия конечности потока F вытекают оценки

$$(2.4) \qquad |\chi_m^j| < \mathrm{const} \cdot |z|^{-1/2}, \quad z = z_{lj} \to 0, \quad j, m, l = 1, 2$$

Равенства $[\sigma_{12}] = [\sigma_{22}] = 0$, справедливы для всех условий 1) — 4), будут удовлетворены, если определить связь между функциями χ_m^j соотношениями аналитических продолжений

$$(2.5) \qquad \chi_1^1(z) = -\overline{\chi_1^2(\bar{z})} \equiv \chi_1(z), \quad \chi_2^1(z) = \overline{\chi_2^2(\bar{z})} \equiv \chi_2(z)$$

Обратное верно [2]. С учетом (2.3), (2.5) имеем

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} &[u_1] = c\,\mathrm{Re}\,\{q\chi_1 + d\chi_2\}, \ [u_2] = -c\,\mathrm{Im}\,\{d\chi_1 + p\chi_2\} \\ &d_1 = a_1 - c_0 a_2, \quad p = b_{11} + c_0 b_{12}, \ q = b_{21} + c_0 b_{22} \\ &c = c_1, \ c_0 = c_2/c_1 = 1 + v_1^\circ/c \end{aligned}$$

Скорости c_1 и c_2 порядка волновых скоростей (иначе — квазистатика). Поэтому на практике, как правило, $v_1^\circ/c \ll 1$ — скорости движения самих упругих тел — малы по сравнению с волновыми. Исключением является рикошет, когда скорость относительного движения v_1° может быть соизмерима со скоростями c_{2j}, а линейное приближение еще сохраняет силу. В условиях 2), 3) и ниже рассматривается приближение $c_0 \approx 1$.

Для дальнейшего важен анализ нулей функций Релея p (c), q (c), $s(\mathrm{c}) = d^2 - pq$, а также функций d (c) ($\mathrm{c} = (c_1, c_2)$). При $c_1 = c_2$ ($v_1^\circ = 0$) этот анализ и разъяснение физического смысла нулей — скоростей различного типа граничных волн Релея — можно найти в [2, 8, 9]. При $v_1^\circ \neq 0$ в силу сделанных замечаний, а также из-за большого числа параметров и возможных вариантов его целесообразно проводить при конкретных реализациях. Нули указанных функций и решения уравнения $c_1 c_2 = 0$ выкалываются из рассматриваемой области дозвуковых скоростей $|c_j| < c_{2j}$. Получающееся множество скоростей обозначим C° (остальные параметры фиксированы). Иногда вырожденные ситуации рассматриваются отдельно.

3. Математический метод решения. Рассмотренные ниже задачи при использовании комплексных представлений и (2.5) сводятся к краевой задаче Римана—Гильберта: найти голоморфную в верхней полуплоскости z вектор-функцию $X(z) = (\chi_1, \chi_2)$, непрерывно продолжимую на действительную ось всюду, за исключением точки $z = 0$, по краевому условию

$$(3.1) \qquad \mathrm{Im}\,\{DX\} = 0, \ y = +0, \ 0 < |x| < \infty$$

где D — кусочно-постоянная невырожденная матрица, принимающая значения D_0, D_1 при $x < 0$, $x > 0$, ограничению (2.4) в особой точке $z = 0$ и дополнительным условиям, вытекающим из (2.1) — (2.3), (2.6) (здесь не конкретизируются). Отличие от формулировок обобщенных задач Римана—Гильберта [10] заключается в отсутствии требования конечности порядка на бесконечности.

Наметим общий подход к решению задачи (3.1) на основе исследования обобщенной краевой задачи Римана—Гильберта [10, 11]. Часто задача сразу распадается на цепочку из двух скалярных задач для компонент, каждая из которых линейной подстановкой приводится к виду

$$(3.2) \qquad \mathrm{Im}\,\chi = G_1(x), \ x > 0; \ a\mathrm{Re}\,\chi - b\,\mathrm{Im}\chi = G_2(x), \ x < 0$$

где $a, b \in R^1$, G_1, G_2 — непрерывные по Гельдеру в своих областях определения действительные функции, для одной из компонент непременно будет $G_1 = G_2 \equiv 0$. Общее решение (3.2) представимо в виде суммы частного решения неоднородной задачи χ°, которое ниже, как правило, легко подобрать, и общего решения соответствующей однородной задачи — произведения канонического решения z^ρ [11] на степенной ряд

(3.3) $\quad \chi = z^\rho P_N(z) + \chi^\circ(z), \; P_N = N_0 + N_1 z + \ldots$

$\rho = \pi^{-1} \operatorname{arctg}(a/b), \quad b \neq 0; \; \rho = -^1/_2, \; b = 0; \; N_n \in R^1$

