Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ТЕЛ С ТРЕНИЕМ

Спектор А. А.

Рассматриваются пространственные контактные задачи о взаимодействии в условиях трения движущегося упругого тела и упругого основания. Искомые поля сил трения и проскальзывания зависят от времени. Формулируется граничная задача в скоростях, которая сводится к параболическому вариационному неравенству. Предлагается его разностная аппроксимация, при помощи которой обосновывается постановка задачи в приращениях. Предлагается ряд методов численного решения задачи. Исследуется поведение во времени решения нестационарной задачи.

Впервые эффекты нестационарности в контактных задачах с трением рассматривались для условий сдвига тела относительно основания [1]. Изучались [2] пространственные задачи, сформулированные в приращениях искомых функций. Исследовались [3] квазистатические задачи в приращениях и динамические задачи о контакте штампа и упругого тела конечных размеров. Методика сведения нестационарных параболических задач к последовательности вариационных задач (применительно к проблемам вязкопластических течений) применялась в [4, 5].

1. Кинематические соотношения. Граничные условия. Рассмотрим движение упругого тела по упругому основанию с плоской поверхностью. Будем считать, что скорости контактирующих поверхностей складываются из скоростей тела и основания, рассматриваемых как абсолютно жесткие, и добавочных скоростей, которые возникают от упругих деформаций в области контакта. Введем систему координат $Oxyz$ с началом в точке касания тела и основания в недеформированном состоянии, движущуюся по основанию со скоростью этой точки $\mathbf{V}$ (V_x, V_y). Пусть $\mathbf{v}^\pm$ $(v_x^\pm, v_y^\pm)$ — поле касательных скоростей поверхности тела и основания в окрестности точки O без учета упругих деформаций, $\mathbf{u}^\pm$ $(u_x^\pm, u_y^\pm)$ — упругие касательные смещения точек этих поверхностей. Тогда для полных касательных скоростей $\mathbf{s}^\pm$ и скоростей проскальзывания поверхностей в области контакта $\mathbf{s}$ будем иметь

$$\mathbf{s}^\pm = \mathbf{v}^\pm + \frac{d\mathbf{u}^\pm}{dt} = \mathbf{v}^\pm + \mathbf{u}^{\cdot\pm} + \mathbf{v}^\pm \operatorname{grad} \mathbf{u}^\pm \tag{1.1}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{u}^{\cdot} - \mathbf{V} \operatorname{grad} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-, \quad \mathbf{u}^{\cdot} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{1.2}$$

Полагая в дальнейшем, что $\mathbf{v}$ — функция x, y, t, будем для простоты считать, что скорость $\mathbf{v}$ не меняется во времени.

Три слагаемых в правой части первого равенства (1.2) определяют «жесткую», местную (следствие нестационарности процесса) и переносную (следствие движения системы координат) составляющие скорости проскальзывания. Ниже будем рассматривать наряду с общим случаем учета всех указанных составляющих (например, при качении с проскальзыванием) и случай медленного движения тела, когда переносные скорости много меньше остальных составляющих проскальзывания и могут не приниматься во внимание. Последнее имеет место при сдвиге относительно основания первоначально покоившегося тела, когда скорость его перемещения имеет порядок скоростей упругих деформаций.

Граничные условия, которые в силу локальности контакта сносятся на плоскость $z = 0$, имеют вид

$$(1.3) \qquad w = w^+ - w^- > \delta - f^+ = F,\ \sigma_{zz} = |\tau| = 0$$
$$w = F,\ \sigma_{zz} \leqslant 0$$

$$(1.4) \qquad |\mathbf{s}| = 0,\ |\boldsymbol{\tau}| \leqslant -\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}$$
$$|\mathbf{s}| > 0, \quad \boldsymbol{\tau} = -\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}\mathbf{s}/|\mathbf{s}|$$

где $w^\pm$ — упругие нормальные перемещения поверхностей тела и основания, σ_{zz} — нормальные, $\boldsymbol{\tau}$ (τ_{xz}, τ_{yz}) — касательные напряжения на поверхности, f^+ — функция, задающая поверхность тела, δ — нормальное сближение тела и основания. Функцию F будем считать не зависящей от времени.