Разрез для униформизации встречающихся неоднозначных функций всегда проводим вдоль полуоси $y = 0$, $x \leqslant 0$, а ветви выбираем согласно условию $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

Если задача не расщепляется сразу, сведем ее к задаче Гильберта [10]. Введем кусочно-голоморфный вектор $\mathrm{Y}(z)$ с линией скачков $y = 0$ по правилу

(3.4) $\quad \mathrm{Y}(z) = D_1\chi, \; y > 0; \quad \mathrm{Y}(z) = \overline{\mathrm{Y}(\bar z)}, \quad y < 0$

Сформулируем задачу сопряжения для вектора $\mathrm{Y}(z)$

(3.5) $\quad \mathrm{Y}^+ = \mathrm{Y}^-, \quad x > 0; \quad \mathrm{Y}^+ = A\mathrm{Y}^-, x < 0; \quad A = D_1 D_0^{-1} \bar D_0 \bar D_1^{-1}$

(3.6) $\quad \mathrm{Y}(z) = \overline{\mathrm{Y}(\bar z)}, \quad y < 0; \quad |\mathrm{Y}| < \mathrm{const} \cdot |z|^{-1/2}, \quad z \to 0$

где индексами плюс или минус отметим сужение на ось $y = 0$ сверху или снизу. Найдем собственные значения матрицы A, следуя [10, 12]

(3.7) $\quad \det(A - \lambda E) = 0$

В рассматриваемом случае имеем два корня уравнения (3.7), $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, особые точки в силу (2.4) регулярные [12]. Если корни простые ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то существуют два линейно независимых решения (3.6) [12]

(3.8) $$W_m = z^{\rho_m} \sum_{n=0}^{\infty} N_n^{(m)} z^n, \quad m = 1, 2, \quad N_n^{(m)} \in C, \quad \rho_m = \frac{\ln \lambda_m}{2\pi i}$$

где показатели ρ_m однозначно выбираются из интервала $-^1/_2 \leqslant \operatorname{Re} \rho_m < {}^1/_2$, т. е. $\ln \lambda_m$ — ветвь $\operatorname{Ln} \lambda_m$ при $-\pi \leqslant \arg \lambda_m \leqslant \pi$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то линейно независимые решения имеют более сложную структуру [12]

(3.9) $$W_1 = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} N_n^{(1)} z^n, \quad W_2 = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} N_n^{(2)} z^n + M \ln z \; W_1(z)$$

$$\rho = (\ln \lambda_1)/(2\pi i), \; M, N_n^{(m)} \in C$$

Решение $\chi(z)$ выражается через вектор $\mathrm{W} = (W_1, W_2)$ посредством линейного преобразования

(3.10) $\quad \chi = B\mathrm{W}$

На коэффициенты невырожденной матрицы $B = \{B_{lm}\}$ накладываются определенные связи, которые желательно выявить. Для этого допустим возможность диагонализации матрицы при помощи матрицы T [13]

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}, \quad T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{Vmatrix}$$

Подстановка $\mathrm{Y} = T\mathrm{W}$ в (3.5) приводит к расщепленной задаче сопряжения для вектора W

(3.11) $\quad \mathrm{W}^+ = \mathrm{W}^-, \; x > 0; \; \mathrm{W}^+ = \Lambda \mathrm{W}^-, \; x < 0$

решение которой при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ определено формулой (3.8), а решение исходной задачи (3.1) теперь запишется в виде

$$\chi = D_1^{-1}(Y_1,\ Y_2),\ Y_1 = W_1 + W_2,\ Y_2 = t_1 W_1 + t_2 W_2$$

На коэффициенты $N_n^{(m)}$ накладываются условия, вытекающие из первого требования (3.6): $T\mathbf{W}(z) = \overline{T\mathbf{W}(\bar{z})}$. Так, если числа ρ_m действительны (и различны), то это равенство эквивалентно условию $W_m(z) = \overline{W_m(\bar{z})}$, а значит

$$N_n^{(m)} \in R^1,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 1, 2$$

Если числа ρ_m комплексные, то

$$\rho_1 = \bar{\rho}_2,\ t_1 = \bar{t}_2,\ z^{\rho_1} = \overline{\bar{z}^{\rho_2}}$$

$$\mathbf{W}(z) = T^{-1}\overline{T}\,\overline{\mathbf{W}(\bar{z})} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \overline{\mathbf{W}(\bar{z})} \Rightarrow W_m(z) = \overline{W_l(\bar{z})}$$

и необходимые и достаточные ограничения на коэффициенты $N_n^{(m)}$ таковы:

$$N_n^{(l)} = \overline{N_n^{(m)}};\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots;\ m,\ l = 1,\ 2;\ m \neq l$$

В случае кратных корней преобразование $\mathbf{Y} = T\mathbf{W}$ становится вырожденным, а задача (3.11) порождает только одно линейно независимое решение. Другое, как показано в [12], имеет вид (3.9), а связь между коэффициентами B_{lm} и ограничения на коэффициенты M, $N_n^{(m)}$ будем искать непосредственной подстановкой (3.10) в (3.1).

Решения (3.8), (3.9) образуют подгруппы подобия, как того требует однородность краевых условий. Функции $b_1 W_m(b_2 z)$, b_1, $b_2 \in R^1, m = 1, 2$ также являются решениями.

Ниже анонсируются результаты без промежуточных выкладок и, как правило, без ссылок на этот пункт.

4. Скольжение с сухим трением — отрыв. Сформулируем краевую задачу для вектора $\chi(z)$, адекватную физической задаче для двух упругих полуплоскостей при условии контакта с проскальзыванием и сухим трением в области $x < 0$, $y = 0$ и отсутствия напряжений при $x > 0$, $y = 0$

$$\text{(4.1)}\qquad \begin{aligned} &\operatorname{Im}\chi_1 = \operatorname{Re}\chi_2 = 0,\ p\operatorname{Im}\chi_2 \geqslant 0,\ x > 0 \\ &\operatorname{Im}\chi_1 = -k_1\operatorname{Re}\chi_2,\ \operatorname{Im}\{d\chi_1 + p\chi_2\} = 0,\ k_1 v_1 > 0,\ x < 0 \end{aligned}$$

где учтено условие (2.1). Примем во внимание также условия (2.2), (2.4).

Данная задача расщепляется на однородную задачу для компоненты χ_2 и неоднородную задачу последующего определения функции χ_1, решения которых

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{aligned} &\chi_1 = P_M(z) + k_1 z^\rho P_N(z),\ \chi_2 = iz^\rho P_N(z),\ y \geqslant 0 \\ &\rho = \pi^{-1}\operatorname{arctg}[-p/(k_1 d)],\ d \neq 0 \\ &[u_1] \sim cqk_1 x^{\rho+m} N_m + cqM_0,\ [u_2] \sim -cpx^{\rho+m}N_m,\ x > 0 \\ &\sigma_{12} = -k_1\sigma_{22},\ \sigma_{22} \sim (-1)^{m+1}\sin(\pi\rho)\,|x|^{\rho+m} N_m \\ &[u_1] \sim (-1)^m cq_0 k_1^{-1}\cos(\pi\rho)\,|x|^{\rho+m}N_m + cq\,M_0,\ x < 0 \\ &F = 0,\ q_0 = k_1^2 q + p \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что первые коэффициенты N_0, N_1 могут обратиться в нуль. Выбор числа m осуществим при проверке неравенств из (4.1) и (2.2) при условии, что m — наименьшее из возможных целых чисел. Знаки функций всегда определяем по знаку старшего члена асимптотики при $|x| \to 0$. Сформулируем результаты этого анализа. Область существования сингулярного решения ($\rho < 0$, $dpk_1 > 0$, $N_0 < 0$, $m = 0$) есть множество точек $c \in C_*$, задаваемое формулой

(4.3) $$p < 0 \cap \{cq_0 < 0 \cup [q_0 = 0 \cap dp\,(cq\,M_0 + v_1^\circ) > 0\}$$

Это область сверхрелеевских дозвуковых скоростей соударения. В остальных случаях решение непрерывно в точке $z = 0$, а выбор числа m производится согласно условиям ($v_1 \approx v_1^\circ + cqM_0 \neq 0$)

(4.4) $$\begin{aligned} &dv_1 < 0 \cap p \geqslant 0 \Rightarrow m = 0,\ \rho > 0,\ N_0 > 0 \\ &dv_1 < 0 \cap p < 0 \Rightarrow m = 2,\ \rho < 0,\ N_2 < 0 \\ &dv_1 > 0 \Rightarrow m = 1 \end{aligned}$$

откуда следует исключить решения (4.3). Системы неравенств (4.3), (4.4) не противоречивы, а их решения не пересекаются, что свидетельствует в пользу разрешимости исходных постановок задач. Вариант $N_0 = N_1 = 0$ реализуется при сверхрелеевских дозвуковых скоростях отскока, если $c_1 \approx c_2 < 0$.