Соотношения (1.3) описывают свободные поверхности тела и основания и область их контакта, соотношения (1.4) — условия трения в области контакта (в области сцепления и в области проскальзывания). Ниже ограничимся случаями, когда задача (1.3) определения области контакта и нормальных напряжений на ней отделяется от задачи (1.4) нахождения сил трения. Это будет, в частности, при одинаковых упругих постоянных тела и основания, либо когда одно из них несжимаемо, а другое абсолютно жесткое, либо оба они несжимаемы. В дальнейшем будем исследовать задачу (1.4) в предположении, что σ_{zz} и область контакта E определены. Методы их нахождения и примеры расчетов изложены, например, в [6—8].

Используя для поверхностных смещений те же выражения, что для двух полупространств $Z < 0$ и $Z > 0$, из (1.2) будем иметь

$$(1.5) \qquad \mathbf{s} = \mathbf{v} - B(\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{\cdot}}) + B^*(\boldsymbol{\tau}), \quad B^*(\cdot) = -V_x\frac{\partial}{\partial x}B(\cdot) - V_y\frac{\partial}{\partial y}B(\cdot)$$

где B — интегральный оператор с ядром

$$\frac{1}{\pi GR}\begin{Vmatrix}1-\nu\sin^2\theta & \nu\sin\theta\cos\theta\\ \nu\sin\theta\cos\theta & 1-\nu\cos^2\theta\end{Vmatrix}$$
$$G^{-1} = {}^1/_2(G_+^{-1} + G_-^{-1}), \quad \nu = {}^1/_2G(\nu_+G_+^{-1} + \nu_-G_-^{-1})$$
$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad \cos\theta = x - x'/R,\ \sin\theta = y - y'/R$$

$G_{+(-)}$, $\nu_{+(-)}$ — модули сдвига и коэффициенты Пуассона тела и основания.

Итак, сформулирована нестационарная граничная задача (1.4), (1.5) определения $\boldsymbol{\tau}(x, y, t)$. Для ее решения ниже используются следующие соображения. Система (1.4) (с учетом (1.5)) может быть записана в виде одного неравенства

$$(1.6) \qquad \boldsymbol{\tau}_0\mathbf{s}(\boldsymbol{\tau}_0) \geqslant \boldsymbol{\tau}\mathbf{s}(\boldsymbol{\tau}_0)$$

справедливого при любых x, y, t и выделяющего $\boldsymbol{\tau}_0$ — решение задачи (1.4) — среди функций $\boldsymbol{\tau}$, удовлетворяющих неравенству $|\boldsymbol{\tau}| \leqslant -\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}$. Действительно, в области сцепления левая и правая части (1.6) равны нулю, в области проскальзывания левая часть совпадает с величиной $-\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}|\mathbf{s}(\boldsymbol{\tau}_0)|$, а правая не превышает этой величины. Выделить $\boldsymbol{\tau}_0$ в семействе τ можно и в форме соотношения

$$(1.7) \qquad \boldsymbol{\tau}_0\mathbf{s}(\boldsymbol{\tau}_0) = \max_{|\boldsymbol{\tau}| \leqslant -\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}} \boldsymbol{\tau}\mathbf{s}(\boldsymbol{\tau})$$

Подчеркнем, что правая часть (1.6) в отличие от (1.7) не определяется варьируемой функцией τ. Поэтому разность правой и левой частей (1.6) не определяет приращения некоторого функционала. Однако в некоторых случаях она может определять часть приращения (например, линейную) функционала, и тогда при наличии его выпуклости этого достаточно для придания условию (1.6) эквивалентного экстремального вида. Таким образом, на основе (1.6), (1.7) могут быть получены различные вариационные формулировки граничной задачи, каждая из которых обладает определенными преимуществами.