Перейдем к анализу предельных ситуаций. Случай $q = 0$ ничем не примечателен. При $p = 0$ $\rho = 0$ и решение регулярно в точке $z = 0$. В важном частном случае $d = 0$ (например, одинаковые материалы и $c_1 = c_2$) изменения в формулах (4.2) — (4.4) таковы:

(4.5) $$\begin{aligned} &\rho = -{}^1\!/_2,\ F = -{}^1\!/_2\,\pi cpN_0^2 \geqslant 0,\ pN_m \geqslant 0,\quad (-1)^m N_m < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow p \leqslant 0 \ \cap\ cp < 0 \Rightarrow m = 0,\ N_0 < 0 \\ &p > 0 \Rightarrow m = 1,\ N_1 > 0,\ N_0 = 0 \\ &p < 0 \cap cp > 0 \Rightarrow m = 2,\quad N_2 < 0,\quad N_0 = N_1 = 0 \end{aligned}$$

(по поводу вычисления потока F при $\rho = -{}^1\!/_2$ см. [3,14]; $F = 0$ при $\rho > -{}^1\!/_2$).

В другом предельном случае $k_1 = 0$ (трение отсутствует)

(4.6) $$\chi_1 = P_M\,(z),\ \chi_2 = iz^{-1/2}P_N\,(z)$$

а система неравенств из (4.5), определяющая выбор числа m — номера начала ряда $P_N\,(z)$, остается в силе.

5. Скольжение с вязким трением — отрыв. Краевые условия задачи Римана — Гильберта формулируются следующим образом ($y = 0$):

(5.1) $$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\chi_1 = \operatorname{Re}\chi_2 = 0,\ p^\circ \operatorname{Im}\chi_2 \geqslant 0,\ x > 0 \\ &\operatorname{Im}\chi_1 = \eta c \operatorname{Re}\{q\chi_1 + d\chi_2\} + \eta v_1^\circ, \\ &\operatorname{Im}\{d\chi_1 + p\chi_2\} = 0,\ x < 0 \end{aligned}$$

и следует присовокупить условия (2.2), (2.4). Частное решение найдем в виде

$$\chi_1^\circ = -(cq)^{-1}v_1^\circ,\quad \chi_2^\circ \equiv 0,\quad q \neq 0;\quad \chi_1^\circ = \pi^{-1}\eta v_1^\circ \ln z,\ \chi^\circ_2 = ip^{-1}d\eta v^\circ_1,\quad q = 0;$$

Следуя п. 3, введем вектор $\mathbf{Y} = (\chi_1, i\chi_2)$, для которого получим задачу (3.5), (3.6), где

$$D_0 = \begin{Vmatrix} \gamma & -2\eta c\,dp \\ 2\eta c\,dq & -\bar{\gamma} \end{Vmatrix} \frac{1}{\Delta},\quad \gamma = p + i\eta cs_0$$

$$\Delta = p + i\eta cs,\ s = d^2 - pq,\ s_0 = d^2 + pq$$

Вычислим корни уравнения (3.7) и коэффициенты диагонализирующей матрицы T

(5.2) $$\begin{aligned} &\lambda_{1,2} = \Delta^{-1}\,(i\eta cs_0 \pm \sqrt{b}),\ b = p^2 + \eta^2c^2\,(s^2 - s_0^2) \\ &\sqrt{b} > 0,\quad b > 0;\ \sqrt{b} = i\sqrt{|b|},\ b < 0 \\ &t_{1,2} = (2\eta\ cdp)^{-1}(p \mp \sqrt{b}) \end{aligned}$$

Важную роль при дальнейшем анализе играет функция b ($\mathbf{c}$). Переход через нули этой функции означает качественный переход от решений с монотонными особенностями к решениям с особенностями осциллирующего типа. Можно убедиться в том, что по крайней мере при $c_1 = c_2$ нули этой функции существуют, в том числе и в дорелеевском диапазоне скоростей. Из-за большого числа возможных вариантов подробный анализ нулей функции b проводить не будем, а обозначим C_+ множество точек $\mathbf{c} \in R^2$, где $b > 0$ (остальные параметры фиксированы), C_- — множество точек, где $b < 0$, и C_0 — множество нулей функции b.

Пусть $\mathbf{c} \in C_+$. Тогда имеем случай простых корней λ_m и действительных показателей ρ_m. Как следует из (3.8), (5.2)

$$(5.3)\qquad |\lambda_m| = 1, \quad -{}^1/_2 < \rho_m < {}^1/_2, \quad t_1 t_2 = \frac{q}{p}, \quad \rho_{1,2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{p \mp \sqrt{b}}{2\eta c d^2};$$

$$t_1, t_2 \in R^1$$

$$pq > 0 \cap cp < 0 \Rightarrow -{}^1/_2 < \rho_m < 0, \quad pq > 0 \cap cp > 0 \Rightarrow 0 < \rho_m < {}^1/_2,$$

$$m = 1, 2, \; pq < 0 \Rightarrow -{}^1/_2 < \rho_1 \operatorname{sgn} c < 0, \; 0 < \rho_2 \operatorname{sgn} c < {}^1/_2$$