2. Сведение к последовательности стационарных неравенств. Обоснование постановки в приращениях. Рассмотрим задачу на интервале $t \in [0, T]$. Введем пространства V и V' функций $f(x, y, t)$ с нормами, определяемыми равенствами

$$\|f\|^2_V = \int_0^T \int_E f^2\, dx\, dy\, dt, \quad \|f\|^2_{V'} = \|f\|^2_V + \int_0^T \int_E f^{\cdot 2}\, dx\, dy\, dt \tag{2.1}$$

Будем считать, что $\mathbf{f}(f_x, f_y) \in V$, если $f_{x(y)} \in V$. Пусть K — множество $\mathbf{f}$, таких, что $|\mathbf{f}| \leqslant -\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}$.

Теорема. 1. Пусть $\mathbf{v} \in V$, $\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz} \in L_2(E)$, тогда решение задачи (1.4), (1.5) при начальных условиях $\tau(0) = \tau^0$ эквивалентно нахождению фукции $\tau_0 \in K \cap V'$, которая для любого $\tau \in K \cap V'$ удовлетворяет эволюционному параболическому неравенству

$$\int_0^r \int_E [B(\tau_0^{\cdot}) - B^*(\tau_0) - \mathbf{v}](\tau - \tau_0)\, dx\, dy\, dt \geqslant 0 \tag{2.2}$$

$$\tau_0(0) = \tau^0, \quad r \in [0, T]$$

Доказательство. B и B^* представляют собой, соответственно, оператор со слабой особенностью и сингулярный интегральный оператор. Как известно [9], они действуют из $L_2(E)$ в $L_2(E)$. Таким образом, левая часть (2.2) определена.

Если функция τ_0 удовлетворяет $\forall t \in [0, T]$ условиям (1.4), то, очевидно, выполняются соотношения

$$G(\tau) \leqslant I(\tau_0), \; G(\tau_0) = I(\tau_0)$$

$$\left(G(\tau) = \int_0^r \int_E \mathbf{s}(\tau_0)\, \tau\, dx\, dy\, dt, \quad I(\tau_0) = -\int_0^r \int_E \rho(\sigma_{zz})\, \sigma_{zz}\, |\mathbf{s}(\tau_0)|\, dx\, dy dt\right)$$

Отсюда с учетом (1.5) получаем неравенство (2.2).

Для вывода граничных условий из (2.2) запишем (2.2) в виде $G(\tau) \leqslant G(\tau_0)$. Аналогично [10] показывается, что

$$\sup_{\tau \in K \cap V'} G(\tau) = I(\tau_0)$$

откуда вытекает

$$G(\tau_0) = I(\tau_0), \quad \int_0^r \int_E [\mathbf{s}(\tau_0)\, \tau_0 + \rho(\sigma_{zz})\, \sigma_{zz}\, |\mathbf{s}(\tau_0)|]\, dx\, dy\, dt = 0$$

Так как $\tau_0 \in K$, получаем, что при почти всех t и x, y выполняется равенство

$$\mathbf{s}(\tau_0)\, \tau_0 = -\rho(\sigma_{zz})\, \sigma_{zz}\, |\mathbf{s}(\tau_0)|$$

эквивалентное граничным условиям (1.4).

Перейдем к изложению методов решения (2.2). Сведем эволюционное неравенство (2.2) к последовательности стационарных эллиптических неравенств. Разобьем отрезок $[0, T]$ на равные интервалы $\Delta t = T/N$. Рассмотрим последовательность вариационных неравенств

$$(2.3)\qquad \int\limits_E [B(\tau_N^{k+1}-\tau_N^k)-\Delta t B^*(\tau_N^{k+1})-\mathbf{v}^k\Delta t](\tau-\tau_N^{k+1})\,dx\,dy \geqslant 0$$

$$\tau\in K,\quad 0\leqslant k\leqslant N-1,\quad \tau_N{}^0=\tau^0,\quad \mathbf{v}^k=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\mathbf{v}(t)\,dt$$

которые получаются путем неявной разностной аппроксимации [11] неравенства (2.2).

Теорема 2. При любых фиксированных k и N решение (2.3) существует и единственно в $L_2(E)$.

Доказательство. Ядро оператора B^* кососимметрично относительно переменных x, y и x', y', поэтому при любых τ_1, τ_2 справедливо равенство

$$(2.4)\qquad \int\limits_E \tau_1 B^*(\tau_2)\,dx\,dy=-\int\limits_E \tau_2 B^*(\tau_1)\,dx\,dy$$

Используя разностную структуру ядра оператора B и применяя преобразование Фурье F_ξ с параметром ξ (ξ_1, ξ_2) с учетом соотношения

$$F_\xi\left(\frac{\sin^i\theta\cos^j\theta}{2\pi R}\right)=\frac{\xi_1{}^i\xi_2{}^j}{|\xi|^3},\quad 0\leqslant i,\quad j\leqslant 2,\quad i+j=2$$

получим неравенство

$$(2.5)\qquad \int\limits_E \tau B(\tau)\,dx\,dy\geqslant\frac{1-\nu}{2\pi^2 G}\int\limits_\xi\frac{|F_\xi(\tau)|^2}{|\xi|}\,d\xi_1\,d\xi_2$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает монотонность оператора $B-\Delta tB^*$; этот оператор непрерывен в $L_2(E)$ [9]. Кроме того, $\mathbf{v}^k\in L_2(E)$ при $\mathbf{v}\in V$, множество K выпукло и замкнуто в $L_2(E)$. Выполнение указанных требований обеспечивает существование решения.

Предположение о возможности двух решений τ_1, τ_2 и подстановка их в (2.3) приводит к неравенству

$$(2.6)\qquad W(\tau_1-\tau_2)=\frac{1}{2}\int\limits_E B(\tau_1-\tau_2)(\tau_1-\tau_2)\,dx\,dy\leqslant 0$$

Чтобы доказать невозможность (2.6), достаточно в силу (2.5) показать, что

$$(2.7)\qquad \int\limits_\xi\frac{|F_\xi(\tau_1)-F_\xi(\tau_2)|^2}{|\xi|}\,d\xi_1\,d\xi_2>0$$

Но если $\|\tau_1-\tau_2\|_{L_2(E)}>0$, то в силу равенства Парсеваля

$$\int\limits_\xi|F_\xi(\tau_1)-F_\xi(\tau_2)|^2 d\xi_1\,d\xi_2>0$$

откуда вытекает (2.7) и единственность решения (2.3).

Выполним теперь в левой части (2.2) интегрирование по частям и преобразуем неравенство к эквивалентному виду

$$(2.8)\qquad \int\limits_0^r\int\limits_E[B(\tau^\cdot)-B^*(\tau_0)-\mathbf{v}](\tau-\tau_0)\,dx\,dy\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_E[B(\tau-\tau_0)(\tau-\tau_0)\,dx\,dy]_{t=0}^{t=r},\quad \forall\tau\in K\cap V',\quad \forall r\in[0,T]$$

По терминологии [12] (2.2) и (2.8) называются, соответственно, сильной и слабой формами вариационного параболического неравенства. Так как при рассмотрении (2.2) считается, что $\tau\in V'$ (это более узкий класс допустимых функций, чем в [12]), то неравенство (2.8) эквивалентно (2.2) [13].

Построим по $\tau_N{}^k$ — решениям (2.3) — функцию $\tau_N(t) \in V$, определив ее условиями

$$\tau_N(t) = \tau_N{}^k \text{ при } t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t], \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

Теорема 3. Функции τ_N при $N \to \infty$ ($\Delta t \to 0$) слабо в V сходятся к решению (2.8).

Доказательство. Последовательность $\tau_N(t)$ ограничена, так как принадлежит ограниченному множеству K. Следовательно, из нее можно выделить слабо сходящуюся в V последовательность. Сохраним для нее то же обозначение τ_N.