Сделанных выше указаний о знаках ρ_m еще недостаточно, чтобы судить об областях сингулярности решений. Это выяснится окончательно при проверке неравенств. Общее решение задачи (5.1) имеет вид

$$(5.4)\qquad \chi_1 = W_1 + W_2 + \chi_1{}^\circ, \; i\chi_2 = t_1 W_1 + t_2 W_2$$

где функции W_m определены формулами (3.8). Из условий (2.1), (2.2) ($F = 0$) и формул (5.3), (5.4) следует вывод, что решение терпит бесконечный разрыв в точке $z = 0$ (по крайней мере, одно из чисел ρ_m отрицательно и $N_0^{(m)} \neq 0$, $m = 1, 2$) на множестве

$$p < 0 \cap \{(pq > 0 \cap cp < 0) \cup pq < 0\} \cap \mathbf{c} \in C_+$$

и непрерывно в остальной области C_+, в которой $N_0^{(m)} \neq 0$, если $p \geqslant 0 \cap \rho_m > 0$ и $N_0^{(m)} = 0$, если

$$(p > 0 \cap \rho_m < 0) \cup (p < 0 \cap \rho_m > 0)$$

Согласно сделанным замечаниям относительно коэффициентов интенсивности, можно выписать асимптотики напряжений и скоростей на границе раздела, используя (2.3), (2.6), (5.4), а также в области $|z| \ll 1$.

Множеству C_+ принадлежат нули функции q. Приведем решение в этом вырожденном случае

$$\chi_1 = -\eta c d z^\rho P_N(z) + \eta v_1{}^c \pi^{-1} \ln z, \quad \chi_2 = i z^\rho P_N(z) + \chi_2{}^\circ, \quad N_n \in R^1,$$

$$\rho = \pi^{-1} \operatorname{arctg}(p/(\eta c d))$$

Его анализ повторяет анализ решения п. 4. Любопытно, что при $q \neq 0$ частному решению $\chi_1{}^\circ = -(cq)^{-1} v_1{}^\circ$, $\chi_2{}^\circ = 0$ отвечают функции $[u_1] = -v_1{}^\circ$, $\sigma_{11}{}^j = \text{const}\ (j)$, $\sigma_{m2}^j \equiv 0$, $j, m = 1, 2$, т. е. оно компенсирует заданную скорость скольжения $v_1{}^\circ$.

В области C_- имеем

$$(5.5)\qquad \lambda_1 \bar{\lambda}_2 = 1, \; t_1 = \bar{t}_2, \; |t_1| = \sqrt{q/p}, \; qp > 0$$

$$\rho = \rho_1 = \rho' + i\rho'', \; \rho_2 = \bar{\rho}; \; 2\pi\rho' = \arg \lambda_1$$

$$-\pi < \arg \lambda_1 < \pi; \; 2\pi\rho'' = \ln |\lambda_2|$$

а решение $\chi(z)$ определено формулами (3.8), (5.4). Раскрытие $\delta(x)$ знакопеременно при $x > 0$ — следствие особенности осциллирующего типа. Удовлетворить условиям типа неравенств в C_- не удается. Следовательно, постановка задачи (5.1), а значит, и соответствующих исходных задач содержит дефект — такое сочетание условий сопряжения упругих полуплоскостей не реализуется, если $\mathbf{c} \in C_-$.

Вопрос устранения дефекта оставим открытым, но заметим, что зона осцилляции решения занимает область

$$|z| < 1 \cap |\rho'' \ln |z|| \gtrsim \pi \Rightarrow |z| < \exp(-2\pi^2/\ln|\lambda_1|) = l_0$$

$$|\lambda_1| = \beta_0 + \sqrt{\beta_0{}^2 - 1}, \; \beta_0 = |\Delta|^{-1} \eta c s_0 > 1$$

Видно, что для значений $|\lambda_1| \gtrsim 1$ характерный размер этой зоны l_0 чрезвычайно мал (можно ее не принимать во внимание). Тогда существует промежуточная асимптотика при $l_0 \ll |z| \ll L$, где L — внешний большой характерный размер. В этой области решение приближенно описывается формулами (5.4), (5.5) где следует положить $\rho'' = 0$, т. е. имеем монотонную асимптотику, для которой проверка дополнительных условий (2.1), (2.2) уже имеет смысл. В итоге получим: $N_0 \neq 0$; $p > 0 \Rightarrow \Rightarrow \rho' > 0$; $p < 0 \Rightarrow \rho' < 0$. Однако имеются скорости, при которых $\ln |\lambda_1| \gg 1$. Это — окрестности точек $c_j = C_{Rj} \in C_-$ ($|\lambda_1| \to \infty$ при $|c_j| \to C_{Rj}$). Зона осцилляции решения разрастается при околорелеевских скоростях и найденное решение теряет смысл. Аналогичное поведение решения отмечено при анализе сочетания отрыв — полный контакт [1, 9].