Если показать, что предельная функция τ^* удовлетворяет неравенству (2.8), а его решение единственно, то теорема будет доказана, так как и все другие последовательности τ_N должны сходиться к τ^*. Для доказательства единственности достаточно записать (2.8) дважды для $\tau_0 = \tau_1$, $\tau = \tau_2$; $\tau_0 = \tau_2$, $\tau = \tau_1$ (τ_i — предполагаемые решения) и затем результаты сложить. В итоге получим, что при всех r должно выполняться неравенство (2.6). Поэтому двух решений (2.8) быть не может.

Докажем теперь, что τ^* удовлетворяет неравенству (2.8). Представим варьируемую функцию $\tau \in K \cap V'$ в виде предела последовательности $\tau_m \in C^1([0, T], L_2(E))$, такой, что $\tau_m \to \tau$, $\tau_m^{\cdot} \to \tau^{\cdot}$ в V.

Покажем, что (2.8) выполняется для $\tau_0 = \tau^*$, $\tau = \tau_m$, а затем перейдем к пределу при $m \to \infty$. Для этого введем кусочно-постоянную функцию $\tau_c = \tau_m(k\Delta t)$, $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$ и кусочно-линейную функцию τ_l

$$\tau_l = \tau_m(k\Delta t) + t\{\tau_m[(k+1)\Delta t] - \tau_m(k\Delta t)\}/\Delta t, \quad t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$$

Подставляя в левую часть (2.8) (обозначаемую ниже I_{mn}) τ_N, τ_c, $\tau_l^{\cdot}$, соответственно, на место τ_0, τ и $\tau^{\cdot}$, получаем

$$I_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_E \{B\{\tau_m[(k+1)\Delta t] - \tau_m(k\Delta t)\} - \Delta t[\mathrm{v}^k + B^*(\tau_N^{k+1})]\}$$
$$\{\tau_m[(k+1)\Delta t] - \tau_N^{k+1}\}\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int_E B[(\tau_m(N\Delta t) - \tau_N{}^N)]$$
$$[\tau_m(N\Delta t) - \tau_N{}^N]\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_E B[\tau_m(0) - \tau_N(0)][\tau_m(0) - \tau_N(0)]\,dx\,dy$$

Если же теперь (аналогично [12], гл. 4) просуммировать по k левые части (2.3) и воспользоваться тождеством $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a}) = {}^1/_2|\mathbf{a}|^2 - {}^1/_2|\mathbf{b}|^2 - {}^1/_2|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$, то получим, что $I_{mn} \geqslant 0$. Итак, установлена справедливость неравенства (2.8) при фиксированных m, N.

Выполним сначала предельный переход при $N \to \infty$ ($\Delta t \to 0$). В силу равенства (2.4) будем иметь

$$\int_0^r \int_E B^*(\tau^N)(\tau_m - \tau_N)\,dx\,dy\,dt = \int_0^r \int_E B^*(\tau_N)\tau_m\,dx\,dy\,dt \to$$
$$\to \int_0^r \int_E B^*(\tau^*)\tau_m\,dx\,dy\,dt \text{ при } \tau_N \to \tau^* \text{ слабо}$$

Предельный переход по N в остальных слагаемых левой части (2.8) делается с учетом монотонности оператора B, а также того, что $\tau_c \to \tau_m^{\cdot}$, $\tau_l^{\cdot} \to \tau_m^{\cdot}$, $\mathrm{v} \xrightarrow{k} \mathrm{v}$, $\tau_N \to \tau^*$ (слабо). После этого с учетом свойств аппроксимации τ функциями τ_m совершаем переход к пределу по k в левой части (2.8).

Замечание. Приведенное доказательство теоремы 3 одновременно устанавливает существование решения вариационного неравенства (2.8), принадлежащего пространству V.

Исходная граничная задача, сформулированная в скоростях, эквивалентна эволюционному неравенству (2.2). Стационарному неравенству (2.3) можно поставить в соответствие эквивалентную граничную задачу, сформулированную в приращениях искомых функций. Последняя получается из (1.4), (1.5) заменой функции $\mathrm{s}(t)$ на

(2.9) $$\Delta \mathrm{s}^{k+1} = \mathrm{v}^k \Delta t - B(\tau^{k+1} - \tau^k) + \Delta t B^*(\tau^{k+1})$$

Доказательство эквивалентности (2.3) и граничной задачи в приращениях аналогично доказательству теоремы 1. Теорема 3 является обоснованием использования постановки задачи в приращениях.