Мера области C_- равна нулю, а решение не приобретает осциллирующего характера при $\eta = 0$ (трение отсутствует) или $d = 0$. Можно сказать, что появление колебаний связано с наличием двух физических факторов: вязкого трения и разнородности материалов.

Пусть $\mathbf{c} \in C_0$, $\lambda_1 = \lambda_2$. При $p \neq 0$

$$p = 4\eta^2 c^2 q d^2,\ q \neq 0,\ d \neq 0,\ t_1 = t_2 = (2\eta c d)^{-1}$$

$$s = d^2(1 - \eta_0^2),\ s_0 = d^2(1 + \eta_0^2),\ \eta_0 = 2\eta c q \neq 0$$

$$\rho = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \eta_0,\ \operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn}(cq),\ p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \rho = 0$$

Линейно независимые решения W_m определены в (3.9), где M, $N_n^{(m)} \in R^1$. Связь между коэффициентами $B_{ml} \in R^1$ и M определим подставляя (3.10) в (5.1) и приравнивая коэффициенты при слагаемых одинаковой мощности. Опуская подробности громоздкого анализа, приведем результат. На пять чисел B_{ml} и M следует наложить два условия:

$$B_{22} = t_1 B_{12},\ B_{21} = t_1 B_{11} + \pi t_1 (\eta_0 + \eta_0^{-1}) M B_{12}$$

и, поскольку W_1 и W_2 уже содержат по произвольному множителю, можно положить $B_{11} = B_{12} = 1$. Таким образом

(5.6) $$\chi_1 = W_1 + W_2 - v_1^\circ/(cq),\ i\chi_2 = t_3 W_1 + t_1 W_2,\ t_3 = t_1 + \pi t_1 (\eta_0 + \eta_0^{-1}) M$$

Можно проверить, что (5.6) удовлетворяет всем исходным краевым условиям типа равенств. Удовлетворяя неравенствам (2.1), (2.2), придем к выводу:

$$p \leqslant 0 \cap cq < 0 \Rightarrow \rho < 0,\quad N_0^{(m)} \neq 0,\quad pcq < 0 \Rightarrow N_0^{(m)} = 0,\quad N_1^{(m)} \neq 0$$

$$p \geqslant 0 \cap cq > 0 \Rightarrow \rho > 0,\quad N_0^{(m)} \neq 0,\ m = 1, 2$$

При этом $F = 0$ в силу $\rho > -{}^1/_2$.

Приведем решение для случая $d = 0$ ($\mathbf{c} \in C^\circ$)

$$\chi_1 = z^\rho P_M(z) + \chi_1^\circ,\quad \chi_2 = iz^{-1/2} P_N(z),\quad M_n, N_n \in R^1$$

$$\rho = \pi^{-1} \operatorname{arctg}(\eta c q),\ \operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn}(cq)$$

Проверкой условий (2.1), (2.2) устанавливаем

(5.7) $$d = 0 \cap cp < 0 \cap p < 0 \Rightarrow N_0 < 0,\ F = -{}^1/_2 \pi N_0^2\, cp$$

При остальных значениях нулей функции $d(\mathbf{c})$: $N_0 = 0$, $F = 0$.

6. Скольжение с постоянным сопротивлением сдвигу — отрыв. В предыдущих вариантах силы трения иногда растут до бесконечности при приближении к точке Q. Естественно наложить ограничения на эти силы трения (что неоднократно указывалось в литературе), например, полагая $\sigma_{12} = \tau_1 = \text{const}$, $\tau_1 v_1 > 0$ в зоне контакта. Такое условие можно интерпретировать как наличие тонкой полосы пластического течения (например, [15]). Соответствующая задача для функции $\chi(z)$ сразу распадается, ее решение приводится ниже

$$\chi_1 = P_M(z) + \pi^{-1}\tau_1 \ln z,\ \chi_2 = iz^{-1/2} P_N(z) + id\tau_1/p$$

$$M_n, N_n \in R^1,\ p \neq 0$$

При $p = 0$ условия задачи противоречивы ($\tau_1 \neq 0$). Проверяя неравенства и условие согласования знаков τ_1 и v_1, приходим к следующим выводам:

(6.1) $\quad c \in C_1 \Rightarrow N_0 < 0, \quad F = -{}^1/_2\, \pi N_0^2 \; cp; \quad C_1 = \{c : p \leqslant 0 \cap \cap\, cp < 0\}$

при этом $d \neq 0 \Rightarrow cd\, \tau_1 < 0$, $d = 0 \Rightarrow cq < 0$.