3. Сведение к решению последовательности задач минимизации. Для стационарных вариационных неравенств с монотонным оператором типа (2.3) активно развиваются прямые методы решений [11, 14]. Однако опыт их практического использования при решении пространственных граничных задач с условиями в форме неравенств пока уступает накопленному при реализации методов, основанных на минимизации функционалов.

Перейдем к построению таких методов для рассматриваемых задач. В соответствии с одним из путей, намеченных в п. 2, будем пытаться подобрать функционал, для которого неравенство (2.3) — достаточное условие экстремума. Оператор B^* несимметричный, и поэтому из-за наличия в (2.3) слагаемого $\Delta t B^*$ в общем случае такого функционала не существует. Однако, если можно пренебречь переносными скоростями, справедлива

Теорема 4. В случае медленных движений тела решение граничной задачи сводится к последовательности задач минимизации гладких (квадратичных) функционалов

$$(3.1)\qquad \min_{|\boldsymbol{\tau}_N^{k+1}|\leqslant -\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}} \int\limits_E \Big[\frac{1}{2} B(\boldsymbol{\tau}_N^{k+1})\boldsymbol{\tau}_N^{k+1} - B(\boldsymbol{\tau}_N{}^k)\boldsymbol{\tau}_N^{k+1} - \mathbf{v}^k \Delta t \boldsymbol{\tau}_N^{k+1}\Big]\,dx\,dy, \qquad \boldsymbol{\tau}_N{}^\circ = \boldsymbol{\tau}^\circ$$

Доказательство. В рассматриваемом случае (при отсутствии оператора B^*) неравенство (2.3) выражает собой условие положительности линейной части приращения квадратичного функционала. При этом (с учетом симметрии оператора B), как известно [12], имеет место эквивалентность (2.3) и (3.1). В том же смысле, что и в теореме 3, имеет место сходимость решений (3.1) к решению исходной задачи.

Замечание. При численном решении задачи (3.1) высокую эффективность показал метод проекций градиента [15] с использованием процедуры выбора шага, предложенной Р. П. Федоренко.

Переход к последовательности задач минимизации можно осуществить и другим путем, использующим экстремальное соотношение типа (1.7) и справедливым для общего случая кинематики тела.

Теорема 5. Решение граничной задачи сводится к последовательности задач минимизации негладких функционалов вида

$$(3.2)\qquad \min_{|\boldsymbol{\tau}_N^{k+1}|\leqslant -\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}} \int\limits_E [-\rho(\sigma_{zz})\sigma_{zz}\,|\Delta \mathbf{s}^{k+1}| - \boldsymbol{\tau}^{k+1}\Delta \mathbf{s}^{k+1}]\,dx\,dy, \qquad \boldsymbol{\tau}_N{}^\circ = \boldsymbol{\tau}^\circ$$

где $\Delta \mathbf{s}^{k+1}(\boldsymbol{\tau}_N{}^{k+1}, \boldsymbol{\tau}_N{}^k)$ определяется выражением (2.9).

Доказательство. Рассмотрим граничную задачу (1.4), (2.9), сформулированную в приращениях. Из (2.9) видно, что Δs^{k+1} есть результат применения к искомой функции $\boldsymbol{\tau}_N^{k+1}$ оператора $B - \Delta t B^*$, представляющего собой сумму симметричного и кососимметричного операторов. Аналогичная граничная задача, в которой фигурировал оператор либо симметричный, либо кососимметричный, рассматривалась в [10], где была доказана ее эквивалентность задаче минимизации (3.2). Оказывается, что метод доказательства [10] полностью переносится на рассматриваемый здесь случай наличия оператора $B - \Delta t B^*$. Сходимость решения задач (3.2) при $N \to \infty$ ($\Delta t \to 0$) вытекает из теоремы 3.