(6.2) $\quad c \overline{\in} C_1 \Rightarrow F = N_0 = 0, \; N_1 > 0$; при этом $d \neq 0 \Rightarrow pd\tau_1 p < < 0; \; d = 0 \Rightarrow p > 0; \; q \neq 0 \Rightarrow cq < 0; \; q = 0 \Rightarrow \tau_1 v_1 > 0$

Анализ случаев $N_0 = N_1 = 0$, $N_2 \neq 0$, . . . не изменяет принципиально условий (6.2). Поэтому заключаем, что изучаемый режим соударения реализуется не при всех дозвуковых значениях скоростей c. В условиях (6.1) решение сингулярно, в условиях (6.2) — содержит $\ln z$, но кроме «непринадлежности» c области, указанной в (6.1), требуется выполнение условия $cq \leqslant 0$. Важно, однако, выяснить, имеются ли пересечения области нереализации условия контакта $\sigma_{12} = \tau_1$ с областями сингулярности в случаях сухого и вязкого трения. Можно строго показать, что эти пересечения — пустые множества. Отсюда вывод: когда необходимо ограничить трение, схема с тонкой пластической полосой пригодна; когда же эта схема непригодна (пластичность нельзя сразу ввести за точкой контакта Q), можно заменить условие пластичности одним из условий трения и получить физически осмысленный результат (с оговорками п. 5) с плавным нарастанием напряжений на площадке контакта. Другими словами, задача определения особенностей с альтернативными условиями на площадке контакта (трение, условие пластичности) является разрешимой.

7. Отрыв — условия типа «гребешка». Этот случай моделирует, например, сцепление зубчатых передачи с мелкими и частыми зубьями. Краевая задача (3.1) с условиями 1) — 4) расщепляется, а ответ такой:

$$\chi_1 = z^{-1/2} P_N(z), \; \chi_2 = iP_M(z), \quad N_n, M_n \in R^1$$
$$cq \geqslant 0 \Rightarrow N_0 \neq 0, \; F = {}^1/_2\, \pi cq \; N_0^2 \geqslant 0; \; cq < 0 \Rightarrow N_0 = F = 0$$

Напряжения и скорости сингулярны, в частности в интервале скоростей $0 < c < c_{Rj}$, $j = 1,2$ (происходит «зацепление зубьев шестерен»). В противоположном случае $0 < -c < c_{Rj}$ искомые функции непрерывны.

8. Постановка задач о плоском сдвиге. Для уравнений плоского сдвига (w — смещение в направлении оси x_3)

(8.1) $$\beta^2_{2j} w^j_{,xx} + w^j_{,yy} = 0, \quad \sigma_{13}{}^j = \mu_j w_{,x}{}^j$$
$$\sigma_{23}{}^j = \mu_j w_{,y}{}^j, \quad u_3{}^j = -c_j w_{,x}{}^j$$

рассмотрим следующие краевые условия ($y = 0$, $j = 1, 2$).

1°. Отсутствие напряжений (отрыв или скольжение без трения)

$$\sigma_{23}{}^j = 0$$

2°. Скольжение с сухим трением

$$\sigma_{23}{}^j = -k_3 \sigma_{22}{}^j, \quad \sigma_{23}{}^j v_3 > 0, \quad [\sigma_{22}] = 0$$

3°. Скольжение с вязким трением

$$\sigma_{23}{}^j = \eta v_3 \neq 0 \quad (v_3 = v_3{}^\circ + [u_3])$$

Дополнительными условиями ко всем случаям являются неравенства (2.2). Введем кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z_{2j})$ по формулам

(8.2) $$\Phi = c_j^{-1} \mu_j \beta_{2j} u_3{}^j + i\sigma_{23}{}^j; \; \Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar z)}, \; y > 0$$
$$\sigma_{23}{}^j = \operatorname{Im} \Phi(z_{2j}), \quad [u_3] = \beta \operatorname{Re} \Phi(x + i0), \quad \beta = \frac{c_1}{\mu_1 \beta_{21}} + \frac{c_2}{\mu_2 \beta_{22}}$$

что эквивалентно удовлетворению уравнения движения в области и условия $[\sigma_{23}] = 0$ на границе раздела.

9. Скольжение с сухим трением — отрыв. В краевые условия для определения функции $\Phi(z)$, отвечающие физическим условиям 1° и 2°

$$\operatorname{Im}\Phi = 0, \quad x > 0; \ \operatorname{Im}\Phi = -k_3\sigma_{22}(x, 0), \ v_3 \operatorname{Im}\Phi > 0, \ x < 0 \ (y = 0)$$

будем подставлять выражение для σ_{22} из решения (4.2).

Полным решением поставленной задачи служит функция

$$\Phi = k_3 z^\rho P_N(z) + P_L(z), \ L_n \in R^1, \ \operatorname{Im} z > 0 \tag{9.1}$$

Выпишем асимптотики ($y = 0$)

$$\sigma_{23} = 0, \ [u_3] \sim \beta k_3 x^{\rho+m} N_m + \beta L_0, \ x > 0$$

$$\sigma_{23} \sim (-1)^m k_3 \sin(\pi\rho) \, |x|^{\rho+m} N_m,$$

$$[u_3] \sim (-1)^m \beta k_3 \cos(\pi\rho) \, |x|^{\rho+m} N_m + \beta L_0$$

где число m пока выбирается по правилам (4.3), (4.4). Из условия согласования знаков v_3 и k_3 в случае $\rho < 0$, $m = 0$, $N_0 < 0$, когда знак v_3 определяет слагаемое $\sim |x|^\rho$, следует неравенство $\beta < 0$. Оно не полностью согласуется с (4.3). Таким образом, совместное сингулярное решение реализуется на суженном по сравнению с (4.3) подмножестве скоростей, а именно на пересечении

$$C_2 = \{\mathbf{c} : \beta < 0 \cap C_*\} \tag{9.2}$$

При этом априорные условия (1.3) асимптотически удовлетворяются. Если $c_1 = c_2 = c$, то (9.2) упрощается:

$$C_2 = \{\mathbf{c} : c < 0 \cap p < 0 \cap [(qk_1^2 + p) > 0 \cup (qk_1^2 = -p \cap dv_1 < 0)]\} \tag{9.3}$$

и видно, что мера подмножества C_2 существенно меньше меры множества C_* ($\operatorname{mes} C_2 \to 0$ при $k_1 \to 0$). При $\mathbf{c} \overline{\in} C_2$ вынуждены полагать $m + \rho > 0$, а число m определено расширенными правилами (4.4). Тогда решения (4.2), (9.1) не сингулярны, а

$$k_l = kv_l / |\mathbf{v}|, \ v_1 \approx cqM_0 + v_1^\circ, \ v_3 \approx \beta L_0 + v_3^\circ, \ l = 1, 3$$

т. е. условия (1.3), принятые по предположению, асимптотически точны, причем погрешность составляет $O(|x|^{m+\rho}) + O(x)$, $x \to -0$.

При $k = 0$ решение (9.1) регулярно при всех $\mathbf{c} \in C^\circ$, а решение (4.6) сингулярно в области (4.3), где следует приравнять $k_1 = 0$. Всякая связь между этими решениями утрачивается, но показано, что вырождение $k \to 0$ иногда нерегулярно.

Сделаем общие выводы, касающиеся случая контакта с сухим трением. В C° существуют диапазоны скоростей точки Q, образующие подмножество C_2, где решения (9.1), (4.2) сингулярны и не противоречат всем принятым допущениям. На подмножестве $C^\circ \setminus C_2$ эти решения непрерывны и, более того, имеются скорости, при которых они обладают гладкостью в особой точке согласно (4.4). Судя по (9.2), (9.3) мера области сингулярности решений мала по сравнению с $\operatorname{mes} C^\circ$ и лежит в сверхрелеевском диапазоне скоростей.

10. Скольжение с вязким трением — отрыв. Удовлетворяя краевым условиям

$$\operatorname{Im}\Phi = 0, \ x > 0; \ \operatorname{Im}\Phi = \eta\beta \operatorname{Re}\Phi + \eta v_3^\circ, \ x < 0$$

по обычной схеме, получим

$$\Phi = z^\rho P_L(z) - v_3^\circ \beta^{-1}, \ -1/2 < \rho = \operatorname{arctg}(\eta\beta) < 1/2, \ L_n \in R^1$$

Поле скоростей $u_3^j(x, y)$ аналогично плоской деформации (п.5) приобретает постоянные, компенсирующие заданную скорость проскальзывания тел как жестких. Решение сингулярно при $\beta < 0$ и непрерывно при $\beta > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Achenbach J. D., Bažant Z. P., Khetan R. P.* Elastodynamic neartip fields for a rapidly propagation interface crack.— Intern. J. Engng Sci., 1976, v. 14, No. 9, p. 797—809.
2. *Симонов И. В.* О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела упругих материалов.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 497—506.
3. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 112—125.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
5. *Freund L. B., Clifton R. J.* On the uniqueness of plane elastodynamic solutions for running cracks.— J. Ela st., 1974, v. 4, No. 4, p. 293—299.

6. *Freund L. B.* The mechanics of dynamic shear crack propagation.— J. Geophys. Res. Ser. B., 1979, v. 84, No. 5, p. 2199—2209.
7. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
8. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
9. *Гольдштейн Р. В.* О стационарном распространении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов.— Инж. журн. МТТ, 1966, № 5, с. 93—102.
10. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1974. 672 с.
13. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
14. *Ахенбах Дж. Д.* Распространение волн, сингулярные эластодинамические напряжения и разрушение.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика: Тр. 14-го Междунар. конгр. IUTAM. М.: Мир, 1979, с. 214—250.
15. *Костров Б. В.* Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1985